



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА

Александар Николић

СИМУЛАЦИЈА ЛАМИНАРНОГ И ТУРБУЛЕНТНОГ
СТРУЈАЊА НА РЕАЛНОМ МОДЕЛУ АРТЕРИЈСКЕ
БИФУРКАЦИЈЕ СА СТЕНОЗАМА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2018.

I. Аутор

Име и презиме: Александар Николић

Датум и место рођења: 16.08.1983. године, Крагујевац, Република Србија

Садашње запослење: Виши стручни сарадник, Факултет инжењерских наука, Крагујевац

II. Докторска дисертација

Наслов: Симулација ламинарног и турбулентног струјања на реалном моделу артеријске бифуркације са стенозама

Број страница: 205

Број слика: 236

Број библиографских података: 73

Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Крагујевац

Научна област (УДК): Примењена механика, Примењена информатика и рачунарско инжењерство (532.517.2/.4)

Ментор: др Мирослав Живковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Крагујевац

III. Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: 08. 11. 2013. године

Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 01-1/885-10 од 20.03.2014. године

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

1. Др Небојша Јовичић, редовни професор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
2. Др Ненад Филиповић, редовни професор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
3. Др Милош Недељковић, редовни професор,
Машински факултет, Универзитет у Београду;
4. Др Радован Славковић, редовни професор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
5. Др Мирослав Живковић, редовни професор, ментор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Др Ненад Филиповић, редовни професор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
2. Др Небојша Јовичић, редовни професор,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
3. Др Сци. Мед. Лазар Велички, ванредни професор, Медицински факултет, Универзитет у Новом Саду;
4. Др Велибор Исаиловић, доцент,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
5. Др Владимир П. Миловановић, доцент,
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;

Датум одбране дисертације:

Резиме

У дисертацији је развијен модул за прорачун турбулентног струјања који се примењује за проучавање медицинских феномена који се јављају у артеријским бифуркацијама са стенозама. Развој турбулентног модула за прорачун струјања флуида у овом раду заснива се на методу коначних елемената (МКЕ). Развијени турбулентни модели $k-\omega$ и LES су применом метода коначних елемената додати у програм $PAK-F$. Добијени резултати су верификовани на основу експерименталних резултата на више различитих проблема. Симулација ламинарног и турбулентног струјања је изведена на реалним моделима артеријских бифуркација. Може се закључити да је приказана методологија користан алат који пружа значајне информације кардиолозима о здрављу пацијента и да ли има потребе за интервенцијом.

Кључне речи: струјање флуида, турбуленција, струјање крви, артерије, бифуркације

Abstract

In the dissertation, a turbulent flow calculation module was developed that is used to study medical phenomena occurring in arterial bifurcations with stenoses. The development of a turbulent fluid flow calculation module in this paper is based on the Finite Element Method (FEM). Developed turbulent models $k-\omega$ and LES are added to the PAK-F program using finite element method. The obtained results were verified on the basis of experimental results on several different problems. The simulation of laminar and turbulent flows is performed on real models of arterial bifurcations. It can be concluded that the methodology presented is a useful tool that provides significant information to cardiologists about the patient's health and whether there is a need for intervention.

Key words: fluid flow, turbulence, blood flow, arteries, bifurcations

Ова докторска дисертација настала је као резултат вишегодишњих истраживања у Лабораторији за инжењерски софтвер на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу.

Велику захвалност дугујем ментору Др Мирославу Живковићу, редовном професору, на дугогодишњој сарадњи у Лабораторији за инжењерски софтвер и ангажовању на пројектима Министарства просвете, науке и технолошког развоја.

Такође, велику захвалност дугујем Др Ненаду Филиповићу, редовном професору, руководиоцу Центра за биоинжењеринг, на огромној помоћи при изради дисертације и корисним сугестијама.

Посебно бих се захвалио колегама Милану Благојевићу, Николи Јовановићу и др Милораду Живковићу на великој помоћи при изради примера и добијању нумеричких резултата. Такође се захваљујем колегама из Лабораторије за инжењерски софтвер, Центра за динамичка испитивања, Центра за биоинжењеринг и Истраживачко-развојног центра за биоинжењеринг на дугогодишњој подршци и сарадњи.

На крају највећу захвалност дугујем својој породици, оцу Владети, супрузи Душици, сину Алекси, сестри Биљани са породицом и породицама Спасојевић и Јанковић. Без њихове подршке и помоћи не бих завршио ову дисертацију. Дисертација посвећена успомени на мајку Добрилу.

САДРЖАЈ

1	Увод	1
1.1	Циљ рада	2
1.2	Преглед литературе	2
1.3	Садржај рада.....	4
2	ОПШТА РАЗМАТРАЊА О ТУРБУЛЕНЦИЈИ	5
2.1	Рејнолдсове једначине и статистичко моделирање турбуленције	8
2.1.1	Бусинескова апроксимација (<i>Boussinesq approximation</i>)	11
3	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГ СТРУЈАЊА	14
3.1	$k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел	14
3.2	$k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел заснован на теорији ренормализационе групе (<i>Renormalization group - RNG</i>)	15
3.3	$k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем (<i>Low Reynolds number</i>).....	16
3.4	$k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел.....	18
3.5	$k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем (<i>Low Reynolds number</i>).....	19
3.6	Спаларт-Алмарас турбулентни модел.....	19
3.7	Симулација крупних вртлога (<i>Large Eddy Simulation - LES</i>)	21
3.8	Концепт зидних функција (<i>Wall functions</i>)	23
4	НУМЕРИЧКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА ТУРБУЛЕНТНИХ МОДЕЛА У МЕТОДИ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА ..	26
4.1	Метод коначних елемената.....	26
4.2	Тродимензионални (3Д) изопараметарски коначни елемент	27
4.3	Дводимензионални (2Д) изопараметарски коначни елемент	31
4.4	Моделирање поља физичких величина применом МКЕ.....	33
4.5	Рејнолдсове једначине у методу коначних елемената	35
4.6	$k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел у методу коначних елемената.....	40
4.6.1	Инкрементално-итеративни поступак за $k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем.....	44
4.7	$k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел у методу коначних елемената	48
4.7.1	Инкрементално-итеративни поступак за $k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел...	51
4.8	Почетне и граничне вредности турбулентних променљивих.....	55
4.8.1	Интензитет турбуленције.....	56
4.8.2	Дужинска размера турбуленције.....	57
4.8.3	Почетне вредности за турбулентни модел Спаларт-Алмарас	57
4.8.4	Почетне вредности за турбулентни модел $k - \varepsilon$	57

4.8.5	Почетне вредности за турбулентни модел $k - \omega$	58
4.9	Флуид-солид интеракција.....	58
4.9.1	Основне једначине кретања солида	58
4.9.2	Слабо спрезање	61
5	ПРИМЕРИ ТЕСТИРАЊА ТУРБУЛЕНТНОГ МОДЕЛА	63
5.1	Струјање флуида у каналу са степеником	63
5.1.1	2Д модел канала са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, 7600 елемената.....	64
5.1.2	2Д модел канала са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, 28000 елемената.....	69
5.1.3	2Д модел канала са степеником, <i>LES</i> турбулентни модел	74
5.2	Утицај густине мреже на резултат код струјања у каналу са степеником	85
5.3	Ламинарно и турбулентно струјање флуида у цеви кружног попречног пресека са кривином од 90°	89
5.3.1	Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 10.5mm/s	91
5.3.2	Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 23mm/s.....	92
5.3.3	Турбулентно струјање при улазној осредњеној брзини флуида од 920mm/s	93
5.4	Турбулентно струјање нестишљивог флуида преко аеродинамичког профила	94
6	УВОД У БИОИНЖЕЊЕРИНГ И СТРУЈАЊЕ КРВИ КРОЗ АРТЕРИЈЕ.....	104
6.1	Увод у кардиоваскуларни систем	104
6.1.1	Крв	106
6.1.2	Проток крви у крвним судовима	109
6.1.3	Крвни судови	110
6.1.4	Струјање крви у великим крвним судовима	111
6.2	Основни параметри у хемодинамици	115
7	СИМУЛАЦИЈА ЛАМИНАРНОГ И ТУРБУЛЕНТНОГ СТРУЈАЊА КРВИ НА РЕАЛНОМ МОДЕЛУ АРТЕРИЈСКЕ БИФУРКАЦИЈЕ СА СТЕНОЗАМА.....	117
7.1	Методологија за брзо генерисање модела коначних елемената артеријске бифуркације	117
7.2	Нумеричка симулација ламинарног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 5	121
7.3	Нумеричка симулација интеракције ламинарног струјања флуида и солида на примеру каротидне бифуркације, пацијент 7	132
7.4	Нумеричка симулација интеракције флуида и солида на примеру коронарне бифуркације, пацијент 9	145
7.5	Нумеричка симулација ламинарног струјања на примеру коронарне бифуркације са великом стенозом, пацијент 10	157
7.6	Поређење нумеричких резултата за ламинарно струјање флуида у каротидној артерији, пацијент 5.....	163
7.7	Нумеричка симулација турбулентног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 5	164
7.8	Нумеричка симулација турбулентног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 7	175
7.9	Нумеричка симулација турбулентног струјања на примеру коронарне бифуркације са великом стенозом, пацијент 10	185

7.10	Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној артерији, пацијент 5.....	192
8	ЗАКЉУЧАК	193
9	ДОДАТАК	197
9.1	Извођење једначина стандардног $k - \varepsilon$ турбулентног модела	197
10	ЛИТЕРАТУРА	202

ЛИСТА СЛИКА

Слика 2.1 Упоредни приказ ламинарног и турбулентног профила брзине при струјању у каналу [2].....	5
Слика 2.2 Рејнолдсов експеримент; а) ламинарно струјање, б) процес преласка из ламинарног у турбулентно струјање, ц) турбулентно струјање	6
Слика 2.3 Временско осредњавање брзине струјања	9
Слика 4.1 Дискретизација на коначне елементе на примеру каротидне артерије: а) домен флуида (крв) и б) домен солида (крвни суд)	26
Слика 4.2 Тродимензионални осмочворни елемент. а) Приказ основног 3Д елемента (чворна померања су приказана само за чвор 8); б) Елемент приказан у природном координатном систему (бројеви у загради представљају вредности природних координата за неке од чворова) [20].....	28
Слика 4.3 Дводимензионални четворочворни и деветочворни коначни елементи. а) Приказ четворочворног елемента (лево) и приказ деветочворног елемента (десно), компоненте померања су дате само за чвор 4; б) Елемент приказан у природном координатном систему; ц) Аксонометријски приказ елемента са померањима у чвору 4 и дебљином h [20].....	31
Слика 4.4 Алгоритамска шема спрезања Рејнолдсових једначина и $k - \omega$ турбулентног модела.....	55
Слика 4.5 Алгоритам програма за флуид-солид интеракцију.....	62
Слика 5.1 Геометрија проблема - струјање флуида преко степеника [47].....	63
Слика 5.2 Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 7600 елемената.....	64
Слика 5.3 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер PAK-F.....	64
Слика 5.4 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0.....	65
Слика 5.5 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер PAK-F.....	65
Слика 5.6 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0.....	65
Слика 5.7 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер PAK-F.....	66
Слика 5.8 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0.....	66

Слика 5.9 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са литературом Jović, Driver [48]	67
Слика 5.10 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0 ...	68
Слика 5.11 Дијаграм расподеле кинетичке енергије турбуленције за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са литературом Jović, Driver [48]	68
Слика 5.12 Дијаграм расподеле кинетичке енергије турбуленције за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0.....	69
Слика 5.13 Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 28000 елемената.....	69
Слика 5.14 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F.....	70
Слика 5.15 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0....	70
Слика 5.16 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F.....	71
Слика 5.17 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0.....	71
Слика 5.18 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F.....	72
Слика 5.19 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0....	72
Слика 5.20 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са литературом Jović, Driver [48]	73
Слика 5.21 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0 ...	73
Слика 5.22 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 50	74
Слика 5.23 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 100.....	74

Слика 5.24 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150.....	75
Слика 5.25 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200.....	75
Слика 5.26 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250.....	75
Слика 5.27 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300.....	76
Слика 5.28 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350.....	76
Слика 5.29 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400.....	76
Слика 5.30 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450.....	77
Слика 5.31 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 50.....	77
Слика 5.32 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 100.....	77
Слика 5.33 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150.....	78
Слика 5.34 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200.....	78
Слика 5.35 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250.....	78
Слика 5.36 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300.....	79
Слика 5.37 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350.....	79
Слика 5.38 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400.....	79
Слика 5.39 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450.....	80
Слика 5.40 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 20.....	80
Слика 5.41 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 40.....	80

Слика 5.42 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 60.....	81
Слика 5.43 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 80.....	81
Слика 5.44 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 100.....	81
Слика 5.45 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150.....	82
Слика 5.46 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 180.....	82
Слика 5.47 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200.....	82
Слика 5.48 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250.....	83
Слика 5.49 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300.....	83
Слика 5.50 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350.....	83
Слика 5.51 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400.....	84
Слика 5.52 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450.....	84
Слика 5.53 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , LES турбулентни модел, корак 400.....	85
Слика 5.54 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 8000 чворова.....	86
Слика 5.55 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 чворова.....	86
Слика 5.56 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 35000 чворова.....	87
Слика 5.57 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 50000 чворова.....	87

Слика 5.58 Утицај густине мреже коначних елемената на тачност резултата за различите додирне дужине после степеника X ,	88
Слика 5.59 Геометрија цеви кружног попречног пресека са кривином од 90°	89
Слика 5.60 Мрежа коначних елемената цеви у кривини од 90° , а) мрежа од 7980 коначних елемената, б) мрежа од 36800 коначних елемената	90
Слика 5.61 Детаљ мреже коначних елемената цеви у кривини од 90°	90
Слика 5.62 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 10.5m/s , а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F	92
Слика 5.63 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 23m/s , а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F	93
Слика 5.64 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 920m/s , а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F	94
Слика 5.65 а) Геометрија аеродинамичког профила, б) Модел коначних елемената аеродинамичког профила	94
Слика 5.66 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 50, солвер PAKF	95
Слика 5.67 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 50, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	96
Слика 5.68 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 100, солвер PAKF	96
Слика 5.69 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 100, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	97
Слика 5.70 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 150, солвер PAKF	97
Слика 5.71 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 150, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	98
Слика 5.72 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 200, солвер PAKF	98
Слика 5.73 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 200, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	99
Слика 5.74 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 50, солвер PAKF	99
Слика 5.75 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 50, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	100
Слика 5.76 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 100, солвер PAKF	100
Слика 5.77 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 100, солвер COMSOL MULTIPHYSICS	101

Слика 5.78 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 150, солвер PAKF.....	102
Слика 5.79 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 150, солвер COMSOL MULTIPHYSICS.....	102
Слика 5.80 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 200, солвер PAKF.....	103
Слика 5.81 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 200, солвер COMSOL MULTIPHYSICS.....	103
Слика 6.1 Шема циркулаторног система [20].....	105
Слика 6.2 Приказ еритроцита [52].....	107
Слика 6.3 Леукоцит окружен еритроцитима [52].....	108
Слика 6.4 Тромбоцити [52].....	108
Слика 6.5 Структура артеријског и венског зида [52].....	110
Слика 6.6 Приказ срца са главним артеријама и венама [58].....	112
Слика 6.7 Приказ аорте са каротидним и поткључним артеријама [20].....	113
Слика 6.8 Приказ каротидне артерије [58].....	114
Слика 6.9 Приказ коронарних артерија [59].....	114
Слика 7.1 Волуметријски модели ткива (кости и крвни судови) добијени обрадом ЦТ снимака [66].....	118
Слика 7.2 (а) Волуметријски модел ткива каротидних артерија, (б) Блокови генерисани софтвером STL2FEM [66].....	119
Слика 7.3 Модели коначних елемената са блоковима генерисани софтвером STL2FEM, (а) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 7, (б) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 6, (ц) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 5, (д) коронарна артеријска бифуркација - пацијент 9 [66].....	120
Слика 7.4 Модели коначних елемената бифуркације каротидне артерије, (а) флуидни домен; (б) домен солида.....	121
Слика 7.5 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 5.....	121
Слика 7.6 Временска функција брзине у тежишту пресека при уласку у артерију за један срчани циклус.....	122
Слика 7.7 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 5.....	123
Слика 7.8 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 5.....	123
Слика 7.9 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 5.....	124

Слика 7.10 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5.....	124
Слика 7.11 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 5.....	125
Слика 7.12 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 5.....	125
Слика 7.13 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 5.....	126
Слика 7.14 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5.....	126
Слика 7.15 Расподела смицајног напона за корак 4, поглед 1, пацијент 5.....	127
Слика 7.16 Расподела смицајног напона за корак 4, поглед 2, пацијент 5.....	127
Слика 7.17 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 5.....	128
Слика 7.18 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 5.....	128
Слика 7.19 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 1, пацијент 5.....	129
Слика 7.20 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 2, пацијент 5.....	129
Слика 7.21 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 1, пацијент 5.....	130
Слика 7.22 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 2, пацијент 5.....	130
Слика 7.23 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 5.....	131
Слика 7.24 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 5.....	131
Слика 7.25 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 7.....	133
Слика 7.26 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 7.....	133
Слика 7.27 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 7.....	134
Слика 7.28 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7.....	134
Слика 7.29 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 7.....	135
Слика 7.30 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 7.....	135
Слика 7.31 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 7.....	136
Слика 7.32 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7.....	136
Слика 7.33 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 7.....	137
Слика 7.34 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7.....	137
Слика 7.35 Расподела смицајног напона за корак 6, поглед 1, пацијент 7.....	138
Слика 7.36 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7.....	138
Слика 7.37 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 1, пацијент 7.....	139

Слика 7.38 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 2, пацијент 7	139
Слика 7.39 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 1, пацијент 7	140
Слика 7.40 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 2, пацијент 7	140
Слика 7.41 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 1, пацијент 7	141
Слика 7.42 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7	141
Слика 7.43 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 6, поглед 1, пацијент 7	142
Слика 7.44 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 6, поглед 2, пацијент 7	142
Слика 7.45 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 10, поглед 1, пацијент 7	143
Слика 7.46 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 10, поглед 2, пацијент 7	143
Слика 7.47 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 24, поглед 1, пацијент 7	144
Слика 7.48 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 24, поглед 2, пацијент 7	144
Слика 7.49 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 7	145
Слика 7.50 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 7	145
Слика 7.51 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 9	146
Слика 7.52 Временска функција коришћена за прорачун коронарне бифуркације	146
Слика 7.53 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 5, пацијент 9	147
Слика 7.54 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 13, пацијент 9	147
Слика 7.55 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 17, пацијент 9	148
Слика 7.56 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 5, пацијент 9	148
Слика 7.57 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 13, пацијент 9	149
Слика 7.58 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 17, пацијент 9	149
Слика 7.59 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 9	150
Слика 7.60 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 9	150

Слика 7.61 Расподела смицајног напона за корак 13, поглед 1, пацијент 9.....	151
Слика 7.62 Расподела смицајног напона за корак 13, поглед 2, пацијент 9.....	151
Слика 7.63 Расподела смицајног напона за корак 17, поглед 1, пацијент 9.....	152
Слика 7.64 Расподела смицајног напона за корак 17, поглед 2, пацијент 9.....	152
Слика 7.65 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 1, пацијент 9.....	153
Слика 7.66 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 2, пацијент 9.....	153
Слика 7.67 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 13, поглед 1, пацијент 9.....	154
Слика 7.68 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 13, поглед 2, пацијент 9.....	154
Слика 7.69 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 17, поглед 1, пацијент 9.....	155
Слика 7.70 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 17, поглед 2, пацијент 9.....	155
Слика 7.71 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 9.....	156
Слика 7.72 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 9.....	156
Слика 7.73 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 10	157
Слика 7.74 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 1.....	158
Слика 7.75 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 2.....	158
Слика 7.76 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 1.....	159
Слика 7.77 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 2.....	159
Слика 7.78 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 1.....	160
Слика 7.79 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 2.....	160
Слика 7.80 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 1.....	161
Слика 7.81 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 70, пацијент 10, поглед 2.....	161

Слика 7.82 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10.....	162
Слика 7.83 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10.....	162
Слика 7.84 Поређење нумеричких резултата за ламинарно струјање флуида у каротидној бифуркацији, пацијент 5, а) софтвер ANSYS Fluent R15.0, б) софтвер PAK-F.....	163
Слика 7.85 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 5...164	
Слика 7.86 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5.....	165
Слика 7.87 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5.....	165
Слика 7.88 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5.....	166
Слика 7.89 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5.....	166
Слика 7.90 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5.....	167
Слика 7.91 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5.....	167
Слика 7.92 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5.....	168
Слика 7.93 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5.....	168
Слика 7.94 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5.....	169
Слика 7.95 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5.....	169
Слика 7.96 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5.....	170
Слика 7.97 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5.....	170
Слика 7.98 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 1, пацијент 5.....	171
Слика 7.99 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 2, пацијент 5.....	171
Слика 7.100 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 1, пацијент 5.....	172

Слика 7.101 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 2, пацијент 5	172
Слика 7.102 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 1, пацијент 5	173
Слика 7.103 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 2, пацијент 5	173
Слика 7.104 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 1, пацијент 5.....	174
Слика 7.105 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 2, пацијент 5.....	174
Слика 7.106 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије са приказом набране мреже близу зидова, пацијент 7.....	175
Слика 7.107 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7.....	176
Слика 7.108 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7.....	176
Слика 7.109 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7.....	176
Слика 7.110 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7.....	177
Слика 7.111 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7.....	177
Слика 7.112 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7.....	178
Слика 7.113 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7.....	178
Слика 7.114 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7.....	179
Слика 7.115 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7.....	179
Слика 7.116 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7.....	180
Слика 7.117 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7.....	180
Слика 7.118 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7.....	181

Слика 7.119 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 1, пацијент 7	181
Слика 7.120 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 2, пацијент 7	182
Слика 7.121 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 1, пацијент 7	182
Слика 7.122 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 2, пацијент 7	183
Слика 7.123 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 1, пацијент 7	183
Слика 7.124 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 2, пацијент 7	184
Слика 7.125 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 1, пацијент 7.....	184
Слика 7.126 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 2, пацијент 7.....	185
Слика 7.127 Модел коначних елемената бифуркације коронарне артерије, пацијент 10	186
Слика 7.128 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 1.....	187
Слика 7.129 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 2.....	187
Слика 7.130 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 1.....	188
Слика 7.131 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 2.....	188
Слика 7.132 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 1.....	189
Слика 7.133 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 2.....	189
Слика 7.134 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 1.....	190
Слика 7.135 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 2.....	190
Слика 7.136 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10....	191
Слика 7.137 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10..	191

Слика 7.138 Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној бифуркацији, пацијент 5, а) софтвер ANSYS Fluent R15.0, б) софтвер PAK-F.....192

ЛИСТА ТАБЕЛА

<i>Табела 7.1 Материјални подаци за домен флуида</i>	<i>122</i>
<i>Табела 7.2 Материјални подаци за домен флуида и домен солида</i>	<i>132</i>

ЛИСТА ОЗНАКА

Ознака	Назив
k	кинетичка енергија турбуленције
ε	дисипација кинетичке енергије турбуленције
ω	специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције
Re	Рејнолдсов број
v	брзина флуида
d	пречник цеви
ρ	густина флуида
μ	динамичка вискозност флуида
t	време
v_i, v_j	компоненте брзине флуида
p	притисак флуида
x_i, x_j	координате флуидног делића у тренутку t
$\bar{v}_i(x_i)$	осредњена вредност брзине
v_i'	флуктуација брзине око осредњене вредности
T	временски интервал осредњавања
\bar{p}	осредњена вредност притиска
p'	флуктуација притиска
S_{ij}	тензор брзине деформације
μ_T	динамичка турбулентна вискозност (<i>eddy viscosity</i>)
δ_{ij}	Кронекеров делта симбол
τ_{ij}	Рејнолдсови напони
\bar{S}_{ij}	тензор осредњене брзине деформације
μ_{eff}	ефективна динамичка вискозност
P_k	продукција кинетичке енергије турбуленције
$C_\mu, C_{e1}, C_{e2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$	константе $k - \varepsilon$ модела

$C_{1e}, C_{2e}, \eta_0, \beta$	константе $k-\varepsilon$ модела ренормализационе групе
$\tilde{\varepsilon}$	модификована дисипација кинетичке енергије турбуленције
D, E	функције $k-\varepsilon$ турбулентног модела са ниским Рејнолдсовим бројем
f_μ, f_1, f_2	пригушне функције код $k-\varepsilon$ турбулентног модела са ниским Рејнолдсовим бројем
Re_t	турбулентни Рејнолдсов број
$\alpha^*, \alpha, \beta_\omega, \beta_k, \sigma, \sigma^*$	константе $k-\omega$ турбулентног модела
R_k, α_0^*, β_i	константе $k-\omega$ турбулентног модела са ниским Рејнолдсовим бројем
ν_T	турбулентна кинематичка вискозност флуида
$\tilde{\nu}$	променљива Спаларт-Алмарас турбулентног модела
f_{v1}, χ	коэффицијенти Спаларт-Алмарас турбулентног модела
$P(\tilde{\nu}), D(\tilde{\nu})$	продукција и дисипација турбулентне енергије
\tilde{S}	модификована вртложност
S	интензитет вртложности
Ω_{ij}	ротациони тензор
κ	Фон-Карманова константа (<i>Von-Karman</i>)
$f_{v2}, f_{l2}, f_w, g, r$	променљиве Спаларт-Алмарас турбулентног модела
$C_{w1}, C_{w2}, C_{w3}, C_{b1}$	константе Спаларт-Алмарас турбулентног модела
C_S	константа Смагоринског
$\bar{\Delta}$	мрежни филтер
T_{ij}	тензор напона
C	константа Смагоринског по <i>DSGS</i> моделу
V^+	бездимензијска брзина
y^+	бездимензијска координата
E	константа код концепта зидних функција
\mathbf{v}	брзина коначног елемента

H	вектор интерполационих функција
V	брзина чвора коначног елемента
u	вектор померања коначног елемента
U	померање чвора коначног елемента
U_{sis}	вектор чворних померања за цео систем
K_{sis}	матрица крутости за цео систем
F_{sis}^s	вектор спољашњих сила за цео систем
x	координата чвора коначног елемента
X	вектор координата чворова коначног елемента
h_K	интерполациона функција за <i>K</i> -ти чвор
J	Јакобијан трансформације између Декартовог и природног координатног система
$\phi(x_i, t)$	физичка променљива у методи коначних елемената
f^v	спољашње силе
F_K^S	површински флуks у чвору <i>K</i>
Φ	вектор чворних вредности променљиве Φ^K
Φ̇	вектор извода по времену чворних вредности променљиве Φ^K
M	матрица маса
K_{vv}	конвективна матрица
K_{vp}	матрица градијента притиска
K_{μvt}	матрица вискозног члана
F_v	вектор запреминских сила
F_s	вектор површинских сила
I	интензитет турбуленције
u'	турбулентна флукуација
d_h	Хидраулички пречник цеви
l	дужинска размера турбуленције
C	матрица пригушења

\mathbf{R}	вектор спољашњег оптерећења
$\dot{\mathbf{U}}$	вектор брзине чворова
$\ddot{\mathbf{U}}$	вектор убрзања чворова
τ_{mean}	средња вредност смичућег напона на зиду
τ_{mag}	временски-просечна вредност површинског вектора смичућег напона
\mathbf{t}_s	површински вектор смицања
\mathbf{t}	вектор смицања
$\boldsymbol{\sigma}$	тензор напона

1 Увод

Турбуленција у динамици вискозног флуида представља неправилно вртложно струјање које се јавља када брзина струјања прелази одређену вредност или када се брзина флуида успорава због проласка поред чврстих тела. Типичне инжењерске примене турбуленције су фокусиране на одређивање основних величина струјања флуида као што су смицајни напон на зиду, притисак или брзина струјања флуида.

Струјање флуида по природи може да се посматра као ламинарно или турбулентно струјање. Ламинарно струјање се карактерише као струјање код кога се струјна влакна крећу паралелно међусобно. У том случају струјна влакна се не мешају са суседним влакнима течности.

За турбулентно струјање је карактеристично да поред средње брзине струјања, свака честица флуида има додатну брзину која може делимично бити у смеру главног струјања а може бити и супротна струјању. По овој карактеристици се турбулентно струјање разликује од ламинарног струјања које нема додатне брзине. У суштини прелазак из ламинарног у турбулентни режим није стриктно дефинисан преко Рејнолдсовог броја већ то може варирати у зависности од вискозности и густине флуида. Када се флуид вртложно креће његови делићи прелазе из једне области у другу при чему преносе масу, количину кретања, енергију. Транспорт количине кретања доводи до турбулентних напона који не постоје код ламинарног струјања. За опис и проучавање турбулентног струјања флуида постоји неколико приступа.

Први приступ је Директна нумеричка симулација (*Direct Numerical Simulation - DNS*) при коме се Навије-Стоксове једначине директно решавају нумеричким путем без икаквих апроксимација и турбулентних модела.

Други приступ је Симулација крупних вртлога (*Large Eddy Simulacija - LES*) и заснива се на нископропусном филтровању и користи Навије-Стоксове једначине да редукује дужинску размеру турбуленције што се користи да се смање компјутерски трошкови прорачуна.

Трећи приступ је статистичко моделирање турбуленције. Овај приступ се заснива на апроксимацији да се брзина флуида може одредити као збир просечне вредности брзине и флукуације брзине око те вредности. Применом ове методе на Навије-Стоксове једначине добијају се Рејнолдсове једначине. У овим једначинама фигуришу просечне вредности брзине и притиска уместо тренутних вредности, али постоје и нови чланови који се називају турбулентни напони или Рејнолдсови напони. Проблем одређивања ових напона доводи до увођења турбулентних модела и одређених апроксимација да би се дошло до решења за поље притиска и брзину флуида.

Турбулентно струјање има у основи још један проблем, а то је струјање флуида у близини чврстих зидова. Расподела брзине у овом граничном слоју може се апроксимирати логаритамским функцијама које су у литератури још познате и као зидне функције (*wall*

functions). Зидне функције су полу-емпиријске релације, које дефинишу профил подужне компоненте вектора брзине у турбулентном граничном слоју на основу растојања од зида, смичућег напона на зиду, густине и вискозности. Постоје и турбулентни модели који се могу интегралити у целом вискозном подслоју тако да увођење зидних функција није потребно.

1.1 Циљ рада

Главни циљ дисертације је развој модула за прорачун турбулентног струјања који се примењује за проучавање медицинских феномена који се јављају у артеријским бифуркацијама са стенозама. Примена је фокусирана и на струјање преко аеродинамичких профила.

Развој турбулентног модула за прорачун струјања флуида у овом раду заснива се на коришћењу метода коначних елемената (МКЕ). При израчунавању основних физичких величина које карактеришу струјање примењена је имплицитна интеграција једначина које описују проблем. Одређивање брзине струјања флуида, притиска, кинетичке енергије турбуленције и дисипације кинетичке енергије турбуленције у чворовима коначних елемената се рачуна на крају сваког корака инкрементално-итеративним поступком.

Турбулентни модели који су развијени у овом раду су једноједначински и двоједначински турбулентни модели засновани на Рејнолдсовим једначинама и *LES* симулацији тако што заједно дају равнотежни систем једначина који је могуће решити.

Мрежа коначних елемената која је коришћена за анализу медицинских феномена у артеријским бифуркацијама је генерисана коришћењем реалне геометрије *DICOM* снимака одабраних пацијената. У ту сврху користи се домаћи софтвер *STL2FEM* за брзо генерисање модела коначних елемената за комплексне геометрије артерија.

Анализа струјања крви у артеријама има за циљ да одреди основне хемодинамске карактеристике као што су брзина струјања крви, притисак или смичући напон на зиду. Артерије са сужењем попречног пресека (стеноза) су посебно интересантне за проучавање. Струјање крви у артеријама се обично карактерише као ламинарно пре стенозе, док након стенозе долази до вртложног струјања које се може најбоље окарактерисати турбулентним струјањем. Проучавање овог феномена је интересантно и са медицинске стране. Након сваког сужења и наглог проширења пресека артерије долази до нагомилавања лошег холестерола који се даље може развити у атеросклеротични плак који доводи до срчаног удара.

1.2 Преглед литературе

Статистичко моделирање турбуленције је проучавано у доста праваца током последњих два века. Турбулентни модели који у основи садрже Рејнолдсове једначине су углавном једноједначински и двоједначински модели засновани на Бусинесковој апроксимацији

[1], [2]. Ова апроксимација подразумева да се члан у Рејнолдсовим једначинама који садржи турбулентне напоне апроксимира преко турбулентне динамичке вискозности.

Једноједначински турбулентни модели углавном се базирају на теорији Колмогорова (1942) и Прантла (1945) где се моделира једна једначина која карактерише струјање. Кинетичка енергија турбуленције у овом случају игра битну улогу, док се турбулентна динамичка вискозност апроксимира као однос кинетичке енергије и дисипације кинетичке енергије турбуленције [2], [3], [4]. Спаларт-Алмарас (*Spalart-Allmaras*) турбулентни модел се заснива на променљиви која се карактерише као модификована турбулентна вискозност [5], [6], [7].

Двоједначински турбулентни модели засновани су на две једначине од којих је једна углавном једначина за кинетичку енергију турбуленције док је друга једначина променљива која представља дисипацију или специфичну дисипацију кинетичке енергије.

Код турбулентног модела $k-\varepsilon$ који се састоји од две једначине, прва једначина је за кинетичку енергију турбуленције k , док је друга једначина за дисипацију кинетичке енергије турбуленције ε . Турбулентна динамичка вискозност представља однос квадрата кинетичке енергије и дисипације кинетичке енергије турбуленције. Код стандардног $k-\varepsilon$ модела потребне су зидне функције за дефинисање променљивих у вискозном подслоју [8], [9], [10]. Током година модел је усавршаван па постоје бројне варијације као што су $k-\varepsilon$ модел за случајеве са ниским Рејнолдсовим бројем (*Low Reynolds*) и модел заснован на теорији ренормализационе групе (*Re-Normalisation Group - RNG*) [11], [12].

Турбулентни модел $k-\omega$ састоји од једначине за кинетичку енергију турбуленције k и једначине за специфичну дисипацију кинетичке енергије турбуленције ω . Модел је креиран тако да се може интегралити у целом вискозном подслоју па нису потребне додатне зидне логаритамске функције за дефинисање струјања близу зида [4], [13]. И код овог модела је развијена теорија за случајеве са ниским Рејнолдсовим бројем [14].

Симулацију крупних вртлога (*Large Eddy Simulation - LES*) је првобитно развио Смагорински (*Joseph Smagorinsky*) 1963. године, док је први увео у употребу *James Deardorff* 1970. године за симулацију струјања ваздуха [15], [16]. Основна идеја за симулирање крупних вртлога лежи у томе да се игноришу мале промене у турбулентном току, а да се акценат стави на крупне вртлоге који у суштини носе целу енергију турбулентног тока. *LES* модели се углавном деле на Смагорински моделе засноване на теорији подслоја (*Sub-grid scale models - SGS*) и на динамичке моделе засноване на теорији подслоја (*Dynamic sub-grid scale models - DSGS*) [15], [17].

Развој турбулентног модула у овом раду заснива се на коришћењу метода коначних елемената (МКЕ) [18], [19], [20]. Турбулентни проблеми који су решавани методом коначних елемената углавном су базирани на двоједначинским моделима $k-\varepsilon$ и $k-\omega$, као и на *LES* симулацији [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28].

При анализи струјања крви у артеријама од посебног интереса су сужења односно стенозе попречног пресека [29]. Проучавањем хемодинамских карактеристика у артеријама могуће је извршити дубљу анализу проблема који се јављају код кардиоваскуларних болести. Каротидне артерије су велики крвни судови који су најбитнији за снабдевање мозга крвљу. Прекид протока крви у мозак доводи до срчаног удара који може довести до смрти [30], [31]. Појава турбулентног струјања је могућа у артеријама и поједини аутори су дошли до одређених закључака изнетим у радовима [32], [33], [34].

1.3 Садржај рада

Докторска дисертација је подељена на 10 поглавља. У прва 4 поглавља се обрађују основни појмови у турбуленцији и математички модели турбулентног струјања, док се у наредна 4 поглавља приказују резултати симулације ламинарних и турбулентних проблема и закључак.

Прво поглавље представља увод у коме је описан циљ рада и приказан преглед литературе која је релевантна за представљени проблем.

У другом поглављу описан је поступак како се долази до Рејнолдсових једначина преко Бусинескове апроксимације што представља основу за статистичко моделирање турбуленције.

У трећем поглављу приказани су математички модели турбулентног струјања. Почев од Спаларт-Алмарас једноједначинског турбулентног модела па до двоједначинских $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ турбулентних модела.

Четврто поглавље представља сажет докторске дисертације у коме је описана нумеричка имплементација турбулентних модела применом метода коначних елемената. Турбулентни модели $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ развијени су у форму инкрементално-итеративних једначина које су имплементирани у солвер *PAK-F*.

У петом поглављу приказани су примери тестирања турбулентног модела.

У шестом поглављу описани су основни појмови који се јављају при хемодинамским прорачунима у биоинжењерингу.

Седмо поглавље је подељено на више потпоглавља. У првом је приказана методологија за брзо генерисање мреже коначних елемената за артеријске бифуркације. Дати су у наставку примери ламинарног струјања крви у артеријским бифуркацијама, а након тога и примери турбулентног струјања у артеријским бифуркацијама.

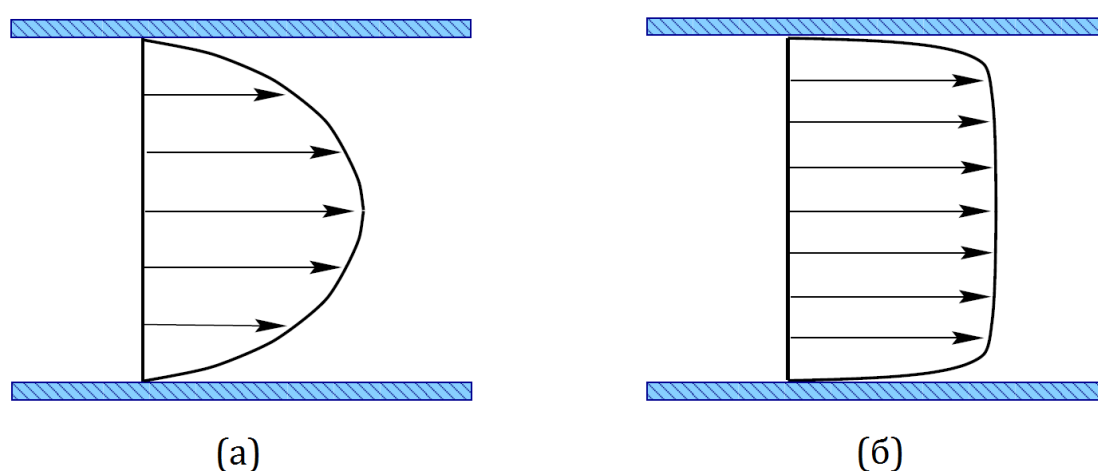
Осмо поглавље представља закључак у коме је резимиран претходни рад са освртом на примере из седмог поглавља и могућим идејама за даљи научни рад у области турбуленције.

Девето поглавље представља додатак и у десетом поглављу приказана је литература која је коришћена у дисертацији.

2 Општа разматрања о турбуленцији

Процес преласка из ламинарног струјања у турбулентно струјање је комплексан процес који до данас није у потпуности објашњен. Као резултат дугогодишњег истраживања научника, одређени процеси у прелазној фази су разјашњени у потпуности. Познато је да процес преласка пролази кроз неколико корака. Прелазно струјање се карактерише у оба смера, као прелазак из ламинарног у турбулентно и као прелазак из турбулентног у ламинарно струјање.

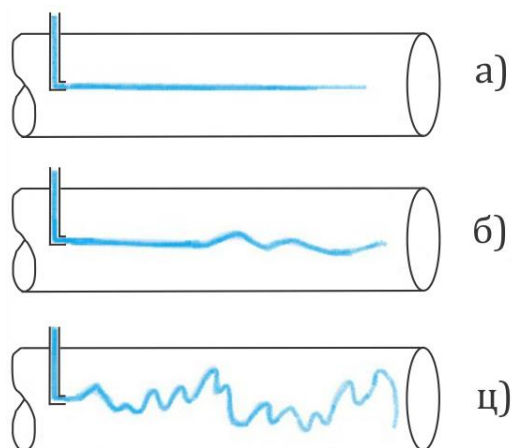
Природна разлика профила брзина при ламинарном и турбулентном струјању у каналу или цеви приказана је на слици 2.1 [2].



Слика 2.1 Упоредни приказ ламинарног и турбулентног профила брзине при струјању у каналу [2]

Параболични профил брзине (слика 2.1а) одговара потпуно развијеном профилу ламинарног струјања, тзв. параболични профил брзине. Са друге стране, при потпуно турбулентном струјању (слика 2.1б) профил брзине се разликује за исти запремиснки проток. И тада профил брзине тежи да постане правоугаони. Може се уочити да су градијент брзине и смицајни напон на зиду веома мали при ламинарном струјању, док код турбулентног струјања смицајни напон има веома битну улогу у профилу струјања.

Научник Осборн Рејнолдс (*Osborne Reynolds, 1883*) је истраживао процес преласка из ламинарног у турбулентно струјање. Експеримент се одвијао на следећи начин: из велике посуде вода је истицала кроз стаклену цев различитим брзинама; брзина струјања је регулисана помоћу вентила; у осу стаклене цеви убачена је капиларна цев кроз коју се убризгава обојена течност која има густину исту као вода; брзина капиларног млаза је била једнака брзини струјања воде у коју млаз улази; на овај начин обојено струјно влакно се формира дуж целе стаклене цеви (Слика 2.2а).



Слика 2.2 Рејнолдсов експеримент; а) ламинарно струјање, б) процес преласка из ламинарног у турбулентно струјање, ц) турбулентно струјање

Посматрањем струјног влакна, у зависности од брзине којом вода протиче кроз цев уочава се постојање неправилних флукуационих импулса који утичу на стабилност струјања како брзина расте (Слика 2.2б). При малим брзинама, импулси су веома слаби и течност глатко тече дуж цеви. Повећавањем брзине, повећава се и утицај импулса. Струјна влакна се при већим брзинама прво повијају, а након тога кидају (Слика 2.2ц).

Даља истраживања су показала да је појава кидања струјних нити пропорционална средњој брзини струјања у цеви v , пречнику цеви d и густини флуида ρ , а обрнуто пропорционална вискозитету флуида μ . Ово се може изразити бездимензионалном јединицом која се зове Рејнолдсов број:

$$R_e = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu} \quad (2.1)$$

Рејнолдсов број је однос између инерцијалних и вискозних сила. Вискозне силе доминирају при ниским Рејнолдсовим бројевима и поремећаји у тим зонама расту брзо. Ови поремећаји се појачавају са повећањем Рејнолдсовог броја при чему струјање прелази у турбулентно.

Практична испитивања су показала да се струјање тока мења из ламинарног у турбулентно када овај број достигне вредност око 2000. При струјању кроз цеви кружног пресека када је $R_e \leq 2300$ обично се сматра да је струјање ламинарно. При ламинарном струјању слојеви флуида клизе глатко један преко другог и количина кретања се преноси само молекулским путем. Ако се R_e број повећа преко 2300 све је више изражено постојање конвективног механизма преноса количине кретања који постоји све док је $R_e \leq 4000$.

Рејнолдсови експерименти су показали да се при повећању брзине струјања, унутрашњи поремећаји све више манифестују и долази до стварања вртлога услед макроскопских флукуација. Прави разлог ове појаве још није до краја објашњен. Може се успоставити

и следећа аналогича, при ламинарном струјању носилац струјања је молекула, док би код турбулентног струјања то био вртлог.

Симулација турбулентног струјања у нумеричкој анализи је врло сложен задатак. Турбуленција није особина флуида, али се јавља као особина струјања. Потребно је прво разумети од чега настаје и шта чини турбулентно струјање. Турбулентно струјање има више својстава [3]:

- Турбулентно струјање је у великој мери нестабилно. Из тог разлога се турбулентни проблеми углавном третирају преко статистичких метода пре него преко детерминистичких. Струјање је по природи хаотично, али нису сва хаотична струјања турбулентна.
- Турбуленција има одлику дифузије у природи. Промене масе и импулса су много веће код турбулентног него код ламинарног струјања. Дифузност може бити крајње пожељна особина за побољшање мешања физичких и хемијских особина унутар флуида. Дифузна природа струјања узрокује појаву граничних и смичућих слојева тако да они постају дебљи него што је то случај код ламинарног струјања.
- Турбуленција представља тродимензионалну нестационарну појаву која се појављује при великим Рејнолдсовим бројевима. Турбулентно струјање може бити крајње нелинеарно и као последица тога јављају се тродимензионални вртлози различите величине који интерагују једни са другима.
- Вртложење или вртложно струјање је битна карактеристика турбулентног струјања и одликује се појавом растезања вртлога (*vortex stretching*). Овим битним механизмом интензитет турбуленције се још више повећава.
- Турбулентно струјање је процес у ком се мешају и доводе у контакт флуиди различитог импулса и момента. Услед тога крупнији вртлози се претварају у ситније све док се не смање толико довољно да њихова кинетичка енергија може да се претвори у топлоту услед вискозног трења. Ово мешање флуида може се још назвати и дисипација. Изгубљена енергија услед мешања се претвара у унутрашњу енергију флуида.

Навије-Стоксове једначине могу да се користе да би се решио проблем турбулентног струјања али не у потпуности [35]. Могу бити коришћене да се одређени проблеми симулирају директно. Овакав приступ назива се Директна Нумеричка Симулација - ДНС (енг. *Direct numerical simulation - DNS*). Коришћењем Навије-Стоксових једначина код овог приступа турбулентно струјање се решава тако што је мрежа уситњена толико да она мора бити мања од најмање турбулентне дужинске размере. Временски кораци морају да се ускладе са бројем чворова дуж главног правца струјања што доводи до веома великог прорачунског домена [10]. За неки типичан пример опструјавања крила авиона, најмања дужинска размера турбуленције би била око 10^{-6} мања од референтне дужине на крилу авиона. За овакав проблем потребно је 10^{18} мрежних тачака да би се дискретизовао проблем [10].

Други приступ који се користи при симулацији турбулентног струјања је Симулација крупних вртлога (*Large Eddy Simulacija - LES*). Овај приступ се заснива на нископропусном

филтеровању и користи Навије-Стоксове једначине да редукује дужинску размену турбуленције што се користи да се смање компјутерски трошкови прорачуна [3].

Трећи приступ у проучавању турбуленције је статистичко моделирање турбуленције. Овај приступ који се још назива и Рејнолдсова апроксимација заснива се на томе да се брзина флуида може одредити као збир просечне вредности брзине флуида и флукуације брзине флуида око те вредности. Применом ове методе на Навије-Стоксове једначине добијају се Рејнолдсове једначине. У овим једначинама фигуришу просечне вредности брзине и притиска уместо тренутне вредности али постоје и нови чланови који се називају турбулентни напони или Рејнолдсови напони. Проблем одређивања ових напона доводи до увођења турбулентних модела и одређених апроксимација да би се дошло до решења за поље притиска и брзину флуида. Турбулентни модели који ће бити приказани у овом раду су једноједначински и двоједначински турбулентни модели који заједно са Рејнолдсовим једначинама дају затворен систем једначина који је могуће решити.

2.1 Рејнолдсове једначине и статистичко моделирање турбуленције

Рејнолдсове једначине (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes - RANS*) су засноване на Навије-Стоксовим једначинама и једначини континуитета које су почетни корак при статистичком моделирању турбуленције. Навије-Стоксове једначине за нестишљиво вискозно струјање у тензорској нотацији [19], [18], [20], [36] су приказане као:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, 2, 3; \quad \text{сабирање по } j: \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

где је изостављен члан који представља спољашње силе. Остали чланови у једначини (2.2) су:

ρ - густина флуида,

t - време,

v_i, v_j - компоненте брзине флуида,

p - притисак флуида,

μ - динамичка вискозност,

x_i, x_j - координате флуидног делића у тренутку t ,

Једначина континуитета, ако се сматра да је флуид нестишљив, може се написати у следећем облику:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

Свака променљива, ако се струјање флуида посматра преко статистички осредњених параметара, може да се представи као збир временски просечне (осредњене) вредности тог параметра и флукуације око те вредности [3], [2] (Слика 2.3):

$$v_i(x_i, t) = \bar{v}_i(x_i) + v'_i(x_i, t) \quad (2.4)$$

при чему је:

$$\bar{v}_i(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v_i(x_i, t) dt \quad (2.5)$$

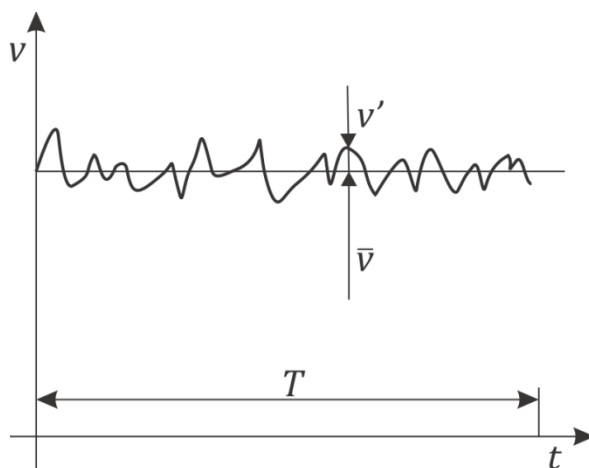
У изразу (2.4) коришћени су следећи параметри:

t - време

T - временски интервал осредњавања,

v'_i - флукуација брзине око осредњене вредности,

$\bar{v}_i(x_i)$ - осредњена вредност брзине.



Слика 2.3 Временско осредњавање брзине струјања

Ако се једначина (2.4) замени у једначину континуитета (2.3) добија се следећи израз:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{v}_i + v'_i) = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

Даљим осредњавањем израза (2.6) добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

Правилном осредњавања на већ осредњену вредност брзине имамо:

$$\bar{\bar{v}}_i = \bar{v}_i \quad (2.8)$$

За осредњавање флукуације брзине примењује се претпоставка да је просечна вредност флукуације једнака нули према [2]:

$$\bar{v}_i' = 0 \quad (2.9)$$

Једначина континуитета (2.3) након осредњавања има следећи облик:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

Навије-Стоксова једначина (2.2) осредњава се тако да се прво осредњава лева страна једначине убацавањем израза (2.4) уместо v_i . Битно је нагласити да се у овом случају сматра да је $\rho = const$.

$$\rho \left[\frac{\partial (\bar{v}_i + v_i')}{\partial t} + (\bar{v}_j + v_j') \frac{\partial (\bar{v}_i + v_i')}{\partial x_j} \right] \quad (2.11)$$

Након множења чланова у заградама следи:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \bar{v}_i + \bar{v}_j v_i' + v_j' \bar{v}_i + v_j' v_i') \right] \quad (2.12)$$

Према дефиницији осредњавања величина $\frac{\partial v_i'}{\partial t} = 0$ из једначине (2.12) не зависи од времена па је једнака нули. Израз (2.12) након сређивања има следећи облик:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\bar{v}_j \bar{v}_i} + \overline{\bar{v}_j v_i'} + \overline{v_j' \bar{v}_i} + \overline{v_j' v_i'}) \right] \quad (2.13)$$

У једначини (2.13) изрази $\overline{\bar{v}_j v_i'}$ и $\overline{v_j' \bar{v}_i}$ су једнаки нули сходно једначини (2.9) након чега се једначина (2.13) трансформише у следећи израз:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'}) \right] \quad (2.14)$$

Даљим сређивањем једначине (2.14) добија се:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j} \right] \quad (2.15)$$

Пошто проучавамо флуид који је нестишљив на основу (2.10) члан $\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j}$ једнак је нули тако да лева страна израза (2.11) има коначан облик:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} \right] \quad (2.16)$$

Десна страна Навије-Стоксове једначине (2.2) може да се прикаже на следећи начин:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu S_{ij}) \quad (2.17)$$

где је S_{ij} тензор брзине деформације представљен као:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Осредњавање притиска се врши на исти начин као и вектор брзине:

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.19)$$

Ако се изрази (2.19) и (2.4) замене у једначину (2.17) и коришћењем (2.9) добија се следећи израз:

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \bar{S}_{ij}) \quad (2.20)$$

где је:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

Комбиновањем израза (2.16) и (2.20) добија се следећа једначина:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu \bar{S}_{ij} - \rho \overline{v_i v_j}) \quad (2.22)$$

2.1.1 Бусинескова апроксимација (*Boussinesq approximation*)

Члан на десној страни једначине (2.22) $\overline{v_i v_j}$ је нелинеарни члан који је настао услед инерцијалних сила које се јављају у флуиду. Увођењем Бусинескове апроксимације за турбулентну вискозност члан $\overline{v_i v_j}$ се може представити као [1], [2]:

$$-\rho \overline{v_i v_j} = 2\mu_T \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (2.23)$$

где су:

μ_T - динамичка турбулентна вискозност (*eddy viscosity*),

k - кинетичка енергија турбуленције,

δ_{ij} - Кронекеров делта симбол.

Израз $-\rho \overline{v_i v_j}$ представља Рејнолдсове напоне који се као тензор могу представити у следећем облику:

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v_i v_j} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{v_1 v_1} & -\rho \overline{v_1 v_2} & -\rho \overline{v_1 v_3} \\ -\rho \overline{v_2 v_1} & -\rho \overline{v_2 v_2} & -\rho \overline{v_2 v_3} \\ -\rho \overline{v_3 v_1} & -\rho \overline{v_3 v_2} & -\rho \overline{v_3 v_3} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ако се Бусинескова апроксимација (2.23) замени у једначину (2.22) добија се следеће:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu \overline{S_{ij}} + 2\mu_T \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (2.25)$$

Члан $\frac{2}{3} \delta_{ij} k$ је потребан да би једначина остала коректна при контракцији леве и десне стране једначине [10]. При анализи струјних токова нестишљивих флуида сматра се да овај члан није неопходан за одређивање поља брзине па се може занемарити. Уз ову констатацију, једначина (2.25) добија следећи облик:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \tilde{S}_{ij} \right] \quad (2.26)$$

при чему је:

$$\tilde{S}_{ij} = \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.27)$$

Изрази (2.10) и (2.26) представљају Рејнолдсове осредњене Навије-Стоксове једначине (Reynolds Averaged Navier-Stokes - RANS) које су још једном написане као:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} = 0} \quad (2.28)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.29)$$

У једначини (2.29) величина μ_{eff} је ефективна динамичка вискозност и представља збир динамичке вискозности и динамичке турбулентне вискозности:

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_T \quad (2.30)$$

Динамичка турбулентна вискозност μ_T је изотропни скалар и није особина флуида већ је особина струјног поља. Вредност величине вискозности зависи од врсте струјања.

За потпуно описивање турбулентног проблема и одређивање поља брзина и притиска потребно је решити систем једначина (2.28) и (2.29) и увести одређени турбулентни модел који би на најбољи начин дефинисао одређивање μ_T .

3 Математички модели турбулентног струјања

Бусинескова хипотеза је примењена у више турбулентних модела. На основу тога колико једначина је потребно за рачунање турбулентне вискозности, турбулентни модели се могу поделити на:

- Једноједначинске турбулентне моделе као што су Спаларт-Алмарас (енг. Spalart-Allmaras), Прантлов једноједначински турбулентни модел,
- Двоједначинске турбулентне моделе као што су $k-\varepsilon$ (к-епсилон), $k-\omega$ (к-омега), који су данас стандардни модели за већину инжењерских проблема.

Сваки турбулентни модел може се представити једном општом једначином:

$$\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + \rho (P(\phi) - D(\phi)) \quad (3.1)$$

где је ϕ општа турбулентна променљива. Чланови на левој страни једначине (3.1) представљају конвективни транспорт односно материјални извод променљиве ϕ . Први члан на десној страни једначине (3.1) представља дифузивност променљиве ϕ . Функције $P(\phi)$ и $D(\phi)$ представљају продукцију и дисипацију променљиве ϕ . Чланови функције $P(\phi)$ обично зависе од вискозности или вртложности флуида. Да би одређени турбулентни проблем био решив потребна је функционална зависност између променљиве ϕ и турбулентне кинематичке вискозности ν_T .

3.1 $k-\varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел

Стандардни $k-\varepsilon$ модел је полуемпиријски модел који се заснива на транспортним једначинама за кинетичку енергију турбуленције k и дисипацију кинетичке енергије турбуленције ε . У последње две деценије стандардни $k-\varepsilon$ модел је интензивно коришћен у прорачунима турбулентних проблема. Транспортне једначине за k и ε су изведене из Навије-Стоксових једначина. Стандардни $k-\varepsilon$ модел је конципиран тако да важи само за потпуно турбулентно струјање када су ефекти молекуларне вискозности занемарљиви.

Лаундер и Спалдинг (*Launder, Spalding*) [8] су први искористили $k-\varepsilon$ модел за проучавање турбулентног струјања. На основу добијених променљивих k и ε из транспортних једначина, турбулентна динамичка вискозност μ_T се рачуна као однос ове две променљиве уз множење са одређеном константом која је добијена емпиријски. Модел има пет константи. У раду је дискутована примена зидних функција за моделирање потпуно турбулентних проблема. Друга варијанта за решавање проблема струјања близу зида је да се примени турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем (*Low-Re method*).

К-епсион ($k - \varepsilon$) турбулентни модел може да се представи следећим релацијама:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_{e1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_{e2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.3)$$

где је P_k продукција кинетичке енергије турбуленције приказана следећим изразом:

$$P_k = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (3.4)$$

Турбулентни модел $k - \varepsilon$ садржи пет константи које су одређене емпиријски:

$$C_\mu = 0.09, C_{e1} = 1.44, C_{e2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (3.5)$$

Када се турбулентне променљиве k и ε израчунају, турбулентна динамичка вискозност се може израчунати на следећи начин:

$$\mu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.6)$$

3.2 $k - \varepsilon$ (К-епсион) турбулентни модел заснован на теорији ренормализационе групе (*Renormalization group - RNG*)

Модификације $k - \varepsilon$ модела довеле су до значајних побољшања увођењем статистичких метода у прорачун. Ове методе су засноване на теорији ренормализационе групе (*Renormalization group - RNG*). Тиме се добија *RNG* $k - \varepsilon$ модел код кога је транспортна једначина за променљиву ε измењена и побољшана. Пошто је стандардни модел $k - \varepsilon$ креиран за прорачуне са високим Рејнолдсовим бројевима, *RNG* $k - \varepsilon$ модел добро решава проблеме са ниским Рејнолдсовим бројем на основу аналитичких формула имплементираних у модел преко константи [11].

Кинетичка енергија турбуленције код овог модела се рачуна на основу следеће једначине:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (3.7)$$

при чему је променљива P_k дефинисана једначином (3.4). Променљива ε израчунава се преко следеће једначине:

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.8)$$

Коефицијент $C_{2\varepsilon}^*$ се рачуна на основу релације:

$$C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (3.9)$$

где се променљива η рачуна као:

$$\eta = S \frac{k}{\varepsilon} \quad (3.10)$$

при чему је $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, док је S_{ij} тензор брзине деформације из једначине (2.18).

Остали коефицијенти у једначинама (3.7), (3.8) и (3.9) су добијени аналитички на основу *RNG* и дати су у следећој форми:

$$C_\mu = 0.0845, \quad \sigma_k = 0.7194, \quad \sigma_\varepsilon = 0.7194, \quad C_{1\varepsilon} = 1.42, \quad C_{2\varepsilon} = 1.68, \quad (3.11)$$

$$\eta_0 = 4.38, \quad \beta = 0.012$$

Упоређујући коефицијенте (3.11) и (3.5) може се видети разлика између стандардног $k-\varepsilon$ турбулентног модела и *RNG* $k-\varepsilon$ турбулентног модела.

Турбулентна динамичка вискозност се рачуна исто као и код стандардног $k-\varepsilon$ турбулентног модела на основу једначине (3.6).

3.3 $k-\varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем (*Low Reynolds number*)

Још једна модификација $k-\varepsilon$ модела довела је до бољих резултата код нумеричких проблема са ниским Рејнолдсовим бројем. У литератури има доста доступних информација у вези овог турбулентног модела [12], [9].

Овај модел може бити написан генерално у следећој форми:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \tilde{\varepsilon} \quad (3.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + (C_{e1} \rho f_1 P_k - C_{e2} \rho f_2 \tilde{\varepsilon}) \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + \rho E \quad (3.13)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ представља модификовану дисипацију кинетичке енергије турбуленције која се рачуна на следећи начин:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - D \quad (3.14)$$

Разлог за увођење ове модификације дисипације кинетичке енергије турбуленције је чисто компјутерске природе зато што постоје недостаци у постављању граничних услова близу зида за дисипацију кинетичке енергије турбуленције ε . Вредност функције D је значајна близу зида док удаљењем од зида њена вредност постаје безначајна. Транспортна једначина за $\tilde{\varepsilon}$ се решава са граничним условом да је $\tilde{\varepsilon} = 0$ на зиду, и након тога може се израчунати крајња вредност дисипације кинетичке енергије турбуленције ε на основу израза:

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D \quad (3.15)$$

Функција E у једначини (3.13) је уведена да би кинетичка енергија турбуленције била боље описана у вискозном подслоју.

Функције D и E се рачунају преко следећих емпиријских израза:

$$D = 2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right) \quad (3.16)$$

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial y^2} \right)^2 \quad (3.17)$$

где је y нормално растојање тачке од зида посматраног нумеричког проблема. Динамичка турбулентна вискозност μ_t се рачуна преко следеће једначине:

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (3.18)$$

Продукција кинетичке енергије турбуленције P_k рачуна се према изразу (3.4). У претходним једначинама константе C_{e1} , C_{e2} , C_μ , σ_k и σ_ε су исте као код стандардног $k-\varepsilon$ модела и имају вредности као у изразу (3.5). Пригушне функције f_μ , f_1 и f_2 као и функције D и E су активне само близу зида проучаваног нумеричког проблема и омогућавају да једначине $k-\varepsilon$ модела буду решиве у вискозном подслоју.

Функције f_μ , f_1 и f_2 имају следеће вредности:

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-3.4}{(1 + \text{Re}_t/50)^2}\right] \quad (3.19)$$

$$f_1 = 1.0 \quad (3.20)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp[-\text{Re}_t^2] \quad (3.21)$$

где је Re_t турбулентни Рејнолдсов број који се рачуна као:

$$\text{Re}_t = \frac{\rho k^2}{\mu \tilde{\varepsilon}} \quad (3.22)$$

3.4 $k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел

Турбулентни модел $k - \omega$ (к-омега) је један од стандардних двоједначинских модела који се користе за моделирање турбулентних проблема. Први пут $k - \omega$ модел се помиње у радовима Вилкокса (*Wilcox*) [37], [4]. Од настајања овај модел није значајније модификован.

Турбулентна динамичка вискозност се рачуна као однос кинетичке енергије турбуленције k и специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције ω :

$$\mu_T = \alpha^* \frac{k}{\omega} \quad (3.23)$$

Специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције ω је променљива која карактерише размеру турбуленције. Кинетичка енергија турбуленције k се може представити следећом једначином [10]:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta_k \rho k \omega \quad (3.24)$$

где је P_k дефинисано једначином (3.4).

Специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције ω се израчунава преко следеће једначине:

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \alpha_k \frac{\omega}{k} P_k - \beta_\omega \rho \omega^2 \quad (3.25)$$

У једначинама (3.24) и (3.25) константе α^* , α , β_ω , β_k , σ и σ^* имају следеће вредности:

$$\alpha^* = 1, \quad \alpha_k = \frac{5}{9}, \quad \beta_\omega = \frac{3}{40}, \quad \beta_k = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2} \quad (3.26)$$

У односу на $k-\varepsilon$ модел, једначине за $k-\omega$ модел се могу интегралити у комплетном струјном току укључујући и вискозни подслој. Практично овај модел се може без икаквих модификација примењивати у анализи већине турбулентних проблема.

3.5 $k-\omega$ (К-омега) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем (*Low Reynolds number*)

За симулације турбулентних проблема где су могућа прелазна струјања (из ламинарног у турбулентно и обрнуто) постоји побољшана верзија $k-\omega$ турбулентног модела. Корекција се односи на проблеме са ниским Рејнолдсовим бројем (*Low Reynolds number*) на тај начин што је модификована константа α^* из једначине (3.26).

Константа α^* се рачуна на следећи начин:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + \text{Re}_t / R_k}{1 + \text{Re}_t / R_k} \quad (3.27)$$

где је:

$$\text{Re}_t = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (3.28)$$

Остале константе из једначине (3.27) се израчунавају на следећи начин:

$$R_k = 6, \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}, \quad \beta_i = 0.072 \quad (3.29)$$

На овај начин величина α^* директно утиче на крајњи резултат турбулентне кинематичке вискозности која се рачуна на основу израза (3.23).

3.6 Спаларт-Алмарас турбулентни модел

Спаларт-Алмарас је једноједначински турбулентни модел који је настао извођењем емпиријских образаца комбинујући методе димензионе анализе. Највише је коришћен за аеродинамичка истраживања, а има примену и у турбомашинама. Овај турбулентни модел представља добар компромис између алгебарских и двоједначинских турбулентних модела.

Модел решава директно транспортну једначину за кинематску турбулентну вискозност и због тога је постао популаран за широк спектар проблема струјања флуида.

Променљива која се користи у моделу је означена као \tilde{v} и има димензију турбулентне вискозности. Означена је у литератури и као Спаларт-Алмарас променљива.

Према литератури [6], [5], [7], [38] и [39] турбулентна кинематичка вискозност може се представити следећом једначином:

$$\nu_T = \tilde{v} f_{v1} \quad (3.30)$$

где су:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \quad (3.31)$$

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{\nu} \quad (3.32)$$

Спаларт-Алмарас модел заснива се на следећој транспортној једначини:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} = P(\tilde{v}) - D(\tilde{v}) + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} (\nu + \tilde{v}) \right] + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \quad (3.33)$$

где су:

$$P(\tilde{v}) = C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{v} \quad (3.34)$$

$$D(\tilde{v}) = \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left[\frac{\tilde{v}}{d} \right]^2 \quad (3.35)$$

и представљају продукцију и дисипацију турбулентне енергије.

У једначини (3.34) \tilde{S} представља модификовану вртложност која се рачуна као:

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad (3.36)$$

Променљива S је интензитет вртложности и рачуна се на основу следећег израза:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \quad (3.37)$$

где је Ω_{ij} ротациони тензор представљен следећом једначином:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.38)$$

Остале величине у једначини (3.36) су:

- d - растојање од најближег зида
- κ - Фон-Карманова константа (Von-Karman).

Величина f_{v2} се рачуна преко следећег израза:

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (3.39)$$

док се величина f_{i2} из једначине (3.34) рачуна на следећи начин:

$$f_{i2} = C_{i3} \exp(-C_{i4} \chi^2) \quad (3.40)$$

Променљиве из једначине (3.35) могу се написати преко следећих израза:

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad (3.41)$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r) \quad (3.42)$$

$$r = \min \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, r_{\text{lim}} \right) \quad (3.43)$$

где су C_{w1} , C_{w2} , C_{w3} и C_{b1} константе. За велике вредности r , функција f_w прелази у константу тако да велике вредности r могу бити заокружене на 10.

Ако је струјање скроз турбулентно онда су величине f_{i1} и f_{i2} једнаке нули. Константе које се користе у овом турбулентном моделу су:

$$C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622, \sigma = 2/3, \kappa = 0.4187, C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1 + C_{b2})/\sigma, \quad (3.44)$$

$$C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, C_{v1} = 7.1, C_{i1} = 1, C_{i2} = 2, C_{i3} = 1.2, C_{i4} = 0.5, r_{\text{lim}} = 10$$

Да би се избегли могући нумерички проблеми величина \tilde{S} не сме никад да буде једнака нули или негативна. Гранични услови за величину \tilde{v} су да је на непокретном зиду $\tilde{v} = 0$, а ако имамо симетричан проблем онда важи $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0$.

3.7 Симулација крупних вртлога (*Large Eddy Simulation - LES*)

Симулација крупних вртлога заснива се на Бусинесковој апроксимацији која Рејнолдсове напоне апроксимира преко турбулентне динамичке вискозности μ_T :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v_i'v_j'} = 2\mu_T \overline{S_{ij}} \quad (3.45)$$

где је $\overline{S_{ij}}$ тензор брзине деформације:

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.46)$$

Првобитни приступ симулацији крупних вртлога представља *Subgrid-scale (SGS)* приступ и он је прво развијен у раду Смагоринског [15]. Код овог турбулентног модела динамичка турбулентна вискозност μ_T израчунава се преко следећег израза:

$$\mu_T = \rho (C_S \overline{\Delta})^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} = \rho (C_S \overline{\Delta})^2 |\overline{S}| \quad (3.47)$$

где је:

C_S - константа Смагоринског, обично има вредности између 0.1 и 0.2,

$\overline{\Delta}$ - мрежни филтер који представља дужинску размеру турбуленције.

За тродимензионално струјање $\overline{\Delta}$ се рачуна као:

$$\overline{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.48)$$

што у приступу моделирања коначним елементима $\overline{\Delta}$ може да представља кубни корен запремине најмањег коначног елемента.

Други приступ који је касније развијен назива се *Dynamic Subgrid-scale (DSGS) LES* модел и заснива се на раду научника *Germano* [17], а касније модификован у радовима *Lilly*-ја [40]. Код овог приступа константа Смагоринског није константа него се рачуна као променљива и карактерише је два процеса филтеровања.

Први, користи мрежни филтер примењен на Рејнолдсове једначине (2.28) и (2.29). У другом филтеровању, брзина и притисак флуида се рачунају као тест функције:

$$\frac{\partial \langle \overline{v}_i \rangle}{\partial x_j} = 0 \quad (3.49)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \langle \overline{v}_i \rangle}{\partial t} + \langle \overline{v}_j \rangle \frac{\partial \langle \overline{v}_i \rangle}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \langle \overline{v}_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) \quad (3.50)$$

где ознака $\langle \cdot \rangle$ представља примену другог процеса филтеровања коришћењем тест филтера, а T_{ij} представља тензор напона који се рачуна као:

$$T_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle \quad (3.51)$$

Ако се у обзир узму једначине (3.46) и (3.47) тензор напона може да се напише као:

$$T_{ij} = -2C \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle \quad (3.52)$$

Из претходне једначине може да се издвоји *SGS* вискозност:

$$\mu_T = 2\rho C \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \quad (3.53)$$

где је $\bar{\Delta} = 2\bar{\Delta}$.

Користећи (3.45) и (3.51) може да се напише:

$$L_{ij} = T_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle = -2CM_{ij} \quad (3.54)$$

где је:

$$M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \bar{S} \bar{S}_{ij} \rangle \quad (3.55)$$

Једначина којом се израчунава константа Смагоринског по *DSGS* моделу може да се напише као:

$$C = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (3.56)$$

Овај турбулентни модел има битне карактеристике као што су:

- турбулентна динамичка вискозност је при ламинарном струјању једнака нули,
- турбулентна динамичка вискозност може да има негативне вредности током симулације претварања енергије од малих до великих вртлога (повратни феномен),
- модел има добро асимптотско понашање близу зидова проблема.

3.8 Концепт зидних функција (*Wall functions*)

Концепт зидних функција у турбуленцији је настао из потребе да се поље брзина што боље апроксимира близу чврстих зидова. Зидне функције су полуемпиријске релације, којима се дефинише профил подужне компоненте вектора брзине у развијеном дводимензијском турбулентном граничном слоју [10].

Величине које се користе у наредним релацијама су растојање од зида, смичући напон на зиду и основне карактеристике флуида, густина и динамичка вискозност.

Уводећи појам брзине смицања $v_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ (односно тангентне брзине), обично се профил подужне брзине (паралелне са зидом) дефинише преко бездимензијске брзине $V^+ = v / v_\tau$ и бездимензијске координате $y^+ = y v_\tau / \nu = \rho y v_\tau / \mu$.

При струјању флуида поред чврстог зида уз сам зид налази се вискозни подслој ($0 < y^+ < 5$) са ламинарним распоредом брзине и доминантним вискозним напоном који је једнак напону на зиду.

Прелазна област ($5 < y^+ < 30$) представља границу између вискозног (ламинарног) и турбулентног струјања у граничном слоју, где су вискозни и турбулентни напони истог реда величине, а укупни напон остаје константан и једнак напону на зиду.

Удаљавањем од зида, повећавају се турбулентни напони на рачун вискозних напона, и у зони зидне турбуленције ($30 < y^+ < 400$) дејство вискозних сила постаје занемарљиво.

Ова три слоја чине 10-20% укупног граничног слоја и чине зону зидног тока или зону константног напона. У преосталом делу граничног слоја, или зони слободне турбуленције вискозни ефекти су занемарљиви, а турбулентни напони опадају.

Да би прорачуни били практични и да би се избегла прелазна зона коју је тешко моделирати, прихваћена је подела на вискозни подслој ($y^+ < 11,63$) и зону зидне турбуленције ($y^+ > 11,63$). У вискозном подслоју где је $\mu_T \ll \mu$, компонента бездимензијске брзине дефинисана је релацијом:

$$V^+ = y^+ \quad (3.57)$$

а у зони зидне турбуленције ($\mu_T \gg \mu$):

$$V^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \quad (3.58)$$

где је $\kappa = 0.42$, а константа $E = 9.743$.

У инжењерским прорачунима, прва тачка прорачунске мреже се обично поставља у области где је $y^+ = 20 - 40$.

Зидне функције за кинетичку енергију турбуленције и дисипацију кинетичке енергије турбуленције могу се израчунати као:

$$k = \frac{v_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3.59)$$

$$\varepsilon = \frac{v_\tau^3}{\kappa y} \quad (3.60)$$

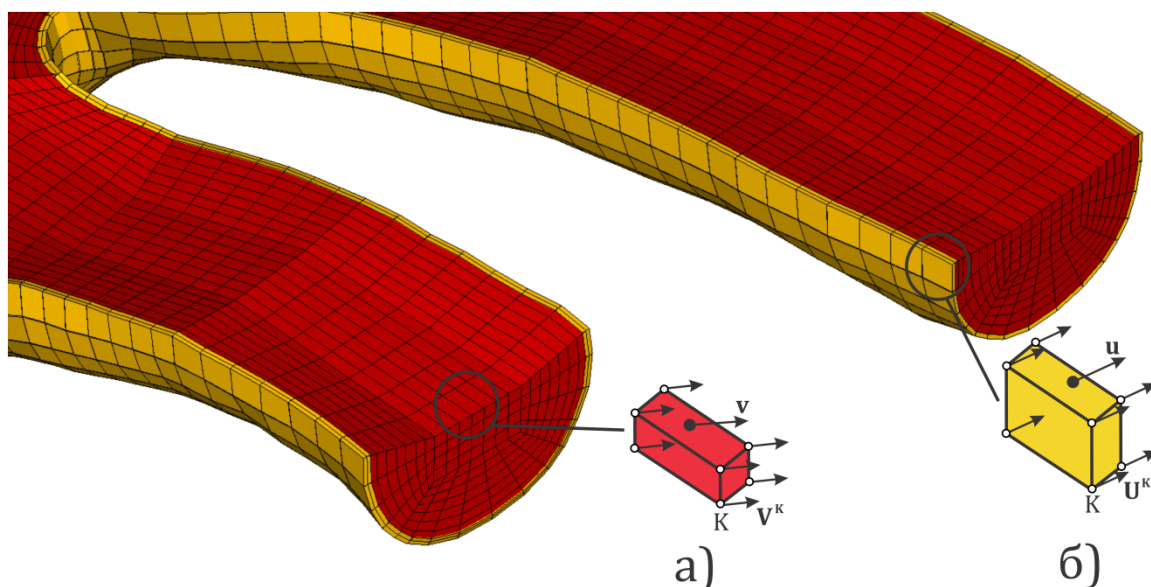
Основни недостатак зидних функција је тај што се њима унапред дефинише облик профила брзине главног тока у близини зида, и то на основу претпоставки које важе за токове типа дводимензијског граничног слоја. Алтернатива зидним функцијама је употреба модела који се могу интегралити у целом струјном домену.

4 Нумеричка имплементација турбулентних модела у методи коначних елемената

4.1 Метод коначних елемената

Метод коначних елемената - МКЕ (*Finite Element Method - FEM*) је развијен шездесетих година прошлог века. До данашњих дана МКЕ је постао толико развијен да се налази у свим сферама науке и технике.

Идеја анализе методом коначних елемената је да се просторни физички домен подели или дискретизује на поддомене који се називају коначни елементи. На слици 4.1 приказано је шематски како се тај процес одвија на примеру каротидне артерије где је посебно моделиран домен флуида односно крви, и домен солида односно крвног суда. Оба домена су подељена на коначне елементе преко којих се рачунају основне физичке величине.



Слика 4.1 Дискретизација на коначне елементе на примеру каротидне артерије: а) домен флуида (крв) и б) домен солида (крвни суд)

Поље брзина за сваки коначни елемент $\mathbf{v}(x, y, z)$ (слика 4.1а), може се апроксимирати вектором брзине $\mathbf{v}(r, s, t)$ где су r, s, t локалне координате коначног елемента [18], [20], [19]. Брзина коначног елемента може се написати преко вектора брзине у сваком чвору коначног елемента \mathbf{V} као:

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{V}, \quad v_i = \sum_{K=1}^N h_K V_i^K \equiv h_K V_i^K, \quad i = 1, 2, 3; \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

где су h_K интерполационе функције, V_i^K компоненте (x, y, z) вектора брзине за чвор K и N је укупан број чворова коначног елемента.

Поље померања за сваки коначни елемент $\mathbf{u}(x, y, z)$ (слика 4.1б), може се апроксимирати вектором померања $\mathbf{u}(r, s, t)$. Поље померања коначног елемента може се написати преко вектора померања у сваком чвору коначног елемента \mathbf{U} као:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad u_i = \sum_{K=1}^N h_K U_i^K \equiv h_K U_i^K, \quad i = 1, 2, 3; \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (4.2)$$

где су h_K интерполационе функције, U_i^K компоненте (x, y, z) вектора померања за чвор K и N је број чворова коначног елемента.

Сабирањем равнотежних једначина за сваки коначни елемент, добија се равнотежна једначина за цео солид у следећој форми [20]:

$$\mathbf{K}_{sis} \mathbf{U}_{sis} = \mathbf{F}_{sis}^s, \quad (K_{sis})_{IJ} (U_{sis})_J = (F_{sis})_I^s, \quad I, J = 1, 2, \dots, N_u, \quad \text{сума по } J \quad (4.3)$$

где је \mathbf{U}_{sis} вектор чворних померања за све чворове, \mathbf{K}_{sis} је матрица крутости целог система, \mathbf{F}_{sis}^s је вектор спољашњих сила и N_u је укупан број степена слободе система. Након добијања решења за вектор померања \mathbf{U}_{sis} , померања на нивоу сваког коначног елемента \mathbf{u} могу се израчунати на основу израза (4.2).

Генерално, МКЕ се може применити за најкомплексније проблеме почев од динамичких и нелинеарних проблема солида, струјања флуида, провођења топлоте, проблема порозности итд. У даљем тексту биће описани типови изопараметарских коначних елемената који ће бити коришћени у наставку овог рада.

4.2 Тродимензионални (3Д) изопараметарски коначни елемент

Тродимензионални (3Д) изопараметарски коначни елемент се користи за моделирање тродимензионалних тела општег облика (3Д континуума). У основи овај тип коначног елемента има обично 6 површина, а број чворова се креће од 8 до 21 у зависности да ли се ради о елементу са међучворовима или не. Под 3Д елементима се подразумевају и елементи чији су облици формираны поклапањем неких чворова тако да се добија облик призме, тетраедра или четворостране пирамиде. Овакви елементи се називају дегенерисани 3Д елементи али они неће бити разматрани у даљем тексту. Основни облик 3Д елемента приказан је на слици 4.2а, [20], [18].

Геометрија елемента и поље померања основног коначног елемента приказани су следећим једначинама:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X}, \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{K=1}^N h_K X_i^K \equiv h_K X_i^K, \quad i=1, 2, 3; \quad K=1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

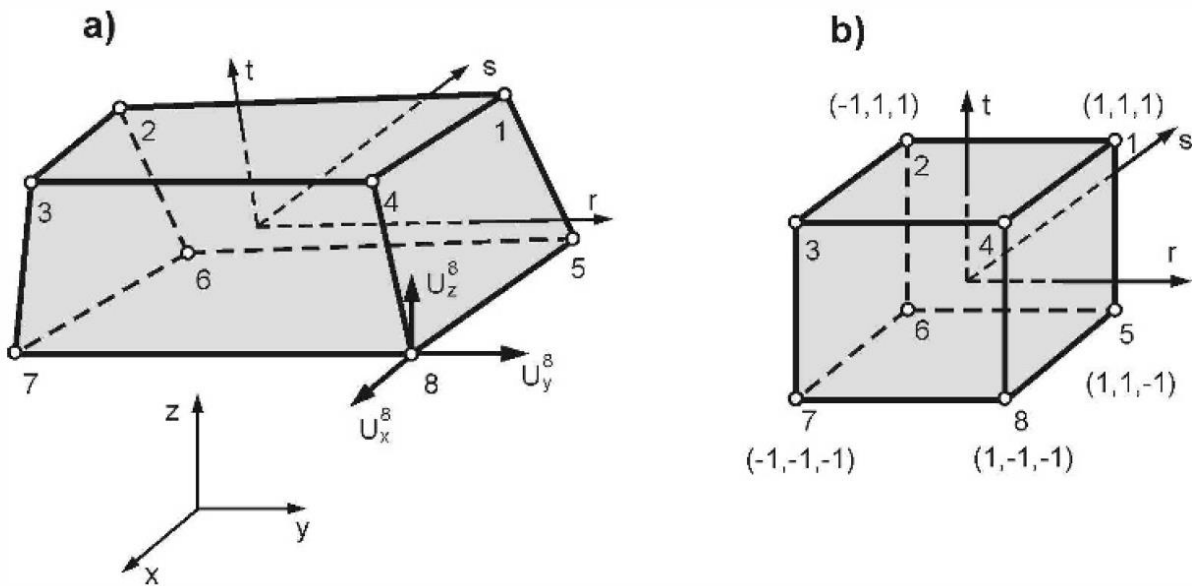
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad \text{или} \quad u_i = \sum_{K=1}^N h_K U_i^K \equiv h_K U_i^K, \quad i=1, 2, 3; \quad K=1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

где је \mathbf{x} позиција вектора материјалне тачке, а величина \mathbf{u} представља вектор померања материјалне тачке са компонентама u_1, u_2, u_3 . Вектор координата чворова и вектор чворних померања су дефинисани као:

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_1^2 X_2^2 X_3^2 \dots X_1^N X_2^N X_3^N] \quad (4.6)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 U_2^1 U_3^1 U_1^2 U_2^2 U_3^2 \dots U_1^N U_2^N U_3^N] \quad (4.7)$$

где су $X_i^1 (i=1, 2, 3)$ и U_i^1 координате и померања првог чвора, а X_i^N и U_i^N координате и померања N -тог чвора.



Слика 4.2 Тродимензионални осмочворни елемент. а) Приказ основног 3Д елемента (чворна померања су приказана само за чвор 8); б) Елемент приказан у природном координатном систему (бројеви у заградама представљају вредности природних координата за неке од чворова) [20]

Укупан број чворова коначног елемента је N и у нашем случају $N=8$. Интерполациона матрица \mathbf{H} се може приказати на следећи начин:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 \cdots 0 & h_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

где су $h_K(r, s, t)$, $K = 1, 2, \dots, 8$ интерполационе функције у природним координатама r, s, t . У случају коначног елемента са 8 чворова интерполационе функције имају следећи облик:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \\ h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) & h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \\ h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) & h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

или у следећој нотацији:

$$h_K(r, s, t) = \frac{1}{8}(1+r_K r)(1+s_K s)(1+t_K t), \quad K = 1, 2, \dots, 8 \quad (4.10)$$

где су природне координате r_K, s_K, t_K за неке од чворова дате на слици 4.2б. Природне координате чворова имају вредност 1 или -1. Интерполационе функције имају особину да је $h_K = 1$ у чвору K , док је за остале чворове $h_K = 0$. Осмочворни елемент се још зове линеарни зато што су све интерполационе функције линеарне у зависности од природних координата. Са слике 4.2а се може видети да површи коначног елемента представљају равни у физичком простору. Овај коначни елемент се из Декартовог координатног система x, y, z пресликава на коцку чије су локалне координате чворова r_i, s_i, t_i једнаке ± 1 (слика 4.2б) [41].

Изводи интерполационих функција представљају се следећом једначином:

$$h_{K,j} = \frac{\partial h_K}{\partial x_j} \quad (4.11)$$

Пошто су интерполационе функције у ствари функције природних координата r, s, t мора се применити посредно диференцирање:

$$h_{K,j} = \frac{\partial h_K}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h_K}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial h_K}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

Јакобијан трансформације између Декартовог и природног координатног система је:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

где \mathbf{r} представља вектор природних координата ($r_1 = r, r_2 = s, r_3 = t$). Инверзни јакобијан се може написати као:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial t}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Користећи претходне изразе изводи интерполационих функција (4.11) се могу написати у облику:

$$h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = J_{j1}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{j2}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} + J_{j3}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial t} \quad (4.15)$$

где је $K = 1, 2, \dots, N; i, j = 1, 2, 3$. Изводи $\frac{\partial h_k}{\partial r}$, $\frac{\partial h_k}{\partial s}$ и $\frac{\partial h_k}{\partial t}$ се рачунају диференцирањем израза (4.9). Чланови јакобијана (4.13) могу се израчунати на основу интерполације за геометрију (4.4):

$$J_{mn} = \sum_{K=1}^N \frac{\partial h_K}{\partial r_m} X_n^K \quad (4.16)$$

Претходни поступак одређивања извода функција h_k по Декартовим координатама x_i може се применити на било коју функцију природних координата. Тако је вектор извода неке функције $\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}}$ дефинисан као:

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.17)$$

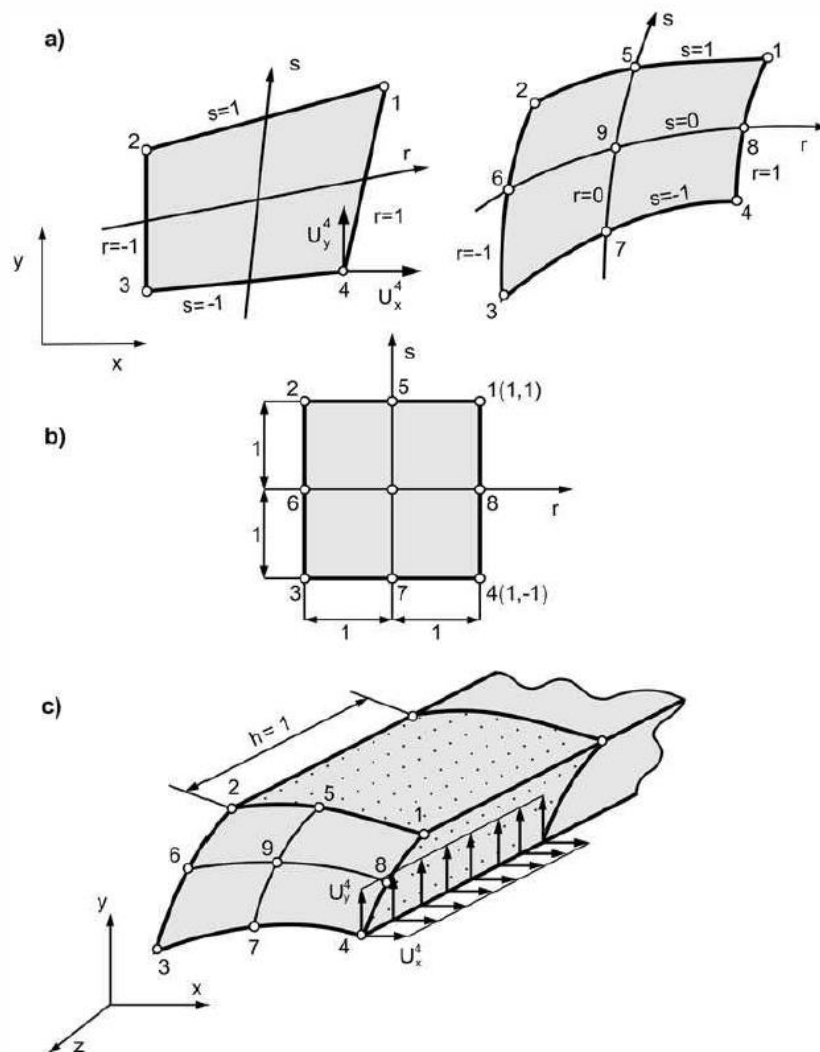
Може се дефинисати и обрнута трансформација тако да ако имамо неку функцију координата x_i , изводи по природним координатама имају следећи облик:

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.18)$$

Вредности чланова јакобијана J_{mn} се одређују нумерички, а затим се врши инверзија матрице \mathbf{J} . Инверзија је могућа само за случај несингуларне матрице \mathbf{J} . Сингуларност матрице може да се јави у случају 3Д елемента са угловима између граничних површи већих од 180° .

4.3 Дводимензионални (2Д) изопараметарски коначни елемент

Дводимензионални 2Д изопараметарски коначни елемент представља специјалан случај 3Д коначног елемента. Четворочворни и деветочворни коначни елементи су приказани на слици 4.3а. Координате чворова су дефинисане у природном координатном систему у равни (r, s) .



Слика 4.3 Дводимензионални четворочворни и деветочворни коначни елементи. а) Приказ четворочворног елемента (лево) и приказ деветочворног елемента (десно), компоненте померања су дате само за чвор 4; б) Елемент приказан у природном координатном систему; ц) Аксонометријски приказ елемента са померањима у чвору 4 и дебљином h [20]

Интерполационе функције за геометрију и померања следе директно из израза (4.4) и (4.5):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{X}, \quad \text{или} \quad x_i = \sum_{K=1}^N h_K X_i^K \equiv h_K X_i^K, \quad i=1, 2; \quad K=1, 2, \dots, N \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad \text{или} \quad u_i = \sum_{K=1}^N h_K U_i^K \equiv h_K U_i^K, \quad i=1, 2; \quad K=1, 2, \dots, N \quad (4.20)$$

где се интерполациона матрица \mathbf{H} може приказати на следећи начин:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & \dots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Вектор координата чворова и вектор чворних померања су дефинисани као:

$$\mathbf{X}^T = [X_1^1 X_2^1 X_1^2 X_2^2 \dots X_1^N X_2^N] \quad (4.22)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1^1 U_2^1 U_1^2 U_2^2 \dots U_1^N U_2^N] \quad (4.23)$$

где су $X_i^1 (i=1, 2)$ и U_i^1 координате и померања првог чвора, а X_i^N и U_i^N координате и померања N -тог чвора.

У случају коначног елемента са 4 чвора интерполационе функције имају следећи облик:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ h_2 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) & h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \end{aligned} \quad (4.24)$$

или у следећој нотацији:

$$h_K(r, s) = \frac{1}{4}(1+r_K r)(1+s_K s), \quad K=1, 2, \dots, 4 \quad (4.25)$$

Изводи интерполационих функција по координатама x и y се одређују коришћењем матрице Јакобијана. У случају 2Д елемента Јакобијан и инверзни Јакобијан имају следеће облике:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

док се компоненте J_{mn} одређују из израза (4.16)

4.4 Моделирање поља физичких величина применом МКЕ

Да би физичке проблеме струјања флуида или померања солида моделирали методом коначних елемената потребно је применити Галеркинову методу. У општем случају сваки физички закон може да се опише неком диференцијалном једначином следећег облика:

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + f^v = 0 \quad (4.28)$$

где је $\phi(x_i, t)$ физичка променљива, A и B су материјалне константе које зависе од координате x_i и променљиве ϕ , а f^v представља спољашње силе.

Основна идеја Галеркинове методе, која представља једну од тежинских метода, је да се диференцијална једначина физичког проблема помножи са интерполационом функцијом која зависи од координата и онда се цела једначина интегрални по домену физичког проблема на следећи начин:

$$\int_V h_K \left[A \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + f^v \right] dV = 0 \quad , \quad K = 1, 2, \dots, N \quad (4.29)$$

где је N је број чворова у коначном елементу, $h_K(r, s, t)$ представља интерполациону функцију, а V је запремина коначног елемента. Овде се претпоставља да се користи 3Д изопараметарски коначни елемент. Ако се сваки члан у једначини (4.29) помножи са интерполационом функцијом и интегрални по запремини V , а запреминске силе пребаце на десну страну једначине добија се:

$$\int_V h_K A \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_V h_K \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV = \int_V h_K f^v dV \quad (4.30)$$

Гаусова теорема може да се примени на други интеграл у једначини (4.30) [18], [20], тако да се овај интеграл трансформише у:

$$\int_V h_K \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV = \int_S h_K B \phi_{,i} n_i dS - \int_V B h_{K,i} \phi_{,i} dV \quad (4.31)$$

где је S површина елемента, а нотација $_{,i} \equiv \partial/\partial x_i$ се користи ради краћег записа. Члан $B\phi_{,i}n_i$ представља флуks q_S променљиве ϕ кроз површину елемента и може се још написати као:

$$F_K^S = \int_S h_K B\phi_{,i}n_i dS = \int_S h_K q_S dS \quad (4.32)$$

где је $F_K^S(t)$ површински флуks који одговара чвору K .

Даље се уводи интерполација за променљиву ϕ на следећи начин:

$$\phi = h_K \Phi^K = h_1 \Phi^1 + h_2 \Phi^2 + \dots + h_N \Phi^N \quad (4.33)$$

где су Φ^K чворне вредности променљиве ϕ . Ако се једначине (4.33) и (4.31) замене у (4.30) и користећи (4.32) добија се следећа једначина:

$$\mathbf{M}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{F}^S + \mathbf{F}^V \quad (4.34)$$

или

$$M_{KJ}\dot{\Phi}^K + K_{KJ}\Phi^K = F_K^S + F_K^V \quad (4.35)$$

где је Φ вектор чворних вредности Φ^K , $\dot{\Phi}$ је вектор извода по времену чворних вредности променљиве Φ^K , док су остале матрице и вектори приказани као:

$$\begin{aligned} M_{KJ} &= \int_V A h_K h_J dV \\ K_{KJ} &= \int_V B h_{K,i} h_{J,i} dV \\ F_K^S &= \int_S h_K q_S dS \\ F_K^V &= \int_V h_K f^V dV \end{aligned} \quad (4.36)$$

Једначина (4.34) примењена на коначне елементе представља диференцијалну једначину баланса једног коначног елемента.

За решавање диференцијалне једначине баланса коначног елемента (4.34) примениће се итеративно-инкрементални поступак. За сваки временски корак Δt , имамо прираштај генералисаног померања $\Delta\Phi$. Коришћењем услова да се убрзање променљиве ϕ може представити као:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\Phi} = \frac{1}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\Phi - {}^t\Phi) \quad (4.37)$$

и да се променљива ϕ може представити на крају корака преко текуће вредности и прираштаја, где је Δt временски корак, леви индекси ' t ' и ' $t + \Delta t$ ' означавају величине на почетку и на крају корака интеграције:

$${}^{t+\Delta t}\Phi^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\Phi^{(i-1)} + \Delta\Phi^{(i)} \quad (4.38)$$

и полазећи од познатог стања на почетку корака, долази се до једначине која одговара i -тој итерацији:

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)^{(i-1)} \Delta\Phi^i = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{S(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{V(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\Phi^{(i-1)} - \\ & \frac{1}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^{(i-1)} \left({}^{t+\Delta t}\Phi^{(i-1)} - {}^t\Phi \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

из које се може одредити прираштај $\Delta\Phi^i$ и генерализано померање променљиве Φ на основу једначине (4.38). Непознате матрице и вектори у једначини (4.39) одређују се према познатим вредностима из претходне итерације за променљиву ${}^{t+\Delta t}\Phi^{(i-1)}$. Итеративни поступак се наставља све док прираштај променљиве у чворовима $\|\Delta\Phi^{(i)}\|$ не буде мањи од задате толеранције.

4.5 Рејнолдсове једначине у методу коначних елемената

Основне једначине које се решавају при турбулентном струјању флуида су Рејнолдсове једначине које су представљене релацијама (2.28) и (2.29). Једначина (2.29) са запреминским силама може се представити у тензорској нотацији на следећи начин:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} \right) + \bar{p}_{,i} - \mu \bar{v}_{i,jj} - \mu_T \bar{v}_{i,jj} - \rho f_i^V = 0 \quad (4.40)$$

Ако се примени претходно описан Галеркинов поступак на једначину (4.40) добија се следећи израз:

$$\rho \int_V h_1 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} dV + \rho \int_V h_1 \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} dV + \int_V h_1 \bar{p}_{,i} dV - \int_V \mu h_1 \bar{v}_{i,jj} dV - \int_V \mu_T h_1 \bar{v}_{i,jj} dV - \rho \int_V h_1 f_i^V dV = 0 \quad (4.41)$$

Превођењем трећог, четвртог и петог интеграла у једначини (4.41) у збир површинског и запреминског интеграла применом Гаусовог правила:

$$\int_V h_1 \bar{p}_{,i} dV = \int_S h_1 \bar{p} n_i dS - \int_V h_{1,i} \bar{p} dV \quad (4.42)$$

$$\int_V \mu h_1 \bar{v}_{i,jj} dV = \int_S \mu h_1 \bar{v}_{i,j} n_j dS - \int_V \mu h_{1,j} \bar{v}_{i,j} dV \quad (4.43)$$

$$\int_V \mu_T h_1 \bar{v}_{i,jj} dV = \int_S \mu_T h_1 \bar{v}_{i,j} n_j dS - \int_V \mu_T h_{1,j} \bar{v}_{i,j} dV \quad (4.44)$$

добија се се следећи облик једначине (4.41):

$$\begin{aligned} & \rho \int_V h_1 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} dV + \rho \int_V h_1 \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} dV + \int_S h_1 \bar{p} n_i dS - \int_V h_{1,i} \bar{p} dV - \int_S \mu h_1 \bar{v}_{i,j} n_j dS + \int_V \mu h_{1,j} \bar{v}_{i,j} dV - \\ & - \int_S \mu_T h_1 \bar{v}_{i,j} n_j dS + \int_V \mu_T h_{1,j} \bar{v}_{i,j} dV - \rho \int_V h_1 f_i^V dV = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

У претходним једначинама користи се следећа номенклатура:

ρ - густина флуида

\bar{v}_i - осредњена брзина флуида

\bar{p} - осредњени притисак флуида

h_1 - интерполациона функција за брзину флуида

μ - динамичка вискозност флуида

μ_T - турбулентна динамичка вискозност флуида

f_i^V - запреминске силе

Површински интеграл и запреминске силе на левој страни једначине (4.45) пребацују се на десну страну тако да једначина добија следећи облик:

$$\begin{aligned} & \rho \int_V h_1 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} dV + \rho \int_V h_1 \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} dV - \int_V h_{1,i} \bar{p} dV + \int_V (\mu + \mu_T) h_{1,j} \bar{v}_{i,j} dV = \rho \int_V h_1 f_i^V dV + \\ & + \int_S h_1 [-\bar{p} n_i + (\mu + \mu_T) \bar{v}_{i,j} n_j] dS \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ако се уведу интерполационе функције за брзину флуида

$$\bar{v}_i = h_1 \bar{V}_i^1 \quad (4.47)$$

и притисак

$$\bar{p}_i = \hat{h}_1 P_1 \quad (4.48)$$

онда се једначина (4.46) трансформише у следећи облик:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \dot{\bar{V}}_i^1 + \left[\rho \int_V h_1 h_K \bar{V}_j^1 h_{1,j} dV \right] \bar{V}_i^1 - \left[\int_V h_{1,i} \hat{h}_3 dV \right] P_1 + \left[\int_V (\mu + \mu_T) h_{1,j} h_{1,j} dV \right] \bar{V}_i^1 = \\ & \rho \int_V h_1 f_i^V dV + \int_S h_1 [-\bar{p} n_i + (\mu + \mu_T) \bar{v}_{i,j} n_j] dS \end{aligned} \quad (4.49)$$

или у матричном облику:

$$[\mathbf{M}][\dot{\mathbf{V}}] + [\mathbf{K}_{vv} + \mathbf{K}_{\mu v}][\mathbf{V}] + [\mathbf{K}_{vp}][\mathbf{P}] = [\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s] \quad (4.50)$$

Вектор брзине елемента \mathbf{V} се састоји од подвектора:

$$\mathbf{V}^T = [\mathbf{V}_1^T \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_3^T] \quad (4.51)$$

где су подвектори:

$$\mathbf{V}_i^T = [\mathbf{V}_i^1 \mathbf{V}_i^2 \dots \mathbf{V}_i^N] \quad (4.52)$$

при чему је N број чворова елемента.

Матрице \mathbf{M} , \mathbf{K}_{vv} и \mathbf{K}_{vp} , као и вектор \mathbf{F}_v деле се на одговарајуће подматрице и подвекторе:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{K}_{vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{vv} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{K}_{\mu vt} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{\mu vt} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mu vt} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{K}}_{\mu vt} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{K}_{vp} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vp1} \\ \mathbf{K}_{vp2} \\ \mathbf{K}_{vp3} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{F}_v^T = [\mathbf{F}_{v1}^T \quad \mathbf{F}_{v2}^T \quad \mathbf{F}_{v3}^T] \quad (4.57)$$

$$\mathbf{F}_s^T = [\mathbf{F}_{s1}^T \quad \mathbf{F}_{s2}^T \quad \mathbf{F}_{s3}^T] \quad (4.58)$$

Компоненте ових подматрица и подвектора су:

$$(\bar{\mathbf{M}})_{II} = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.59)$$

$$(\bar{\mathbf{K}}_{vv})_{II} = \rho \int_V h_1 h_K \bar{V}_j^{-1} h_{j,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{V}_1 \mathbf{H}_{,x_1} + \mathbf{H} \mathbf{V}_2 \mathbf{H}_{,x_2} + \mathbf{H} \mathbf{V}_3 \mathbf{H}_{,x_3}) \quad (4.60)$$

$$(\bar{\mathbf{K}}_{\mu vt})_{II} = \int_V (\mu + \mu_T) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V (\mu + \mu_T) (\mathbf{H}_{,x_1}^T \mathbf{H}_{,x_1} + \mathbf{H}_{,x_2}^T \mathbf{H}_{,x_2} + \mathbf{H}_{,x_3}^T \mathbf{H}_{,x_3}) \quad (4.61)$$

$$(\mathbf{K}_{vpi})_{II} = - \int_V h_{1,i} \hat{h}_j dV = - \int_V \mathbf{H}_{,x}^T \hat{\mathbf{H}} dV \quad (4.62)$$

$$(\mathbf{F}_{vi})_I = \rho \int_V h_i f_i^V dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}_i^V dV \quad (4.63)$$

$$(\mathbf{F}_{si})_I = \int_S h_i \left[-\bar{p}n_i + (\mu + \mu_T) \bar{V}_{i,j}^{-1} n_j \right] dS = \int_S \mathbf{H}^T \left(-p\mathbf{n} + (\mu + \mu_T) \mathbf{V}_{,x} \cdot \mathbf{n} \right) dS \quad (4.64)$$

где је $(\bar{\mathbf{M}})_I$ матрица маса, $(\bar{\mathbf{K}}_{vv})_I$ конвективна матрица, $(\bar{\mathbf{K}}_{\mu vt})_I$ матрица вискозног члана, $(\mathbf{K}_{vpi})_I$ матрица градијента притиска, $(\mathbf{F}_{vi})_I$ вектор запреминских сила и $(\mathbf{F}_{si})_I$ вектор површинских сила.

Једначину (2.28) применом Галеркиновог поступка можемо написати у следећем облику:

$$\int_V \hat{h}_1 \bar{v}_{i,j} dV = 0 \quad (4.65)$$

заменом интелепоационе функције за брзину (4.47) добија се следећи израз:

$$\left[\int_V \hat{h}_1 h_{i,j} dV \right] \bar{V}_i^{-1} = 0 \quad (4.66)$$

при чему се члан у угластој загради може представити као матрица:

$$(\mathbf{K}_{vpi}^T)_I = \int_V \hat{h}_1 h_{i,j} dV \quad (4.67)$$

Једначина (4.66) у матричном облику може се представити:

$$[\mathbf{K}_{vp}^T][\mathbf{V}] = 0 \quad (4.68)$$

Ако се једначине (4.50) и (4.68) групишу заједно, добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv} + \mathbf{K}_{\mu vt} & \mathbf{K}_{vp} \\ \mathbf{K}_{vp}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Да би било могуће решити систем матричних једначина (4.69) потребно је увести почетну апроксимацију за турбулентну динамичку вискозност μ_T на основу одређеног турбулентног модела.

Систем једначина (4.69) је нелинеаран, јер се у конвективном члану појављују брзине, па се за решавање примењује инкрементално-итеративни поступак описан у поглављу 4.2.

Брзина и притисак на крају временског корака могу се израчунати преко вредности из претходне итерације и прираштаја у текућој итерацији тако да за брзину и притисак флуида имамо следеће релације:

$${}^{t+\Delta t} \bar{V}_i^I = {}^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} \quad (4.70)$$

$${}^{t+\Delta t} P_I = {}^{t+\Delta t} P_I^{(i-1)} + \Delta P_I^{(i)} \quad (4.71)$$

где је i текући број итерације.

Извод по времену променљиве \bar{V}_i^I из једначине (4.49) може се написати преко Ојлерове *forward* шеме:

$$\frac{^{t+\Delta t} \dot{\bar{V}}_i^I}{\bar{V}_i^I} = \frac{^{t+\Delta t} \bar{V}_i^I - {}^t \bar{V}_i^I}{\Delta t} = \frac{^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} - {}^t \bar{V}_i^I}{\Delta t} \quad (4.72)$$

Ако се изрази (4.70), (4.71) и (4.72) замене у једначине (4.49) и (4.66) добијају се следећи изрази:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\frac{^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} - {}^t \bar{V}_i^I}{\Delta t} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_k \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_j^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_j^{I(i)} \right) h_{3,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) - \\ & - \left[\int_V h_{1,i} \hat{h}_3 dV \right] \left(^{t+\Delta t} P_1^{(i-1)} + \Delta P_1^{(i)} \right) + \left[\int_V (\mu + \mu_T) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) = \\ & = \rho \int_V h_1 f_i^V dV + \int_S h_1 \left[-\bar{p} n_i + (\mu + \mu_T) \bar{v}_{i,j} n_j \right] dS \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\left[\int_V \hat{h}_1 h_{1,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} + \Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) = 0 \quad (4.74)$$

Након сређивања претходне две једначине добијају се итеративно-инкременталне једначине:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \frac{1}{\Delta t} \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_k \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{3,j} dV \right] \Delta \bar{V}_i^{I(i)} + \\ & + \left[\rho \int_V h_1 h_{k,j} \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} \right) h_j dV \right] \Delta \bar{V}_j^{I(i)} - \left[\int_V h_{1,i} \hat{h}_3 dV \right] \left(\Delta P_1^{(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V (\mu + {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left(\Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) = \rho \int_V h_1 f_i^V dV + \int_S h_1 \left[-\bar{p} n_i + (\mu + \mu_T) \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_j^{I(i-1)} \right)_{i,j} n_j \right] dS - \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} & - \left[\rho \frac{1}{\Delta t} \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} - {}^t \bar{V}_i^I \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_k \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{3,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} \right) - \\ & - \left[\int_V (\mu + {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} \right) - \left[\int_V h_{1,i} \hat{h}_3 dV \right] {}^{t+\Delta t} P_1^{(i-1)} \\ & \left[\int_V \hat{h}_1 h_{1,j} dV \right] \left(\Delta \bar{V}_i^{I(i)} \right) = - \left[\int_V \hat{h}_1 h_{1,j} dV \right] \left(^{t+\Delta t} \bar{V}_i^{I(i-1)} \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Једначина (4.69) сада добија следећи облик:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_v + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{vv}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mu vt}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{J}_{vv}^{(i-1)} & \mathbf{K}_{vp} \\ \mathbf{K}_{vp}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{P}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_B^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_P^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

где претходне матрице имају следећи облик:

$$(\mathbf{M}_v)_{\Omega} = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.78)$$

$${}^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{K}}_{vv})_{\Omega}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_K \left({}^{t+\Delta t} \bar{V}_j^I{}^{(i-1)} \right) h_{j,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.79)$$

$${}^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{K}}_{\mu vt})_{\Omega}^{(i-1)} = \int_V \left(\mu + {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \right) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V \left(\mu + {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \right) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.80)$$

$${}^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{J}}_{vv})_{\Omega}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_{K,j} \left({}^{t+\Delta t} \bar{V}_i^I{}^{(i-1)} \right) h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (4.81)$$

$$(\mathbf{K}_{vp})_{\Omega} = - \int_V h_{1,i} \hat{h}_j dV = - \int_V \nabla \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{H}} dV \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_B^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_v + {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_s^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M}_v)_{\Omega} \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} - {}^t \mathbf{V} \right) - \\ &- \left({}^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{K}}_{vv})_{\Omega}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} (\bar{\mathbf{K}}_{\mu vt})_{\Omega}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} - (\mathbf{K}_{vp})_{\Omega} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_P^{(i-1)} = - (\mathbf{K}_{vp})_{\Omega}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \quad (4.84)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_v = \rho \int_V h_1 {}^{t+\Delta t} f_i^V dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_i^V dV \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_s^{(i-1)} &= \int_S h_1 \left[- {}^{t+\Delta t} p^{(i-1)} n_i + (\mu + \mu_T) \left({}^{t+\Delta t} \bar{V}_j^I{}^{(i-1)} \right)_{i,j} n_j \right] dS = \\ &= \int_S \mathbf{H}^T \left(- {}^{t+\Delta t} p^{(i-1)} \mathbf{n} + (\mu + \mu_T) \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right)_{,x} \cdot \mathbf{n} \right) dS \end{aligned} \quad (4.86)$$

Динамичка турбулентна вискозност ${}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}$ на крају корака из претходне итерације се рачуна преко следећег израза у коме фигуришу две променљиве из $k - \varepsilon$ модела:

$${}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} = \rho C_{\mu} \frac{\left({}^{t+\Delta t} k^{(i-1)} \right)^2}{{}^{t+\Delta t} \varepsilon^{(i-1)}} \quad (4.87)$$

4.6 $k - \varepsilon$ (К-епсилон) турбулентни модел у методу коначних елемената

Као што је већ наведено у претходним поглављима да би се турбулентно струјање описало у потпуности потребно је увести турбулентне моделе преко којих се добија решење за турбулентну динамичку (кинематичку) вискозност.

Моделирање турбулентног струјања флуида у каналу са степеником приказано је у раду [25]. Креиран је двоједначински турбулентни модел је базиран на транспортним једначинама кинетичке енергије турбуленције и дисипације кинетичке енергије

турбуленције. Метод коначних елемената је коришћен да се изврши просторна дискретизација и варијација променљивих. Коришћени су 2Д елементи за моделирање проблема струјања. Резултати струјања флуида добијени методом коначних елемената су бољи у односу на резултате добијене методом коначних разлика.

У раду [26] приказане су технике за решавање $k-\varepsilon$ турбулентног модела преко метода коначних елемената. Поступак је уопштен за сваки двоједначински турбулентни модел. Дискретизација методом коначних елемената је базирана на *SUPG* методи (*Streamline upwind Petrov-Galerkin method*). Решени нумерички примери приказују перформансе развијених шема за симулацију стационарних струјања.

Турбулентни модели $k-\varepsilon$, $k-\tau$ и $k-\omega$ упоређени су на примеру канала са степеником (*backward facing step*) у раду [42]. Формулација приказаних турбулентних модела тежи да турбулентне варијабле остану позитивне на целом домену који се проучава и током свих итерација. Коришћење логаритамских променљивих у овом раду користи се на тај начин тако што се једна транспортна једначина за неку логаритамску променљиву може написати као линеарна комбинација транспортних једначина за неки други пар логаритамских турбулентних променљивих.

Турбулентни модел $k-\varepsilon$ са имплементацијом метода коначних елемената је приказан у раду [23]. Примењена је модификација турбулентног модела за ниске вредности Рејнолдсовог броја (*Chien's Low-Reynolds number*). Приказана је итеративна шема за решавање Рејнолдсових једначина заједно са једначинама $k-\varepsilon$ турбулентног модела. Логаритамске зидне функције су коришћене да би се описало струјање близу зида код стандардног $k-\varepsilon$ турбулентног модела. Бенчмарк пример који је решен је струјање у каналу са степеником (*backward facing step*).

Турбулентни модел $k-\varepsilon$ се састоји од две једначине (3.2) и (3.3). У даљем тексту користиће се једначине (3.12) и (3.13) које су изведене код $k-\varepsilon$ модела са ниским Рејнолдсовим бројем. Ако се једначина (3.12) напише у тензорској нотацији добија се следећи израз:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j} \right) = \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right)_{,j} + \mu_T (\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}) - \rho \tilde{\varepsilon} \quad (4.88)$$

Члан $\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}$ на десној страни једначине (4.88) може да се напише у следећем облику погоднијем за даљу имплементацију:

$$\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j} = 2(\bar{v}_{i,j})^2 \quad (4.89)$$

Увођењем помоћног параметра $\gamma = \frac{\tilde{\varepsilon}}{k}$ добија се да једначине модела не морају да буду спрегнуте међусобно, тако да једначина (4.88) добија следећи облик:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j} \right) = \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right)_{,j} + 2\mu_T (\bar{v}_{i,j})^2 - \rho \gamma k \quad (4.90)$$

Увођењем интерполационе функције за кинетичку енергију турбуленције k и интерполационе функције за осредњену брзину \bar{v}_i :

$$k = h_1 k^1 \quad (4.91)$$

$$\bar{v}_i = h_1 \bar{V}_i^1 \quad (4.92)$$

и применом Галеркиновог правила на једначину (4.88) следи:

$$\rho \int_V h_1 \frac{\partial k}{\partial t} dV + \rho \int_V h_1 \bar{v}_j k_{,j} dV = \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 (k_{,j})_{,j} dV + 2 \int_V h_1 \mu_T (\bar{v}_{i,j})^2 dV - \rho \int_V h_1 \gamma k dV \quad (4.93)$$

Први и други члан на десној страни једначине (4.93) може се превести у збир површинског и запреминског интеграла применом Гаусовог правила:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) dV &= - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} dV + \int_S \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j dS = \\ &= - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (h_1 k^1) \frac{\partial w_1}{\partial x_j} dV + \int_S \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 k_{,j} n_j dS = \\ &= - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{1,j} k^1 dV + \int_S \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 k_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.94)$$

Увођењем интерполационе функције (4.91) за кинетичку енергију турбуленције и интерполационе функције (4.92) за брзину флуида, и груписањем чланова уз k^1 , \dot{k}^1 и \bar{V}_j^1 једначина (4.93) постаје:

$$\begin{aligned} \left[\rho \int_V h_1 h_j dV \right] \dot{k}^1 + \left[\rho \int_V h_1 h_j \bar{V}_i^1 h_{1,j} dV \right] k^1 + \left[\int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{1,j} dV \right] k^1 + \\ + \left[\rho \int_V h_1 h_j \gamma dV \right] k^1 - \left[2 \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_j^1 h_{k,j} dV \right] \bar{V}_i^k = \int_S \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_1 k_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.95)$$

Претходна једначина се може представити у матричном облику као:

$$[\mathbf{M}_K][\dot{\mathbf{k}}] + [\mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\gamma][\mathbf{k}] - [\mathbf{K}_{VV1}][\mathbf{V}] = [\mathbf{F}_{SK1}] \quad (4.96)$$

при чему су матрице и вектори приказани на следећи начин:

$$(\mathbf{M}_K)_{ij} = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.97)$$

$$(\mathbf{K}_{VK})_{ij} = \rho \int_V h_1 h_j \bar{V}_i^1 h_{1,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.98)$$

$$(\mathbf{K}_M)_{ij} = \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{1,j} dV = \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.99)$$

$$(\mathbf{K}_\gamma)_{\text{II}} = \rho \int_V h_1 h_j \gamma dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} \gamma dV \quad (4.100)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{VV1}})_{\text{II}} = 2 \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_i^1 h_{k,j} dV = 2 \int_V \mu_T \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.101)$$

$$(\mathbf{F}_{\text{SK1}})_I = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \int_S \mathbf{H}^T \mathbf{k}_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.102)$$

Једначина (3.13) у тензорској нотацији гласи:

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{v}_j \tilde{\varepsilon}_{,j} \right) = \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \tilde{\varepsilon}_{,j} \right)_{,j} + C_{e1} f_1 \gamma \mu_T (\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}) - C_{e2} f_2 \rho \tilde{\varepsilon} \gamma + \rho E \quad (4.103)$$

Члан $\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}$ на десној страни једначине (4.103) може да се напише у следећем облику:

$$\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j} = 2(\bar{v}_{i,j})^2 \quad (4.104)$$

Интерполациона функција за модификовану дисипацију кинетичку енергију турбуленције $\tilde{\varepsilon}$:

$$\tilde{\varepsilon} = h_t \varepsilon^I \quad (4.105)$$

Аналогно са једначинама (4.93), (4.94) и (4.95) добија се следећи израз:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_j dV \right] \varepsilon^I + \left[\rho \int_V h_1 h_j \bar{V}_i^1 h_{1,j} dV \right] \varepsilon^I + \left[\int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{1,j} dV \right] \varepsilon^I + \left[C_{e2} f_2 \rho \int_V h_1 h_j \gamma dV \right] \varepsilon^I - \\ & - \left[2C_{e1} f_1 \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_j^1 h_{k,j} \gamma dV \right] \bar{V}_i^K - \left[2\mu \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_j^1 h_{k,j} dV \right] \bar{V}_i^K = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) \int_S h_j \varepsilon_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.106)$$

или у матричном облику:

$$[\mathbf{M}_K][\dot{\varepsilon}] + [\mathbf{K}_{\text{VK}} + \mathbf{K}_{\text{MI}} + \mathbf{K}_C][\varepsilon] - [\mathbf{K}_{\text{VVe1}} - \mathbf{K}_{\text{VVe2}}][\mathbf{V}] = [\mathbf{F}_{\text{Se}}] \quad (4.107)$$

при чему су претходне матрице и вектори приказани на следећи начин:

$$(\mathbf{K}_{\text{MI}})_{\text{II}} = \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{1,j} dV = \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.108)$$

$$(\mathbf{K}_C)_{\text{II}} = C_{e2} \rho f_2 \int_V h_1 h_j \gamma dV = C_{e2} \rho f_2 \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} \gamma dV \quad (4.109)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{VVe1}})_{\text{II}} = 2C_{e1} f_1 \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_j^1 h_{k,j} \gamma dV = 2C_{e1} f_1 \int_V \mu_T \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} \gamma dV \quad (4.110)$$

$$(\mathbf{K}_{\text{VVe2}})_{\text{II}} = 2\mu \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \bar{V}_j^1 h_{k,j} dV = 2\mu \int_V \mu_T \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.111)$$

$$(\mathbf{F}_{S\varepsilon})_I = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) \int_S h_j \varepsilon_{,j} n_j dS = \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_E} \right) \int_S \mathbf{H}^T \varepsilon_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.112)$$

Ако се једначине (4.96) и (4.107) групишу заједно добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_K & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{VV1} & \mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\gamma & 0 \\ -\mathbf{K}_{VV\varepsilon1} - \mathbf{K}_{VV\varepsilon2} & 0 & \mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_{M1} + \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{k} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{SK1} \\ \mathbf{F}_{S\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Турбулентна динамичка вискозност се израчунава на основу познатих вредности за кинетичку енергију турбуленције k и модификовану дисипацију кинетичке енергије турбуленције $\tilde{\varepsilon}$ као:

$$\mu_T = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (4.114)$$

Релација $\gamma = \frac{\tilde{\varepsilon}}{k}$ израчунава се у сваком кораку инкрементално-итеративног поступка, при чему се вредности за k и $\tilde{\varepsilon}$ узимају из претходног корака. Потребно је напоменути да величине μ_T , k и $\tilde{\varepsilon}$ на почетку прорачуна имају почетне вредности које се добијају на основу познате геометрије проблема. Константе C_μ , C_{e1} , C_{e2} , σ_k и σ_ε се користе из израза (3.5).

Ако се заједно спрегну једначине из Рејнолдсове формулације (4.69) и $k - \varepsilon$ једначина (4.113) добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{VV} + \mathbf{K}_{\mu V} & \mathbf{K}_{VP} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{VP}^T & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{VV1} & 0 & \mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\gamma & 0 \\ -\mathbf{K}_{VV\varepsilon1} - \mathbf{K}_{VV\varepsilon2} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_{M1} + \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{k} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S \\ 0 \\ \mathbf{F}_{SK1} \\ \mathbf{F}_{S\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

4.6.1 Инкрементално-итеративни поступак за $k - \varepsilon$ (K-епсион) турбулентни модел са ниским Рејнолдсовим бројем

Систем једначина (4.113) је нелинеаран, па се за решавање примењује инкрементално-итеративни поступак описан у поглављу 4.2.

Кинетичка енергија турбуленције k , дисипација кинетичке енергије турбуленције ε и брзина флуида v на крају временског корака могу се израчунати преко вредности из претходне итерације и прираштаја у текућој итерацији тако да имамо следеће релације:

$${}^{t+\Delta t}k^I = {}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \quad (4.116)$$

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon^I = {}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta \varepsilon^{I(i)} \quad (4.117)$$

$${}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^I = {}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \quad (4.118)$$

где је i текући број итерације.

Извод по времену променљивих k^I , ε^I и \overline{V}_i^I може се написати преко Ојлерове *forward* шеме:

$${}^{t+\Delta t}\dot{k}^I = \frac{{}^{t+\Delta t}k^I - {}^t k^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} - {}^t k^I}{\Delta t} \quad (4.119)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\varepsilon}^I = \frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon^I - {}^t \varepsilon^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta\varepsilon^{I(i)} - {}^t \varepsilon^I}{\Delta t} \quad (4.120)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\overline{V}}_i^I = \frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^I - {}^t \overline{V}_i^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} - {}^t \overline{V}_i^I}{\Delta t} \quad (4.121)$$

Ако се изрази (4.116), (4.117), (4.118) (4.119), (4.120) и (4.121) замене у једначине (4.96) и (4.107) добијају се следећи изрази:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} - {}^t k^I}{\Delta t} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t}\gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_j^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_j^{I(i)} \right) = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta\varepsilon^{I(i)} - {}^t \varepsilon^I}{\Delta t} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta\varepsilon^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta\varepsilon^{I(i)} \right) + \left[C_{e2} \rho {}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t}\gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)} + \Delta\varepsilon^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t}\gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_j^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_j^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2\mu \int_V \mu_T h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_j^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_j^{I(i)} \right) = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) \int_S h_3 \varepsilon_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.123)$$

при чему се у једначинама (4.122) и (4.123) релације ${}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t}\gamma^{(i-1)}$ и ${}^{t+\Delta t}f_2^{(i-1)}$ израчунавају на следећи начин:

$${}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} = \rho C_\mu {}^{t+\Delta t}f_\mu^{(i-1)} \frac{\left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} \right)^2}{{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)}} \quad (4.124)$$

$${}^{t+\Delta t}\gamma^{(i-1)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon^{I(i-1)}}{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)}} \quad (4.125)$$

$${}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} = 1 - 0.3 \exp\left(-\left({}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i-1)}\right)^2\right) \quad (4.126)$$

У изразу (4.124) величина ${}^{t+\Delta t} f_\mu^{(i-1)}$ се рачуна према следећем изразу:

$${}^{t+\Delta t} f_\mu^{(i-1)} = \exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + {}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i-1)} / 50\right)^2}\right] \quad (4.127)$$

где се ${}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i-1)}$ израчунава као:

$${}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i-1)} = \frac{\rho \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)}\right)^2}{\mu \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)}} \quad (4.128)$$

Након сређивања једначина (4.122) и (4.123), добијају се итеративно-инкременталне једначине:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_{3,y} \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) h_1 dV \right] \left(\Delta \overline{V}_i^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] (\Delta k^{I(i)}) - \\ & - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_j^{I(i)} \right) - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_i^{I(i)} \right) = \\ & = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS - \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} - {}^t k^I \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) - \\ & - \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) + \\ & + \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] (\Delta \varepsilon^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] (\Delta \varepsilon^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_{3,y} \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)} \right) h_1 dV \right] \left(\Delta \overline{V}_i^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] (\Delta \varepsilon^{I(i)}) + \left[C_{e2} \rho {}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] (\Delta \varepsilon^{I(i)}) - \\ & - \left[2 C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_j^{I(i)} \right) - \left[2 C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_i^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2 \mu \int_V \mu_T h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_j^{I(i)} \right) - \left[2 \mu \int_V \mu_T h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\Delta \overline{V}_i^{I(i)} \right) = \\ & = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) \int_S h_1 \varepsilon_{,j} n_j dS - \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)} - {}^t \varepsilon^I \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_3 \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)} \right) - \\ & - \left[\int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)} \right) - \left[C_{e2} \rho {}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} \int_V h_1 h_3 {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \varepsilon^{I(i-1)} \right) + \\ & + \left[2 C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) + \left[2 \mu \int_V \mu_T h_1 h_{3,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) \end{aligned} \quad (4.130)$$

Једначине (4.129) и (4.130) у матричном облику су:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{KV}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VVK}}^{(i-1)} & \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\mathbf{K}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{M}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\gamma}^{(i-1)} & 0 \\ + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{KV}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VVK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VVK}}^{(i-1)} & 0 & \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}_{\mathbf{K}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{M}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\mathbf{C}}^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{k}^{(i)} \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\mathbf{V}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\mathbf{K}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (4.131)$$

где су претходне матрице написане као:

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{K}})_{\mathbb{U}} = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.132)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{VK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{1,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.133)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{M}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) (\nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H}) dV \quad (4.134)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\gamma})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_j {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \quad (4.135)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{M1}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) (\nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H}) dV \quad (4.136)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{C}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = C_{e2} \rho {}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} \int_V h_1 h_j {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV = C_{e2} \rho {}^{t+\Delta t} f_2^{(i-1)} \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \quad (4.137)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{KV}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_{j,y} \left({}^{t+\Delta t} k^{1(i-1)} \right) h_1 dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (4.138)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{VVK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = -4 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} dV = -4 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.139)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{V}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_{j,y} \left({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{1(i-1)} \right) h_1 dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (4.140)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{VVe}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = -4 C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV = -4 C_{e1} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \quad (4.141)$$

$${}^{t+\Delta t}(\mathbf{K}_{\mathbf{Vv}\mu})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = -4 \mu \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} dV = -4 \mu \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.142)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{V}}^{(i-1)} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{Vv1}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{Vv}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{Vv}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{2}}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \quad (4.143)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{K}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\mathbf{SK}}^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M}_{\mathbf{K}})_{\mathbb{U}} \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} - \mathbf{k} \right) - \left({}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{VK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{M}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\gamma})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \quad (4.144)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M}_{\mathbf{K}})_{\mathbb{U}} \left({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} - \boldsymbol{\varepsilon} \right) - \left({}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{VK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{M1}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{C}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} \quad (4.145)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}_{\mathbf{SK1}})_{\mathbb{I}}^{(i-1)} = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) \int_S h_1 \left({}^{t+\Delta t} k^{(i-1)} \right)_{,j} n_j dS = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_k} \right) \int_S \mathbf{H}^T \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \right)_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.146)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}_{\text{se}})_I^{(i-1)} = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) \int_S h_j \left({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} \right)_{,j} n_j dS = \left(\mu + \frac{{}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}}{\sigma_E} \right) \int_S \mathbf{H}^T \left({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} \right)_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.147)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{vvi}})_U^{(i-1)} = 2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} dV = 2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.148)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{vvel}})_U^{(i-1)} = 2 C_{el} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV = 2 C_{el} f_1 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \gamma^{(i-1)} dV \quad (4.149)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{vvel}})_U^{(i-1)} = 2 \mu \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{(i-1)} \right) h_{k,j} dV = 2 \mu \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.150)$$

Динамичка турбулентна вискозност на крају корака у текућој итерацији рачуна се као:

$${}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i)} = \rho C_\mu {}^{t+\Delta t} f_\mu^{(i)} \frac{\left({}^{t+\Delta t} k^{(i)} \right)^2}{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}} \quad (4.151)$$

У изразу (4.151) величина ${}^{t+\Delta t} f_\mu^{(i)}$ се рачуна према следећем изразу:

$${}^{t+\Delta t} f_\mu^{(i)} = \exp \left[\frac{-3.4}{\left(1 + {}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i)} / 50 \right)^2} \right] \quad (4.152)$$

где се ${}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i)}$ израчунава као:

$${}^{t+\Delta t} \text{Re}_t^{(i)} = \frac{\rho \left({}^{t+\Delta t} k^{(i)} \right)^2}{\mu {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}} \quad (4.153)$$

4.7 $k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел у методу коначних елемената

Као што је већ речено једначине за $k - \omega$ турбулентни модел могу се интегралити у комплетном струјном току укључујући и вискозни подслој. То значи да се овај модел може примењивати у анализи већине турбулентних проблема као што су струјање преко аеродинамичких профила, струјање у међулопатичним органима турбомашина, и уопште може бити примењен на било који проблем струјања са високим Рејнолдсовим бројем.

Турбулентни модел $k - \omega$ заједно са РАНС једначинама проучаван је у раду [21]. Приказан је детаљан опис нумеричког алгоритма за дискретизацију путем испрекидане Галеркинове методе (*Discontinuous Galerkin method*). Посебно је наглашена дискретизација вискозних чланова турбулентно модела $k - \omega$. За решавање нумеричког алгоритма је коришћена имплицитна Рунге-Кута шема другог реда. На крају рада дати су верификациони примери за струјање преко равне плоче и струјање преко лопатица турбине.

У раду [43] турбулентни модел $k - \omega$ спрегнут са РАНС једначинама је примењен за прорачун струјања флуида на аеропрофилу *NACA0012*. У зависности од нападног угла и

Рејнолдсовог броја добијени су резултати који се добро поклапају са експерименталним резултатима. Развијени модел је примењен на реалан проблема струјања флуида у ветротурбини са ротирајућом вертикалном осом.

Једначина за кинетичку енергију турбуленције k турбулентног модела $k-\omega$ се изводи тако што се једначина (3.24) помножи са густином ρ и напише у тензорској нотацији као:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j} \right) = (\mu k_{,j})_{,j} + (\sigma^* \mu_T k_{,j})_{,j} + \mu_T (\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}) - \beta_k \rho k \omega \quad (4.154)$$

Члан $\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j}$ на десној страни једначине (4.154) може да се напише у следећем облику погоднијем за даљу имплементацију:

$$\bar{v}_{i,jj} \cdot \bar{v}_{i,j} = 2(\bar{v}_{i,j})^2 \quad (4.155)$$

Увођењем помоћног параметра $\theta = \frac{\omega}{k}$ добија се да једначине модела не морају да буду спрегнуте међусобно, тако да претходна једначина добија следећи облик:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j k_{,j} \right) = ((\mu + \sigma^* \mu_T) k_{,j})_{,j} + 2\mu_T (\bar{v}_{i,j})^2 - \beta_k \rho k^2 \theta \quad (4.156)$$

Ако се уведе интерполациона функција за k и интерполациона функција за \bar{v}_i :

$$k = h_1 k^1 \quad (4.157)$$

$$\bar{v}_i = h_1 \bar{V}_i^1 \quad (4.158)$$

и примени Галеркинов поступак на једначину (4.156) добија се следећи израз:

$$\begin{aligned} \rho \int_V h_1 \frac{\partial k}{\partial t} dV + \rho \int_V h_1 \bar{v}_j k_{,j} dV &= \int_V (\mu + \sigma^* \mu_T) h_1 (k_{,j})_{,j} dV + \\ + 2 \int_V \mu_T h_1 (\bar{v}_{i,j})^2 dV - \rho \beta_k \int_V h_1 k^2 \theta dV \end{aligned} \quad (4.159)$$

Применом Гаусовог правила и груписањем површинских интеграла на десну страну једначине добија се следеће:

$$\begin{aligned} \left[\rho \int_V h_1 h_1 dV \right] \dot{k}^1 + \left[\rho \int_V h_1 h_1 \bar{V}_i^1 h_{1,j} dV \right] k^1 + \left[\int_V (\mu + \sigma^* \mu_T) h_{1,j} h_{1,j} dV \right] k^1 + \\ + \left[\rho \beta_k \theta \int_V h_1 h_1 h_K k^J dV \right] k^1 - \left[2 \int_V \mu_T h_1 h_{1,j} \bar{V}_i^1 h_{K,j} dV \right] \bar{V}_i^K = (\mu + \sigma^* \mu_T) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.160)$$

Претходна једначина се може представити у матричном облику као:

$$[\mathbf{M}_K][\dot{\mathbf{k}}] + [\mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_{MK} + \mathbf{K}_{\beta K}][\mathbf{k}] - [\mathbf{K}_{VV1}][\mathbf{V}] = \mathbf{F}_{SK2} \quad (4.161)$$

где су матрице и вектори дефинисани као:

$$(\mathbf{M}_K)_U = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.162)$$

$$(\mathbf{K}_{VK})_U = \rho \int_V h_1 h_j \overline{V_i^j} h_{1,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.163)$$

$$(\mathbf{K}_{MK})_U = \int_V (\mu + \sigma^* \mu_T) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V (\mu + \sigma^* \mu_T) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.164)$$

$$(\mathbf{K}_{\beta k})_U = \rho \beta_k \theta \int_V h_1 h_j h_k k^j dV = \rho \beta_k \theta \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}\mathbf{k}) dV \quad (4.165)$$

$$(\mathbf{K}_{VV1})_U = 2 \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \overline{V_i^j} h_{k,j} dV = 2 \int_V \mu_T \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H}\mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.166)$$

$$(\mathbf{F}_{SK2})_I = (\mu + \sigma^* \mu_T) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS = (\mu + \sigma^* \mu_T) \int_S \mathbf{H}^T \mathbf{k}_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.167)$$

Једначина за специфичну дисипацију кинетичке енергије турбуленције ω се изводи тако што се једначина (3.25) помножи са густином ρ и напише у тензорској нотацији као:

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \overline{v_j} \omega_{,j} \right) = (\mu \omega_{,j})_{,j} + (\sigma \mu_T \omega_{,j})_{,j} + \alpha_k \frac{\omega}{k} \mu_T (\overline{v_{i,jj}} \cdot \overline{v_{i,j}}) - \beta_\omega \rho \omega^2 \quad (4.168)$$

Члан $\overline{v_{i,jj}} \cdot \overline{v_{i,j}}$ на десној страни једначине (4.168) може да се напише у следећем облику погоднијем за даљу имплементацију:

$$\overline{v_{i,jj}} \cdot \overline{v_{i,j}} = 2(\overline{v_{i,j}})^2 \quad (4.169)$$

Интерполациона функција за специфичну дисипацију кинетичке енергије турбуленције ω може да се напише као:

$$\omega = h_1 \omega^I \quad (4.170)$$

Применом Галеркиновог поступка на једначину (4.168) и груписањем површинског интеграла на десну страну једначине, добија се следећи израз:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_j dV \right] \dot{\omega}^I + \left[\rho \int_V h_1 h_j \overline{V_i^j} h_{1,j} dV \right] \omega^I + \left[\int_V (\mu + \sigma \mu_T) h_{1,j} h_{j,j} dV \right] \omega^I + \\ & + \left[\rho \beta_\omega \int_V h_1 h_j h_k \omega^j dV \right] \omega^I - \left[2 \alpha_k \theta \mu_T \int_V \mu_T h_1 h_{j,j} \overline{V_i^j} h_{k,j} dV \right] \overline{V_i^k} = (\mu + \sigma \mu_T) \int_S h_1 \omega_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.171)$$

Претходна једначина се може представити у матричном облику као:

$$[\mathbf{M}_K][\dot{\boldsymbol{\omega}}] + [\mathbf{K}_{VK} + \mathbf{K}_{M\omega} + \mathbf{K}_{\beta\omega}][\boldsymbol{\omega}] - [\mathbf{K}_{VV2}][\mathbf{V}] = \mathbf{F}_{S\omega} \quad (4.172)$$

Матрице \mathbf{M}_K и \mathbf{K}_{VK} су дефинисане једначинама (4.162), (4.163), док су остале матрице и вектори дефинисани као:

$$(\mathbf{K}_{\mathbf{M}\omega})_{\text{II}} = \left[\int_V (\mu + \sigma\mu_T) h_{1,j} h_{1,j} dV \right] = \int_V (\mu + \sigma\mu_T) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.173)$$

$$(\mathbf{K}_{\beta\omega})_{\text{II}} = \rho\beta_\omega \int_V h_1 h_1 h_k \omega^j dV = \rho\beta_\omega \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}\omega) dV \quad (4.174)$$

$$(\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}2})_{\text{II}} = 2\alpha_k \theta \mu_T \int_V h_1 h_{1,j} \overline{V_i^j} h_{k,j} dV = 2\alpha_k \theta \mu_T \int_V \mathbf{H}^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{V}) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.175)$$

$$(\mathbf{F}_{\mathbf{S}\omega})_{\text{I}} = (\mu + \sigma\mu_T) \int_S h_1 \omega_{,j} n_j dS = (\mu + \sigma\mu_T) \int_S \mathbf{H}^T \omega_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.176)$$

Ако се једначине (4.161) и (4.172) групишу заједно добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{K}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}1} & \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\mathbf{M}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\beta\mathbf{k}} & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}2} & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\mathbf{M}\omega} + \mathbf{K}_{\beta\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{k} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\mathbf{K}2} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\omega} \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

Релација $\theta = \frac{\omega}{k}$ израчунава се у сваком кораку инкрементално-итеративног поступка, при чему се вредности за ω и k узимају из претходног корака. Турбулентна динамичка вискозност код овог турбулентног модела се рачуна преко израза:

$$\mu_T = \alpha^* \rho \frac{k}{\omega} \quad (4.178)$$

Променљиве μ_T , k и ω на почетку прорачуна имају почетне вредности које се добијају на основу познате геометрије проблема. Константе α^* , α_k , β_k , β_ω , σ и σ^* се узимају из израза (3.26).

Ако се заједно спрегну једначине из Рејнолдсове формулације (4.69) и $k - \omega$ једначина (4.177) добија се систем матричних једначина:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{V}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{K}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} + \mathbf{K}_{\mu\mathbf{V}T} & \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{P}} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{P}}^T & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}1} & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\mathbf{M}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\beta\mathbf{k}} & 0 \\ -\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}2} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{\mathbf{M}\omega} + \mathbf{K}_{\beta\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{k} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{V}} + \mathbf{F}_{\mathbf{S}} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\mathbf{K}2} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{S}\omega} \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

4.7.1 Инкрементално-итеративни поступак за $k - \omega$ (К-омега) турбулентни модел

Систем једначина (4.177) је нелинеаран, па се за решавање примењује инкрементално-итеративни поступак описан у поглављу 4.2.

Кинетичка енергија турбуленције k , специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције ω и брзина флуида v на крају временског корака могу се израчунати преко вредности из претходне итерације и прираштаја у текућој итерацији тако да имамо следеће релације:

$${}^{t+\Delta t}k^I = {}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \quad (4.180)$$

$${}^{t+\Delta t}\omega^I = {}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} \quad (4.181)$$

$${}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^I = {}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} \quad (4.182)$$

где је i текући број итерације.

Извод по времену променљивих k^I , ω^I и \overline{V}_i^I може се написати преко Ојлерове *forward* шеме:

$${}^{t+\Delta t}\dot{k}^I = \frac{{}^{t+\Delta t}k^I - {}^t k^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} - {}^t k^I}{\Delta t} \quad (4.183)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\omega}^I = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega^I - {}^t \omega^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} - {}^t \omega^I}{\Delta t} \quad (4.184)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\overline{V}}_i^I = \frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^I - {}^t \overline{V}_i^I}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)} - {}^t \overline{V}_i^I}{\Delta t} \quad (4.185)$$

Ако се изрази (4.180), (4.181), (4.182), (4.183), (4.184) и (4.185) замене у једначине (4.161) и (4.172) добијају се следећи изрази:

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} - {}^t k^I}{\Delta t} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_j \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)}}{\Delta t} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) + \left[\rho \beta_k \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) dV \right] \left({}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)} + \Delta k^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)}}{\Delta t} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_j^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_j^{I(i)}}{\Delta t} \right) = (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.186)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho \int_V h_1 h_3 dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} - {}^t \omega^I}{\Delta t} \right) + \left[\rho \int_V h_1 h_j \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)}}{\Delta t} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} \right) + \\ & + \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{3,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} \right) + \left[\rho \beta_\omega \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} \right) dV \right] \left({}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)} + \Delta\omega^{I(i)} \right) - \\ & - \left[2 \alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{3,j} \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_i^{I(i)}}{\Delta t} \right) h_{k,j} dV \right] \left(\frac{{}^{t+\Delta t}\overline{V}_j^{I(i-1)} + \Delta\overline{V}_j^{I(i)}}{\Delta t} \right) = \\ & = (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}) \int_S h_1 \omega_{,j} n_j dS \end{aligned} \quad (4.187)$$

при чему се у једначинама (4.186) и (4.187) релације ${}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)}$ и ${}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)}$, израчунавају као:

$${}^{t+\Delta t}\mu^{(i-1)} = \alpha^* \rho \frac{{}^{t+\Delta t}k^{I(i-1)}}{{}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)}} \quad (4.188)$$

$${}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\omega^{I(i-1)}}{{}^{t+\Delta t}k^{I(i)}} \quad (4.189)$$

Након сређивања једначина (4.186) и (4.187), добијају се итеративно-инкременталне једначине:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V h_1 h_j dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) h_1 dV \right] (\Delta \overline{V}_i^{I(i)}) + \\
& + \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{j,j} dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \left[\rho \beta_k {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) dV \right] (\Delta k^{I(i)}) + \\
& + \left[\rho \beta_k {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) dV \right] (\Delta k^{J(i)}) - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] (\Delta \overline{V}_j^{I(i)}) - \\
& - \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{k,i} dV \right] (\Delta \overline{V}_i^{I(i)}) = (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS - \\
& - \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V h_1 h_j dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} - {}^t k^I \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) - \\
& - \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{j,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) - \left[\rho \beta_k {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) dV \right] \left({}^{t+\Delta t} k^{I(i-1)} \right) + \\
& + \left[2 \int_V {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.190}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V h_1 h_j dV \right] (\Delta \omega^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] (\Delta \omega^{I(i)}) + \left[\rho \int_V h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) h_1 dV \right] (\Delta \overline{V}_i^{I(i)}) + \\
& + \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{j,j} dV \right] (\Delta \omega^{I(i)}) + \left[\rho \beta_\omega \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) dV \right] (\Delta \omega^{I(i)}) + \left[\rho \beta_\omega \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) dV \right] (\Delta \omega^{J(i)}) - \\
& - \left[2 \alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] (\Delta \overline{V}_j^{I(i)}) - \left[2 \alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right) h_{k,i} dV \right] (\Delta \overline{V}_i^{I(i)}) = \\
& = (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) \int_S h_1 \omega_{,j} n_j dS - \left[\frac{1}{\Delta t} \rho \int_V w_1 w_j dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} - {}^t \omega^I \right) - \left[\rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) - \\
& - \left[\int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{j,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) - \left[\rho \beta_\omega \int_V h_1 h_j h_k \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \omega^{I(i-1)} \right) + \\
& + \left[2 \alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t} \theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{k,j} dV \right] \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_j^{I(i-1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.191}$$

Једначине (4.190) и (4.191) у матричном облику су:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{KV}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{VVK}}^{(i-1)} & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_{\mathbf{K}} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{MK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{PK}}^{(i-1)} & 0 \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{OV}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{VOO}}^{(i-1)} & 0 & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_{\mathbf{K}} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{MO}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{PO}}^{(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{V}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{k}^{(i)} \\ \Delta \omega^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{V}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{K}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\omega}^{(i-1)} \end{Bmatrix} \tag{4.192}$$

где су претходне матрице написане као:

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{K}})_{\mathbb{U}} = \rho \int_V h_1 h_j dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \tag{4.193}$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{VK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_j \left({}^{t+\Delta t} \overline{V}_i^{I(i-1)} \right) h_{1,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} {}^{t+\Delta t} \mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \tag{4.194}$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\mathbf{MK}})_{\mathbb{U}}^{(i-1)} = \int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) h_{1,j} h_{j,j} dV = \int_V (\mu + \sigma^* {}^{t+\Delta t} \mu_T^{(i-1)}) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \tag{4.195}$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\beta\mathbf{k}})_{\text{II}}^{(i-1)} = 2\rho\beta_k {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} \int_V h_1 h_k h_1 \left({}^{t+\Delta t}k^{\text{J}(i-1)} \right) dV = 2\rho\beta_k {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} \right) dV \quad (4.196)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{Mo}})_{\text{II}}^{(i-1)} = \int_V \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) h_{1,j} h_{1,j} dV = \int_V \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) \nabla \mathbf{H}^T \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.197)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\beta\omega})_{\text{II}}^{(i-1)} = 2\rho\beta_\omega \int_V h_1 h_k h_j \left({}^{t+\Delta t}\omega^{\text{J}(i-1)} \right) dV = 2\rho\beta_\omega \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} \right) dV \quad (4.198)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{KV}})_{\text{II}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t}k^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (4.199)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{VVK}})_{\text{II}}^{(i-1)} = -4 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = -4 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.200)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\omega\mathbf{V}})_{\text{II}}^{(i-1)} = \rho \int_V h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t}\omega^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = \rho \int_V \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} \right) \mathbf{H} dV \quad (4.201)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{VVo}})_{\text{II}}^{(i-1)} = -4\alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = -4\alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.202)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{SK2}}^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M}_{\mathbf{k}})_{\text{II}} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} - {}^t\mathbf{k} \right) - \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{MK}}^{(i-1)} + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\beta\mathbf{k}}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} \quad (4.203)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\omega}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{So}}^{(i-1)} - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{M}_{\omega})_{\text{II}} \left({}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} - {}^t\omega \right) - \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{VK}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{Mo}}^{(i-1)} + \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\beta\omega}^{(i-1)} \right) {}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} \quad (4.204)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_{\mathbf{V}}^{(i-1)} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{VV1}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\text{VV2}}^{(i-1)} \right) ({}^{t+\Delta t}) \mathbf{V}^{(i-1)} \quad (4.205)$$

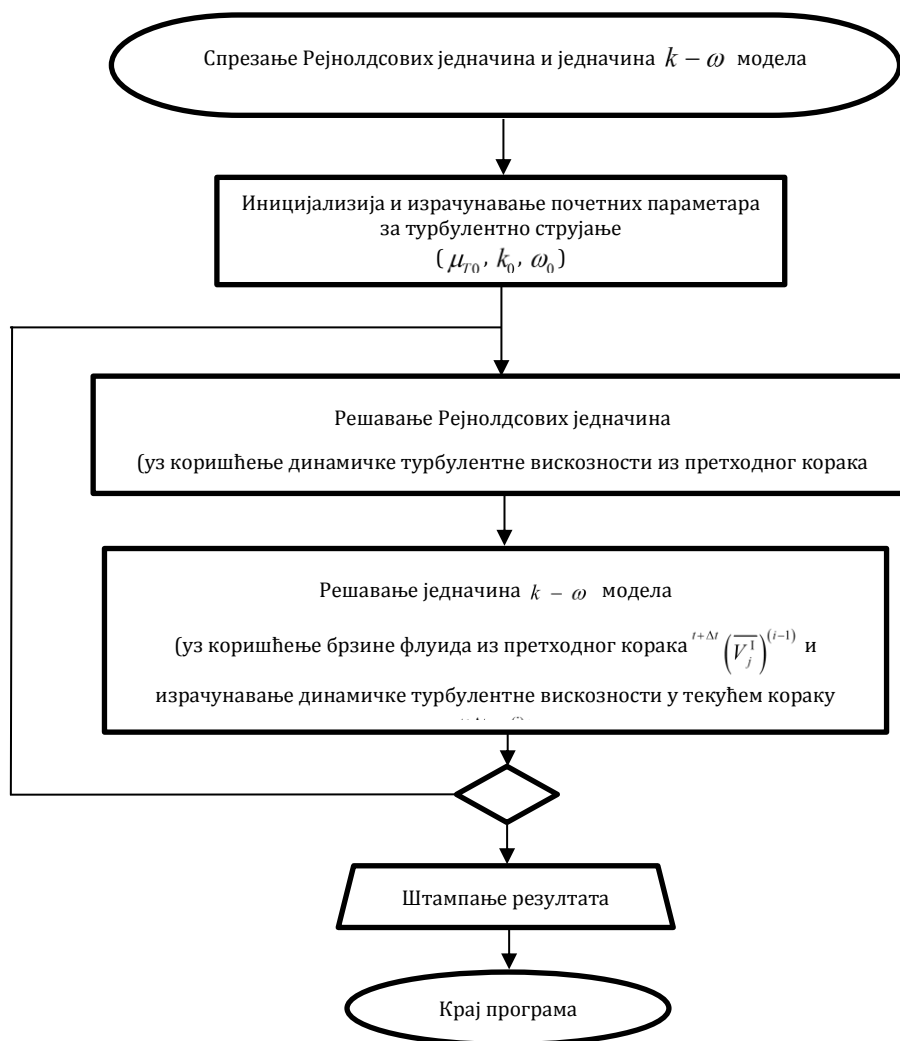
$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}_{\text{SK2}})_{\text{I}}^{(i-1)} = \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) \int_S h_1 k_{,j} n_j dS = \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) \int_S \mathbf{H}^T \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)} \right)_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.206)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}_{\text{So}})_{\text{I}}^{(i-1)} = \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) \int_S h_1 \left({}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} \right)_{,j} n_j dS = \left(\mu + \sigma {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \right) \int_S \mathbf{H}^T \left({}^{t+\Delta t}\omega^{(i-1)} \right)_{,x} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.207)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{VV1}})_{\text{II}}^{(i-1)} = 2 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{j,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = 2 \int_V {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.208)$$

$${}^{t+\Delta t} (\mathbf{K}_{\text{VV2}})_{\text{II}}^{(i-1)} = 2\alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} h_1 h_{1,j} \left({}^{t+\Delta t}\overline{V}_i^{\text{I}(i-1)} \right) h_{k,j} dV = 2\alpha_k \int_V {}^{t+\Delta t}\theta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mu_T^{(i-1)} \mathbf{H}^T \left(\nabla \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{V}^{(i-1)} \right) \nabla^T \mathbf{H} dV \quad (4.209)$$

Алгоритамска шема која описује спрезање Рејнолдсових једначина и $k - \omega$ турбулентног модела је дата на слици 4.4.



Слика 4.4 Алгоритамска шема спрезања Рејнолдсових једначина и $k - \omega$ турбулентног модела

4.8 Почетне и граничне вредности турбулентних променљивих

Први корак при спрезању Рејнолдсових једначина и једначина турбулентног модела је израчунавање почетних вредности турбулентних променљивих (модификована турбулентна вискозност $\tilde{\nu}_0$, динамичка вискозност μ_{T0} , кинетичка енергија турбуленције k_0 , дисипација кинетичке енергије турбуленције ε_0 и специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције ω_0) на основу познате геометрије проблема, почетних и граничних услова. Прва се одређују две емпиријске величине, интензитет турбуленције и дужинска размера турбуленције [35], [44].

4.8.1 Интензитет турбуленције

Интезитет турбуленције или ниво турбуленције (у зависности од литературе) може да се израчуна као однос:

$$I = \frac{u'}{U} \quad (4.210)$$

где величина u' представља квадратни корен турбулентних флукуација, а величина U је средња брзина струјања флуида.

Ако је позната кинетичка енергија турбуленције k онда се турбулентне флукуације могу израчунати преко следеће израза:

$$u' = \sqrt{\frac{1}{3} \left\{ (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 \right\}} = \sqrt{\frac{2}{3} k} \quad (4.211)$$

Како се на старту симулације турбулентног струјања не зна вредност кинетичке енергије турбуленције потребно је направити одређену почетну процену односно естимацију.

За потпуно развијено струјање у цеви или каналу интензитет турбуленције може да се одреди преко следећег емепиријског израза:

$$I = 0.16 \text{Re}_{d_h}^{-\frac{1}{8}} \quad (4.212)$$

где је Re_{d_h} Рејнолдсов број базиран на хидрауличком пречнику цеви или ширини канала.

Хидраулички пречник d_h се израчунава према следећој једначини:

$$d_h = 4 \frac{\text{попречни пресек канала}}{\text{оквашени обим канала}} \quad (4.213)$$

За кружни попречни пресек канала хидраулички пречник се рачуна као:

$$d_h = 4 \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = d \quad (4.214)$$

где је d реални пречник цеви.

За квадратни попречни пресек канала хидраулички пречник се рачуна као:

$$d_h = 4 \frac{ab}{2a+2b} = 2 \frac{ab}{a+b} \quad (4.215)$$

где су a и b ширина и висина канала.

4.8.2 Дужинска размера турбуленције

Дужинска скала турбуленције је физичка променљива која описује величину енергије коју стварају вртлози у турбулентном струјању.

За потпуно развијено струјање у нециркуларним каналима дужинска размера турбуленције може да се естимира као:

$$l = 0.07d_h \quad (4.216)$$

Ако су познате променљиве из турбулентног модела $k-\varepsilon$ онда се дужинска размера рачуна на следећи начин:

$$l = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (4.217)$$

где је $C_\mu = 0.09$ константа из турбулентног модела $k-\varepsilon$.

4.8.3 Почетне вредности за турбулентни модел Спаларт-Алмарас

Почетна вредност модификоване турбулентне вискозности $\tilde{\nu}$ може се израчунати преко следећег израза:

$$\tilde{\nu}_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}(Ul) \quad (4.218)$$

где U представља средњу вредност почетне брзине струјања, l је интензитет турбуленције и l је турбулентна дужина скале.

У идеалном случају код Спаларт-Алмарас модела модификована турбулентна вискозност може да буде једнака нули, али то обично није препоручљиво. За моделе струјања са слободних током може бити сетована на $\tilde{\nu} = 5\nu$.

4.8.4 Почетне вредности за турбулентни модел $k-\varepsilon$

Почетна вредност кинетичке енергије турбуленције може да се израчуна емпиријски преко следећег израза:

$$k_0 = \frac{3}{2}(Ul)^2 \quad (4.219)$$

где U представља средњу вредност почетне брзине струјања, l је интензитет турбуленције.

Почетна вредност дисипације кинетичке енергије турбуленције се израчунава као:

$$\varepsilon_0 = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (4.220)$$

4.8.5 Почетне вредности за турбулентни модел $k - \omega$

Почетна вредност кинетичке енергије турбуленције се рачуна преко израза (4.219) док се почетна вредност специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције рачуна као:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{k}}{l} \quad (4.221)$$

4.9 Флуид-солид интеракција

Интеракција флуида и солида као два одвојена физичка домена присутна је у скоро сваком физичком систему. У истраживању мултидисциплинарних проблема увек се поставља питање на који начин је могуће добити тачну и ефикасну методологију за решавање.

Два основна приступа нумеричком решавању интеракције солида и флуида су јако спрезање и слабо спрезање [18], [20]. Основна идеја јаког спрезања је да се комплетан систем једначина решава у једном кораку. На тај начин се поља свих величина, и за флуид и за солид, одређују истовремено. Ова методологија постаје енормно скупа за решавање 3Д проблема, где се драстично повећава систем једначина који се решава. Да би се решавали спрегнути проблеми овом методологијом, неопходно је направити специфичне солвере за решавање и флуида и солида. Алтернатива јаком спрезању је метод слабог спрезања, који има низ предности. Главна предност је коришћење већ постојећих програма за решавање солида и флуида са врло мало измена. Израчунавања непознатих величина за флуид и солид су независна, у посебним програмима, при чему се променљиве и оптерећења на интерфејсу размењују у сваком временском кораку.

4.9.1 Основне једначине кретања солида

Да би се боље разумео систем спрезања између домена флуида и домена солида у наставку ће бити дате основне једначине равнотеже за солид док су основне једначине за флуид дате у поглављу 4.3.

Диференцијална једначина кретања система под дејством динамичких оптерећења гласи [36], [45]:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (4.222)$$

где су \mathbf{M} , \mathbf{C} и \mathbf{K} матрице маса, пригушења и крутости респективно. Величина \mathbf{R} је вектор спољашњег оптерећења, док су ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$, ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ вектори убрзања, брзина и померања чворова коначног елемента у тренутку $t + \Delta t$.

Диференцијална једначина кретања (4.222) представља систем линеарних диференцијалних једначина другог реда. Може бити решена нумеричком интеграцијом да би добили решења за померања, брзине и убрзања чворова и елемената солида у одређеном временском периоду [20]. У даљем тексту је приказана нумеричка интеграција једначина по Њумарковој методи [19].

Основне претпоставке код Њумаркове методе су да убрзање у временском кораку може да се представи као константа:

$$\ddot{\mathbf{U}}(\tau) = (1 - \delta)^t \ddot{\mathbf{U}} + \delta^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \quad (4.223)$$

где је $\ddot{\mathbf{U}}(\tau)$ убрзање у тренутку τ које задовољава услов $t \leq \tau \leq t + \Delta t$. Параметар δ има вредност у границама $0 \leq \delta \leq 1$, док су ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ и ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ убрзања на почетку и на крају временског корака [45].

Интеграцијом једначине (4.223) добија се израз за брзину у тренутку $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left[(1 - \delta)^t \ddot{\mathbf{U}} + \delta^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t \quad (4.224)$$

и даљом интеграцијом једначине (4.224) добија се једначина за померање солида у тренутку $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \frac{1}{2} \left[(1 - \delta)^t \ddot{\mathbf{U}} + \delta^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t^2 \quad (4.225)$$

Да би се повећала стабилност и тачност нумеричког решења, уместо једначине (4.225) користи се према [18] следећи израз:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^t \ddot{\mathbf{U}} + \alpha^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] (\Delta t)^2 \quad (4.226)$$

где је уведен параметар α који има вредност $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$, док је параметар $\delta \geq \frac{1}{2}$.

Ако се из једначине (4.226) изрази убрзање солида у тренутку $t + \Delta t$ добија се:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\delta \Delta t^2} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} - {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t - \left(\frac{1}{2} - \alpha \right)^t \ddot{\mathbf{U}} \Delta t^2 \right) \quad (4.227)$$

Заменом (4.227) у (4.224) добија се израз за брзину солида у тренутку $t + \Delta t$ у функцији убрзања:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left\{ (1-\delta) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} - {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t - \left(\frac{1}{2}-\alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] \right\} \Delta t \quad (4.228)$$

Сређивањем и груписањем чланова у претходној једначини имамо следећу једначину за брзину солида:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) \quad (4.229)$$

Заменом израза за убрзање (4.227) и израза за брзину солида (4.229) у једначину кретања (4.222) и груписањем чланова који садрже померање у тренутку $t + \Delta t$ на левој страни једначине добија се:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M} \frac{1}{\alpha\Delta t^2} + \mathbf{C} \frac{\delta}{\alpha\Delta t} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} \frac{1}{\alpha\Delta t^2} \left[{}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2}-\alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] + \\ & + \mathbf{C} \left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^t\mathbf{U} - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} - \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \right] \end{aligned} \quad (4.230)$$

У скраћеном облику претходни израз се може написати:

$$\hat{\mathbf{K}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} \quad (4.231)$$

где су:

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (4.232)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} [a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}] + \mathbf{C} [a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}] \quad (4.233)$$

Коефицијенти у претходним једначинама (4.232) и (4.233) су:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, & a_2 &= \frac{1}{\alpha\Delta t} \\ a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1, & a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, & a_5 &= \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t \end{aligned} \quad (4.234)$$

На основу свега наведеног може се рећи да Њумаркова метода представља имплицитни метод решавања диференцијалних једначина кретања солида. Након формирања матрица $\hat{\mathbf{K}}$ и вектора ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$ за сваки коначни елемент, формира се систем матрица и вектора да би се решио систем (4.231) по чворним померањима ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$.

Након тога се рачунају брзина солида ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}$ и убрзање солида ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$ преко једначина (4.229) и (4.227) да би се добиле вредности за брзину солида ${}^t\dot{\mathbf{U}}$ и убрзање солида ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ у следећем временском кораку. Померања ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$, брзине ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$ и убрзања ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ у било којој тачки коначног елемента могу се израчунати на основу интерполација за чворове \mathbf{H} :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^K \quad (4.235)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^K \quad (4.236)$$

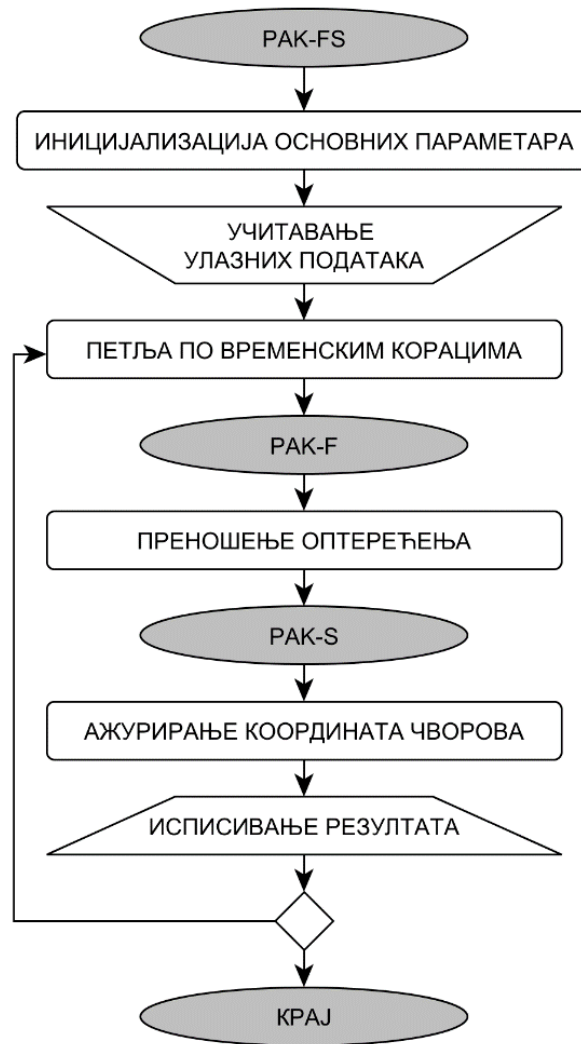
$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^K \quad (4.237)$$

где индекс K представља број чвора у коначном елементу.

4.9.2 Слабо спрезање

За нумеричко решавање проблема интеракције флуида и солида користи се софтвер *PAK-FS* [46] који је развијен спрезањем постојећих софтвера за компјутерску динамику флуида *PAK-F* и софтвера за компјутерску динамику солида *PAK-S*, коришћењем слабог спрезања. Резултати прорачуна записују се у датотеке *FEMAP NEUTRAL*, *UNV* и *VTK*. Глобални алгоритам развијеног кода је приказан на слици 4.5.

Флуид и структура заузимају различите поддомене, па се одговарајући системи једначина постављају одвојено за сваки поддомен, уз услов да је дискретизација поддомена флуида и структуре компатибилна на интерфејсу. Програм за компјутерску динамику флуида (енг. *Computational fluid dynamics - CFD*) користи као граничне услове тренутну геометрију (површине) и брзине у чворовима које одговарају тим површинама. Ове информације су добијене програмом за компјутерску динамику солида (енг. *Computational solid dynamics - CSD*) који решава проблем у домену солида (артеријског зида). Са друге стране, оптерећења из флуидног домена се преносе на домен солида.

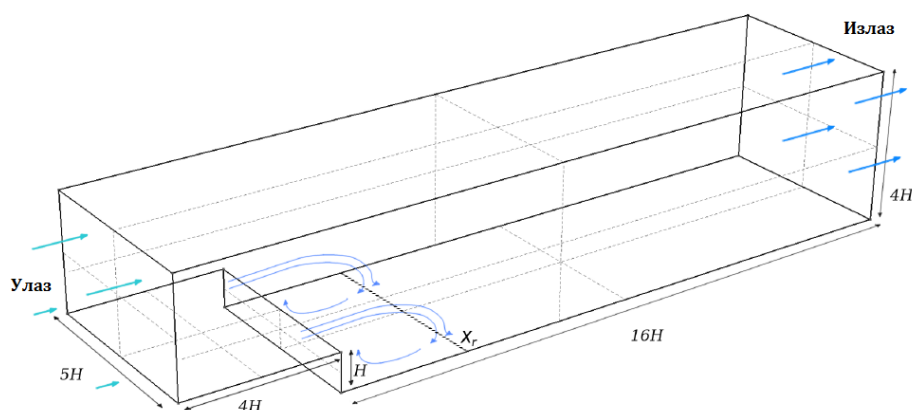


Слика 4.5 Алгоритам програма за флуид-солид интеракцију

5 Примери тестирања турбулентног модела

5.1 Струјање флуида у каналу са степеником

Модул за турбулентно струјање флуида тестиран је на доста коришћеном бенчмарк примеру – струјање у каналу са степеником. Геометрија проблема приказана је на слици 5.1 [47].



Слика 5.1 Геометрија проблема - струјање флуида преко степеника [47]

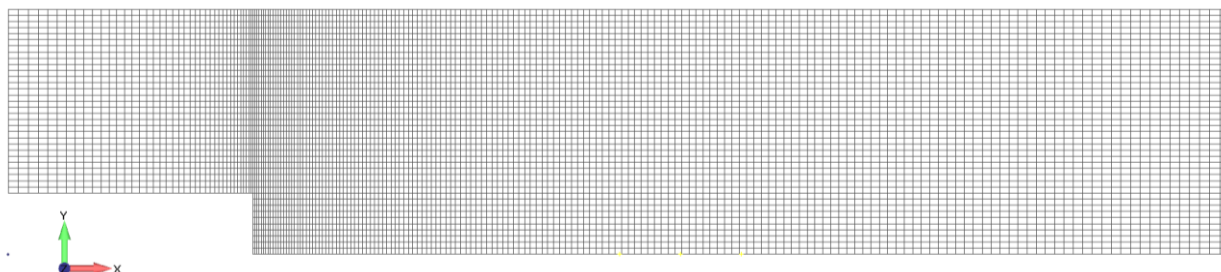
Са слике 5.1 се види да је степеник висине H и дужине $4H$, а да је канал широк $5H$. Укупна дужина канала је $20H$. Резултат који се разматра код овог проблема је растојање после ког флуид пада на дно канала (на слици 5.1 означено са X_r). Ово растојање је експериментално одређено и износи $X_r = 6H$ [48].

Симулација струјања је изведена на 2Д моделу канала. Проблем је анализиран са $k - \omega$ и LES турбулентним моделом. Флуид је посматран као Њутнов флуид са густином $\rho = 1e^{-3} g / mm^3$ и динамичком вискозношћу $\mu = 1e^{-2} g / mm \cdot s$. Проблем је симулиран са више улазних брзина, с тим што је акценат дат на брзинама при којима је Рејнолдсов број већи од 2300 и долази до турбулентног струјања. При улазној осредњеној брзини флуида од $v_{inlet} = 16666 mm/s$ добија се Рејнолдсов број $Re = 5000$. Ови улазни подаци су коришћени у поглављима 5.1.1 и 5.1.2.

Гранични услови задати на моделу су да је брзина флуида на зидовима канала једнака нули и да су на излазу из канала површинске силе једнаке нули. Канал је моделиран као 2Д проблем у две варијанте: са 7600 четворочворних елемената и 28000 четворочворних елемената.

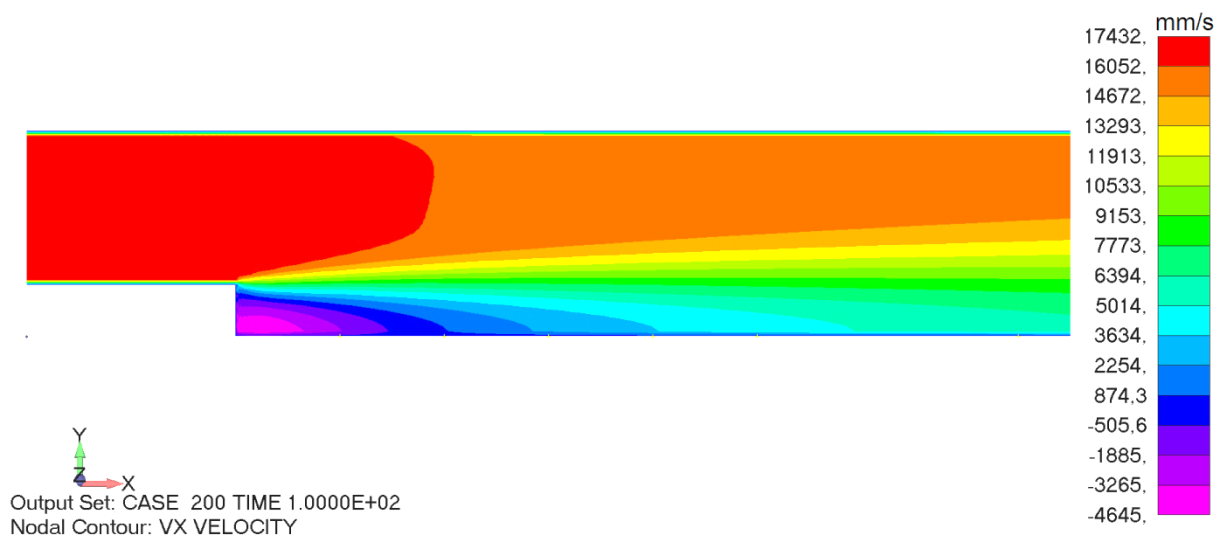
5.1.1 2Д модел канала са степеником, $k-\omega$ турбулентни модел, 7600 елемената

Модел коначних елемената приказан је на слици 5.2. Симулација струјања флуида у каналу са степеником коришћењем $k-\omega$ турбулентног модела је спроведена као нестационарна у 200 корака по 0.5 секунди.

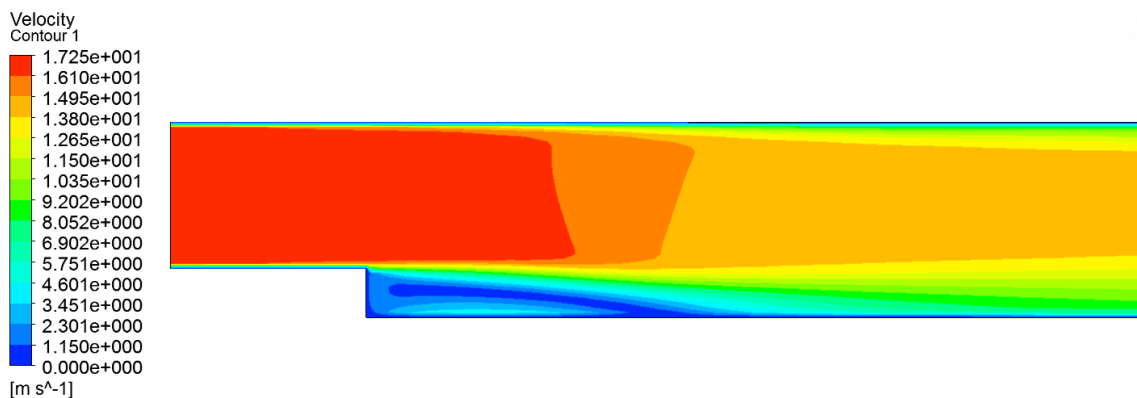


Слика 5.2 Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 7600 елемената

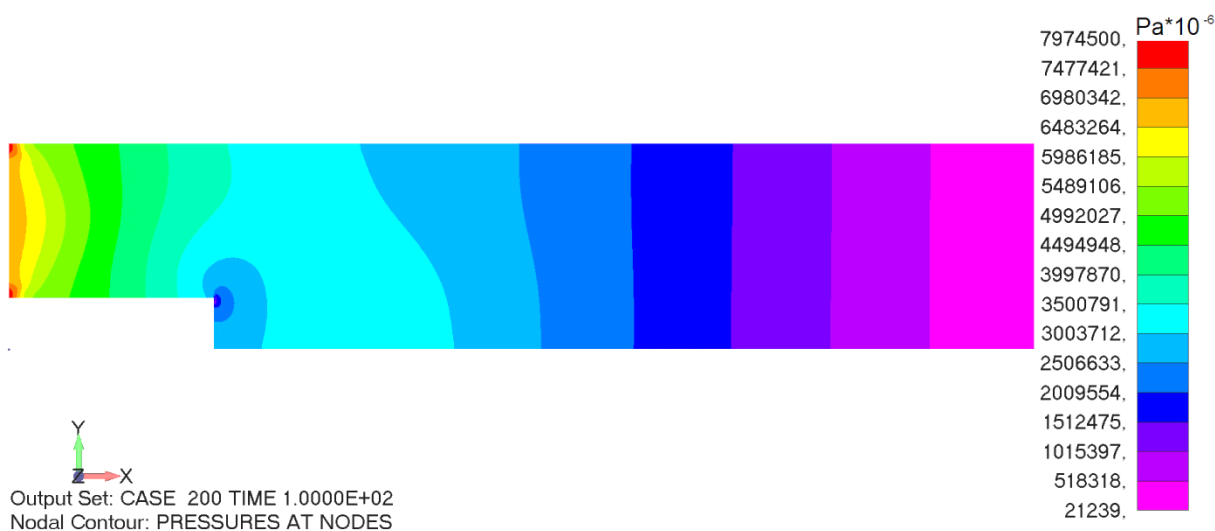
Резултати симулације у софтверу *PAK-F* дати су на сликама 5.3, 5.5 и 5.7. У поређењу са софтвером *ANSYS Fluent 15.0* развијени код даје врло добра поклапања што је приказано на сликама 5.4, 5.6 и 5.8 упоредно.



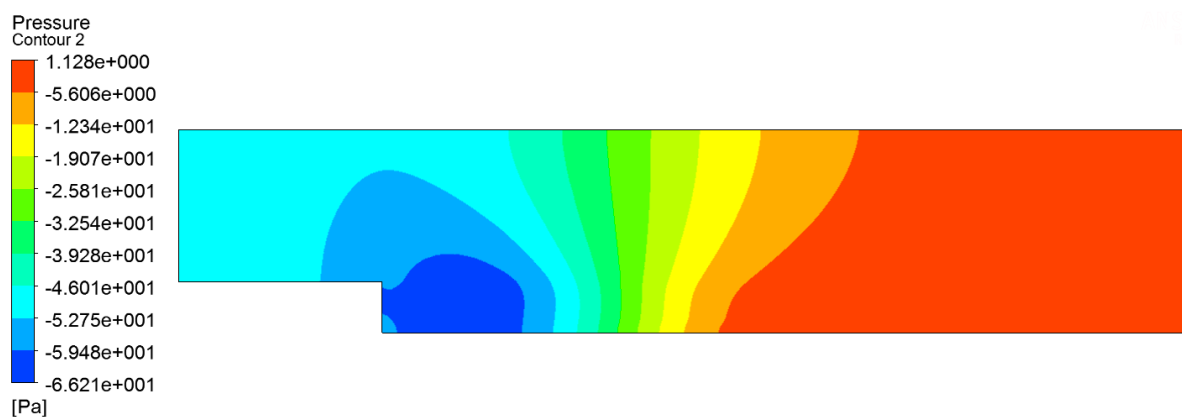
Слика 5.3 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер *PAK-F*



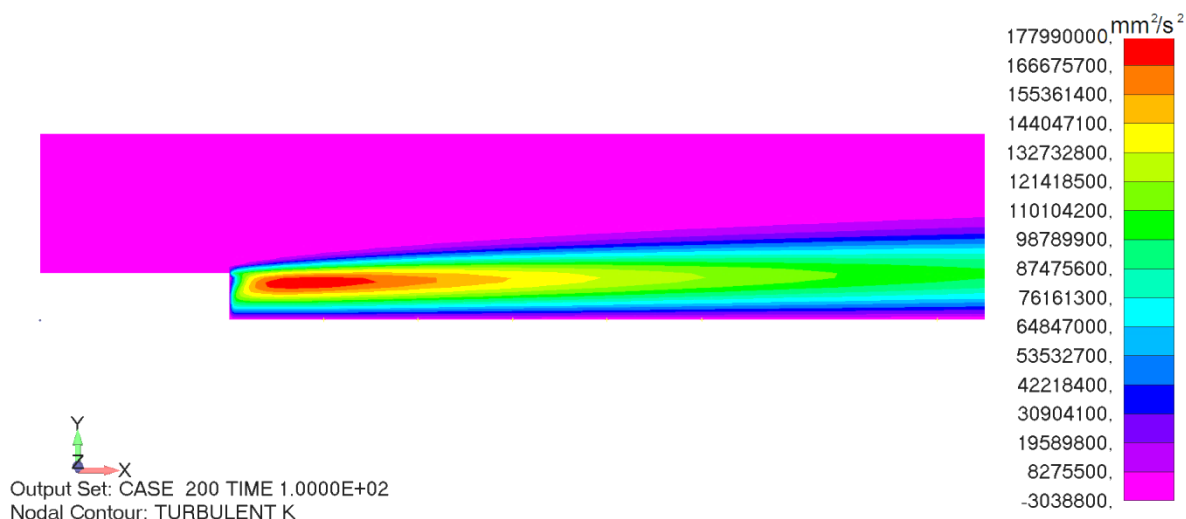
Слика 5.4 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0



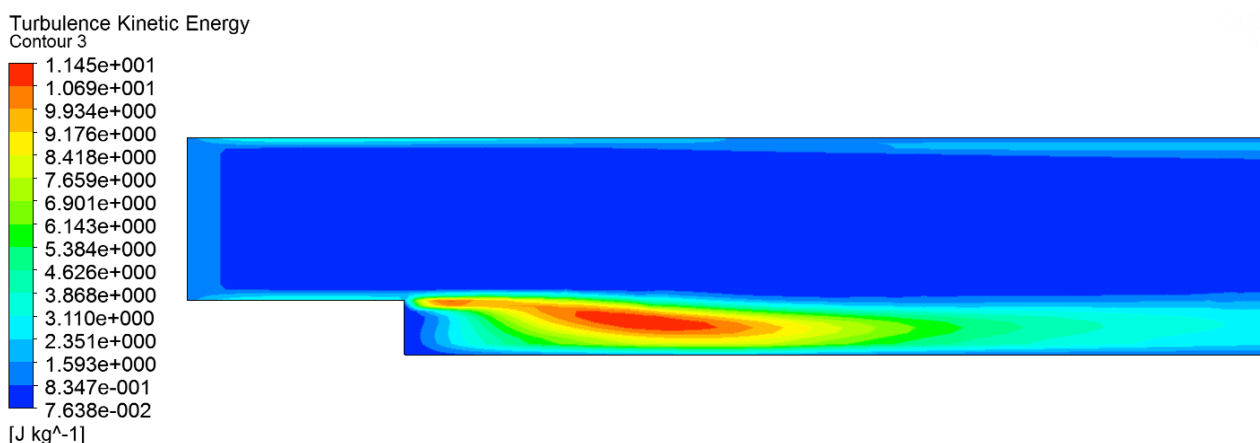
Слика 5.5 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер PAK-F



Слика 5.6 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0



Слика 5.7 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер PAK-F



Слика 5.8 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 7600 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0

Може се видети да је додирна тачка када флуид почиње да додирује дно канала после степеника између $6H$ и $7H$, што се поклапа са подацима из литературе [48].

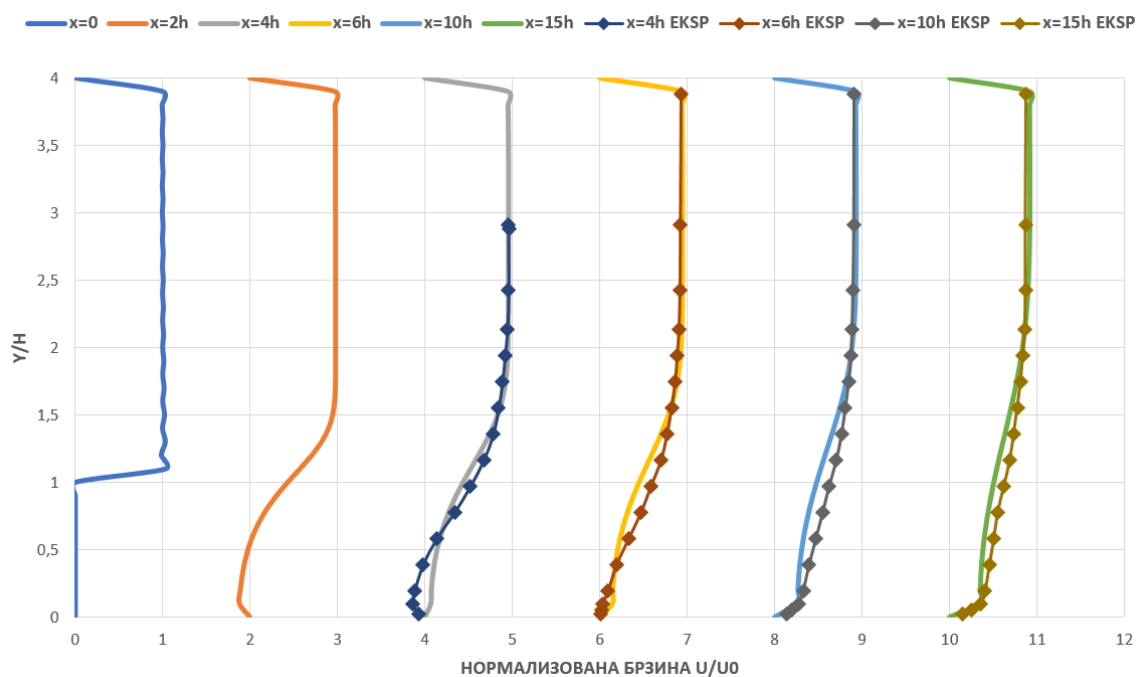
Резултати брзине струјања флуида могу да се прикажу дијаграмски за одређене додирне дужине после степеника (X_r , слика 5.1). Прво растојање $X_r = 0$ је растојање које се поклапа са крајем степеника. После дужине $6H$ од краја степеника брзина флуида је већа од нуле док пре $6H$ има негативну вредност у доњем делу канала после степеника (Слика 5.9). Разлог томе је вртлог који се јавља у делу канала одмах по завршетку степеника и на том делу практично долази до струјања флуида супротног смера од улазног смера брзине. Брзина струјања флуида је нормализована ради лакшег приказа на дијаграмима. Резултати су упоређени са експерименталним подацима из литературе Jovic, Driver [48] за дужине $4H$, $6H$, $10H$, $15H$ (слика 5.9).

У доњем делу канала се види да постоје одређена одступања од приближно 10% у односу на литературу који могу да буду последица одређених параметара као што су: почетна вредност кинетичке енергије турбуленције и дисипације кинетичке енергије турбуленције, као и густина мреже коначних елемената.

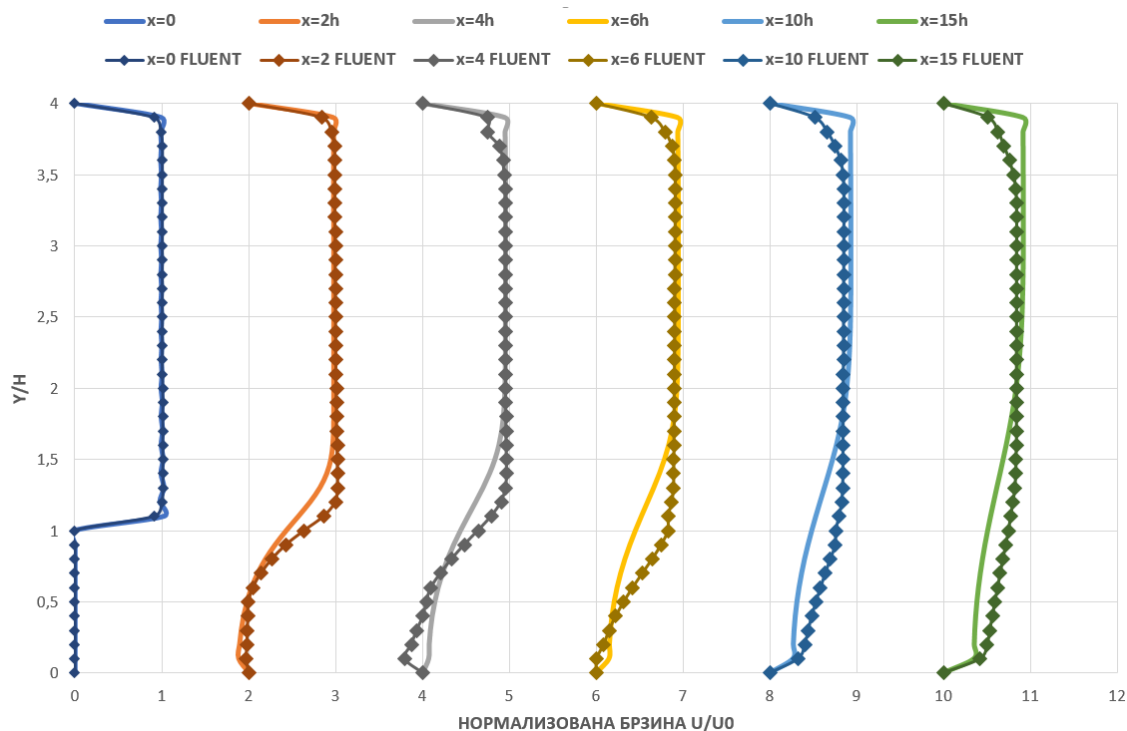
У поређењу резултата са софтвером *ANSYS FLUENT 15.0* (слика 5.10) примећују се мало већа одступања профила брзине од око 20% код елемената близу зидова што може да буде директна последица имплементираниог кода за зидне функције уграђеног у софтвер *PAK-F*.

Резултати кинетичке енергије турбуленције у поређењу са литературом *Jovic, Driver* [48] за дужине $4H$, $6H$, $10H$, $15H$ приказани су на слици 5.11. Може се приметити добро поклапање у зони $6H$ и још боље поклапање ка излазу из канала. Примећују се мања одступања до 10%.

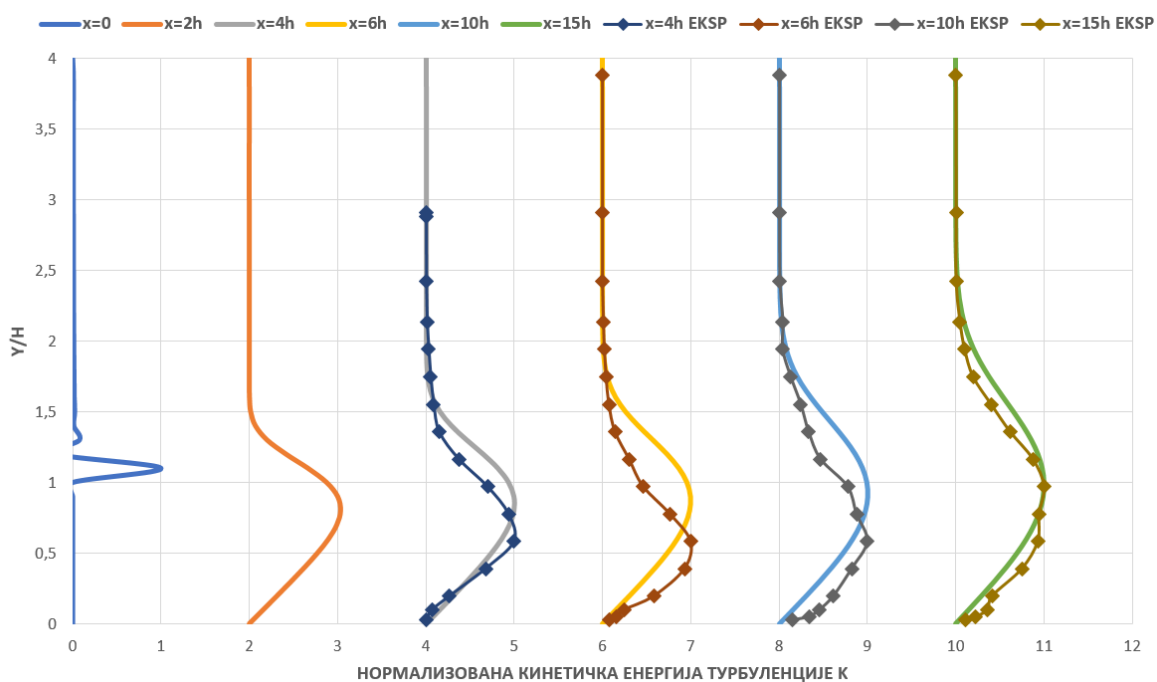
У поређењу са софтвером *ANSYS FLUENT 15.0* (слика 5.12) за резултате кинетичке енергије турбуленције има одступања од око 20% у зони близу зидова као и у зони иза степеника што може да буде последица више фактора као што су почетна вредност брзине струјања и почетна вредност кинетичке енергије турбуленције.



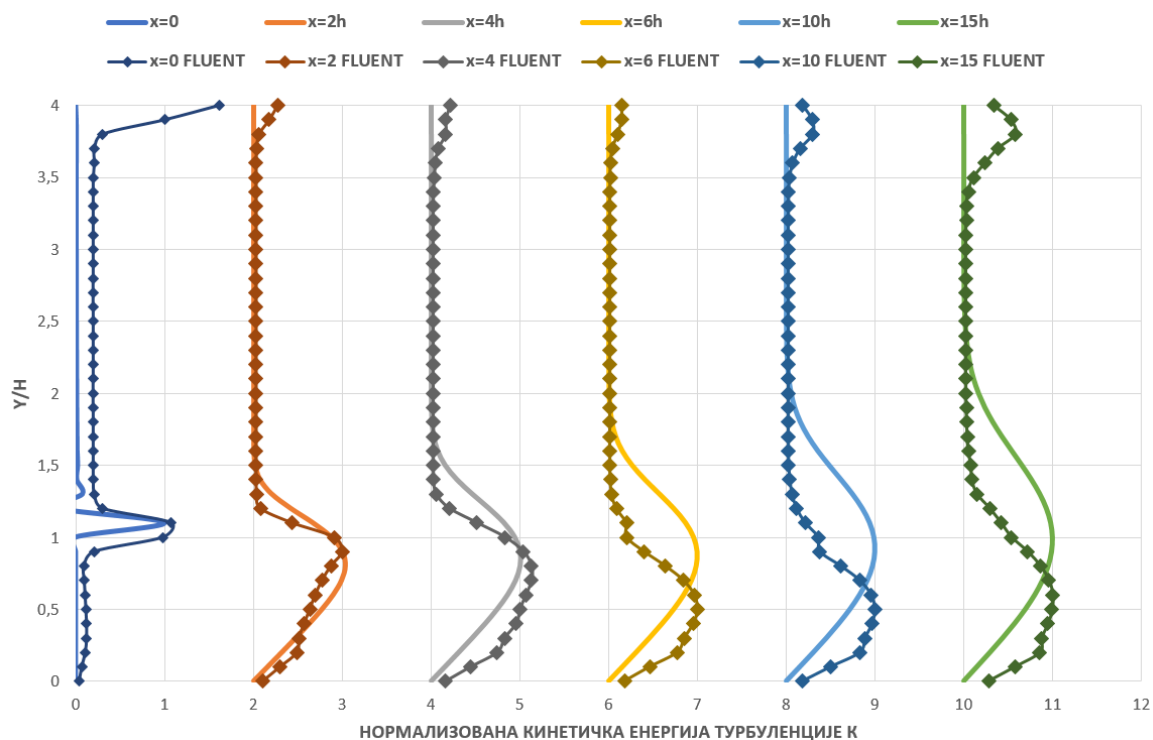
Слика 5.9 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X , $k - \omega$ турбулентни модел, поређење са литературом *Jovic, Driver* [48]



Слика 5.10 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k-\omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0



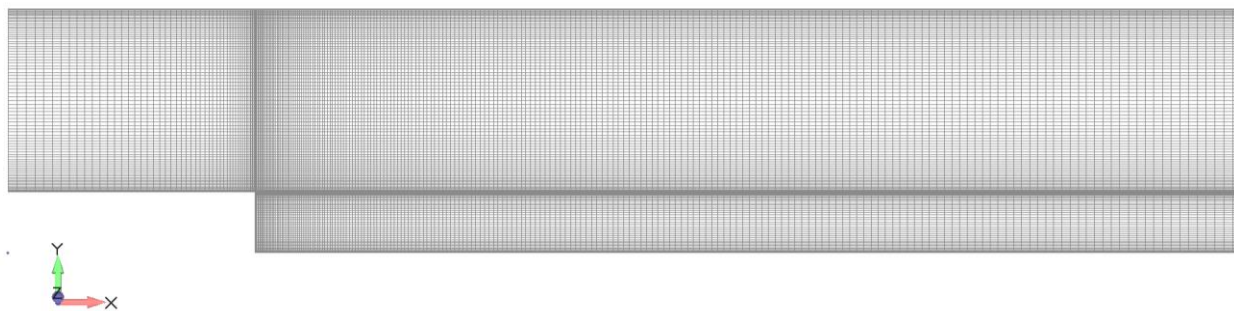
Слика 5.11 Дијаграм расподеле кинетичке енергије турбуленције за различите додирне дужине после степеника X_r , $k-\omega$ турбулентни модел, поређење са литературом Jović, Driver [48]



Слика 5.12 Дијаграм расподеле кинетичке енергије турбуленције за различите додирне дужине после степеника X_r , $k-\omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0

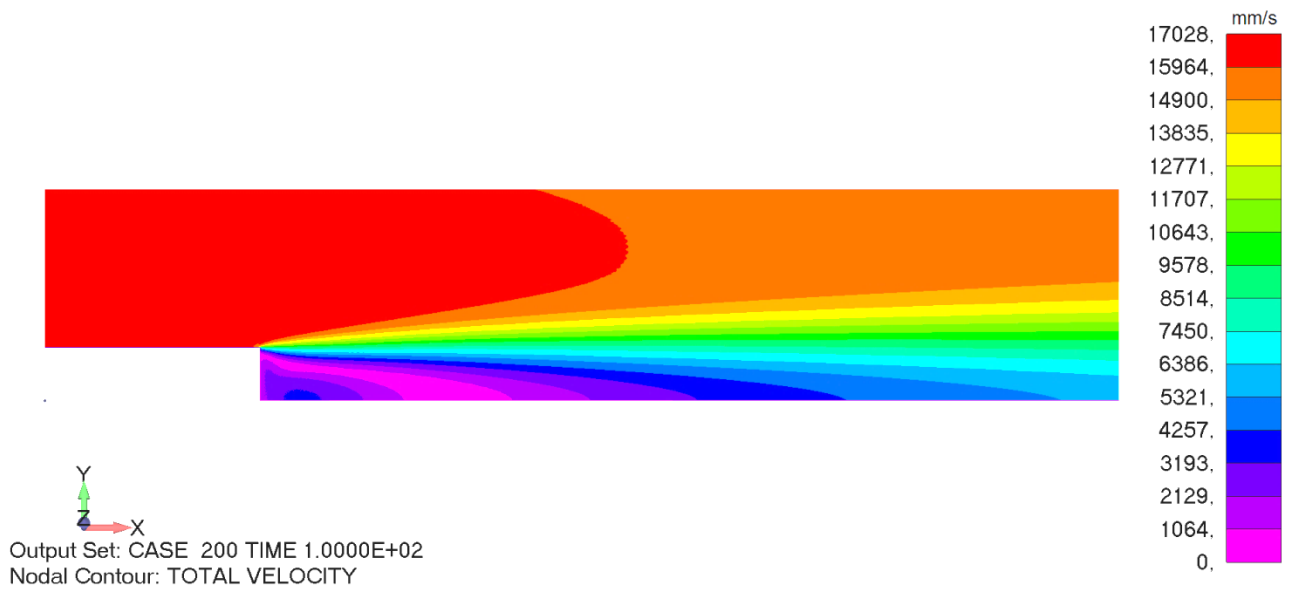
5.1.2 2Д модел канала са степеником, $k-\omega$ турбулентни модел, 28000 елемената

Модел коначних елемената приказан је на слици 5.13. Симулација струјања флуида у каналу са степеником коришћењем $k-\omega$ турбулентног модела је спроведена као нестационарна у 200 корака по 0.5 секунди.

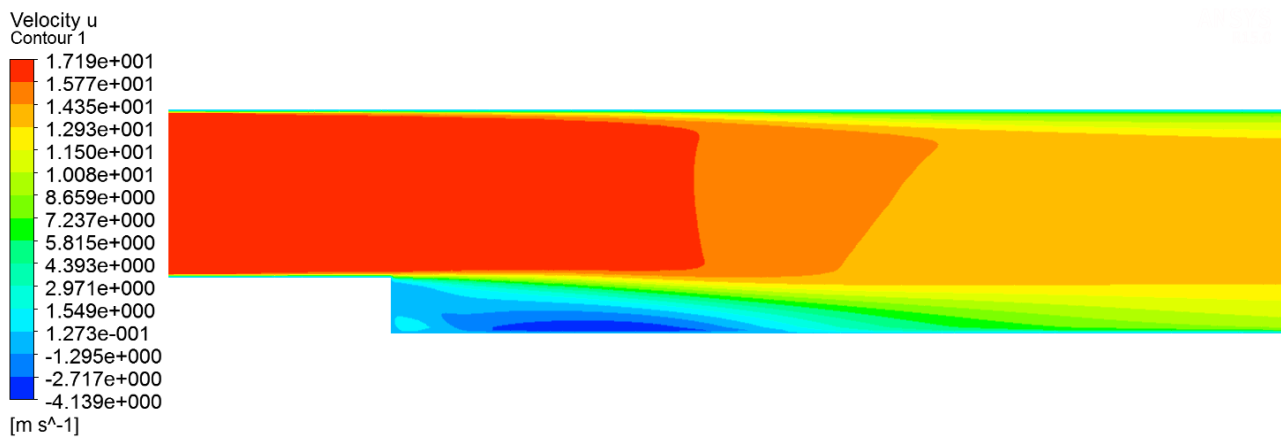


Слика 5.13 Модел коначних елемената за 2Д проблем канала са степеником, мрежа од 28000 елемената

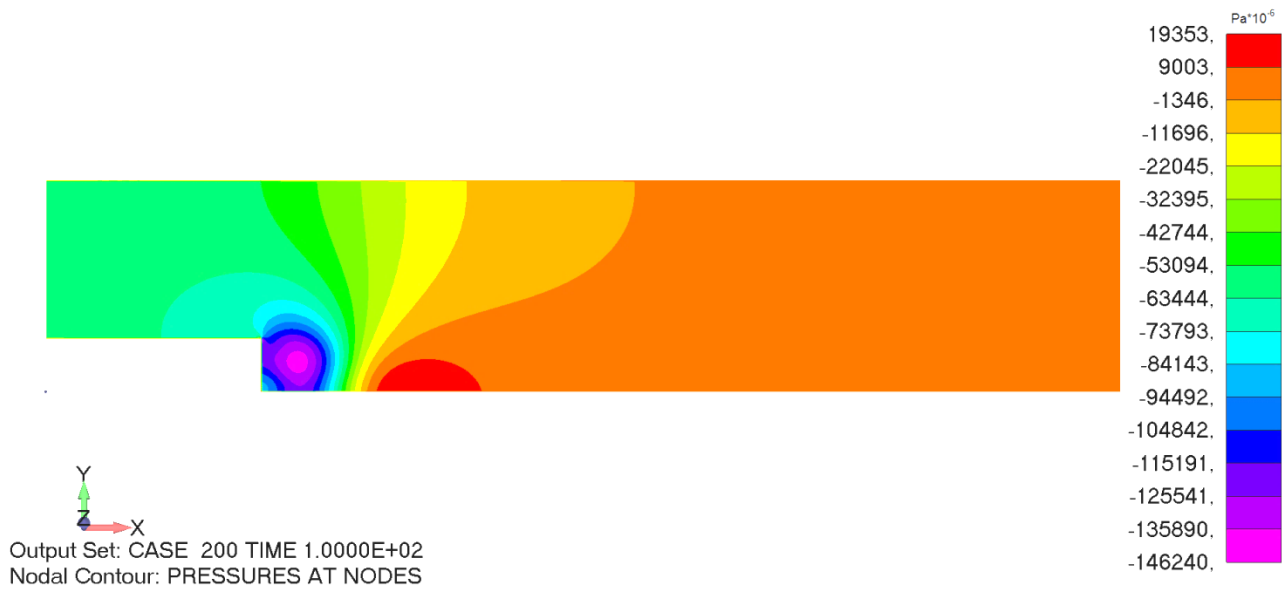
Резултати симулације у софтверу PAK-F дати су на сликама 5.14, 5.16 и 5.18. У поређењу са софтвером ANSYS Fluent 15.0 (слике 5.15, 5.17 и 5.19) развијени код даје добра поклапања у већем делу струјног поља што је приказано на следећим сликама упоредно.



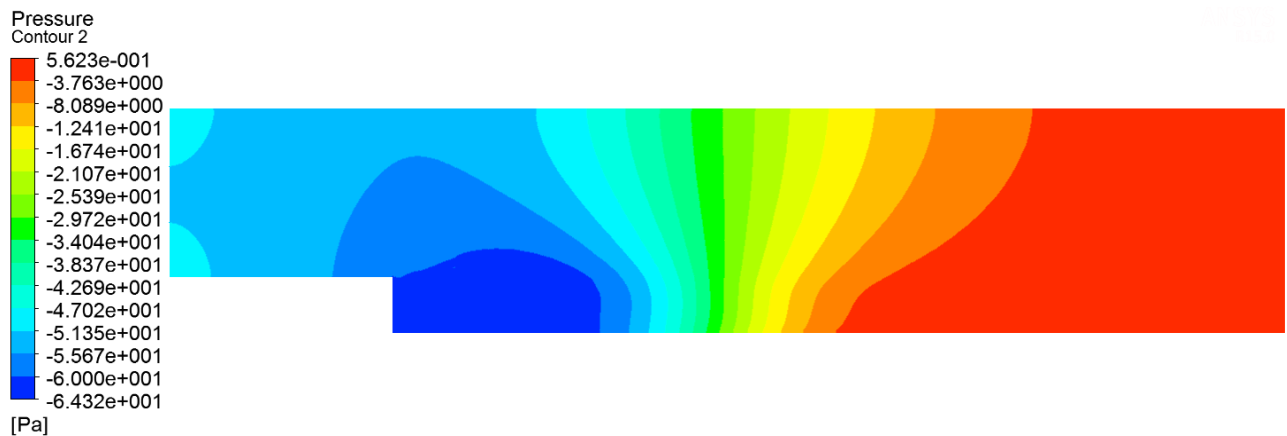
Слика 5.14 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F



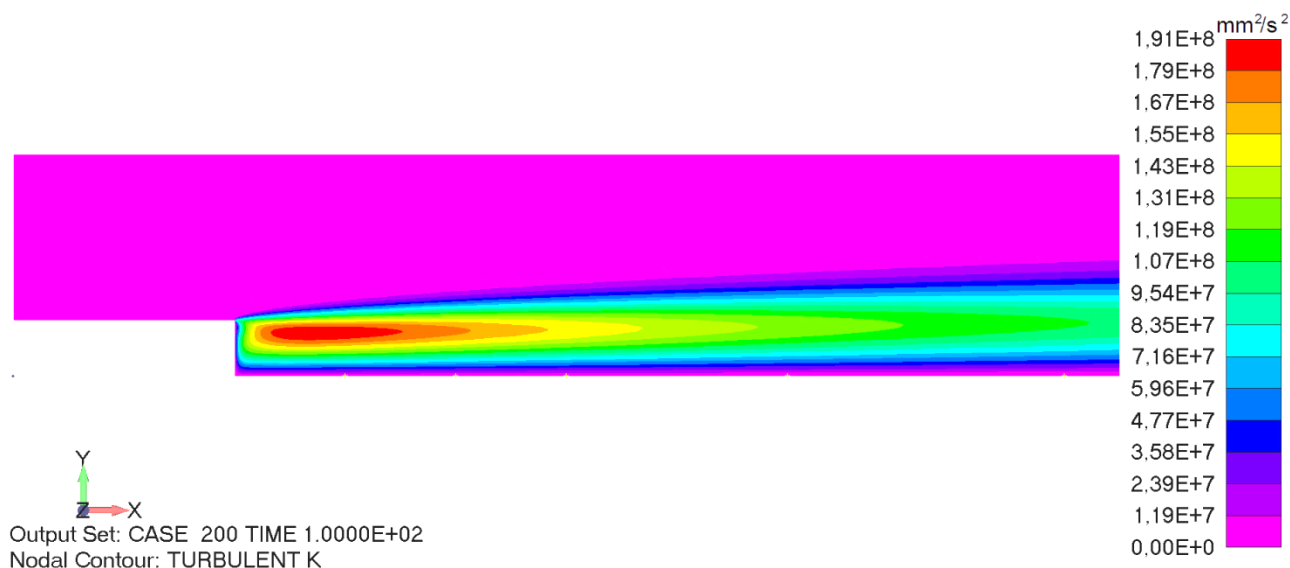
Слика 5.15 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0



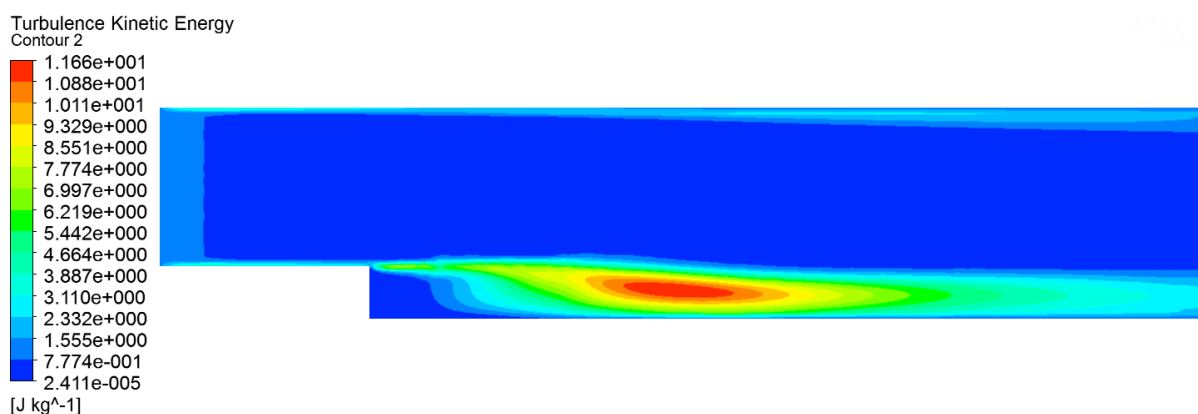
Слика 5.16 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F



Слика 5.17 Поље пада притиска флуида у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0



Слика 5.18 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер PAK-F

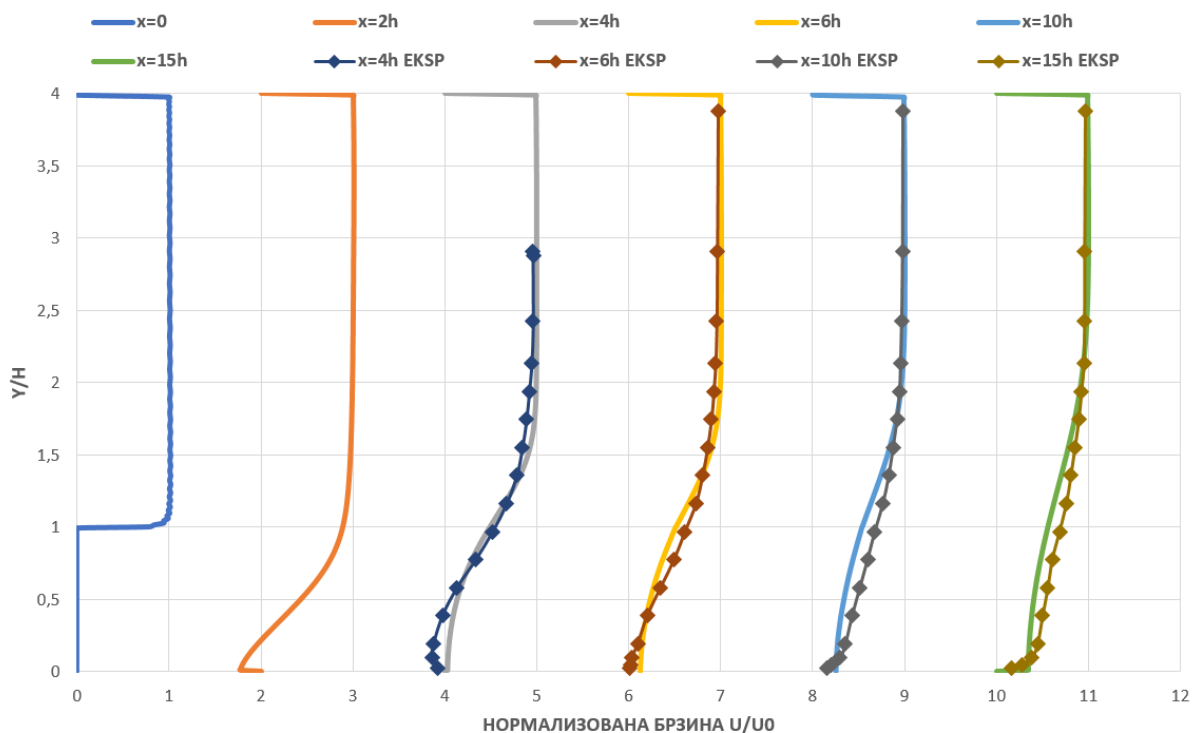


Слика 5.19 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каналу са степеником, $k - \omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 елемената, солвер ANSYS Fluent 15.0

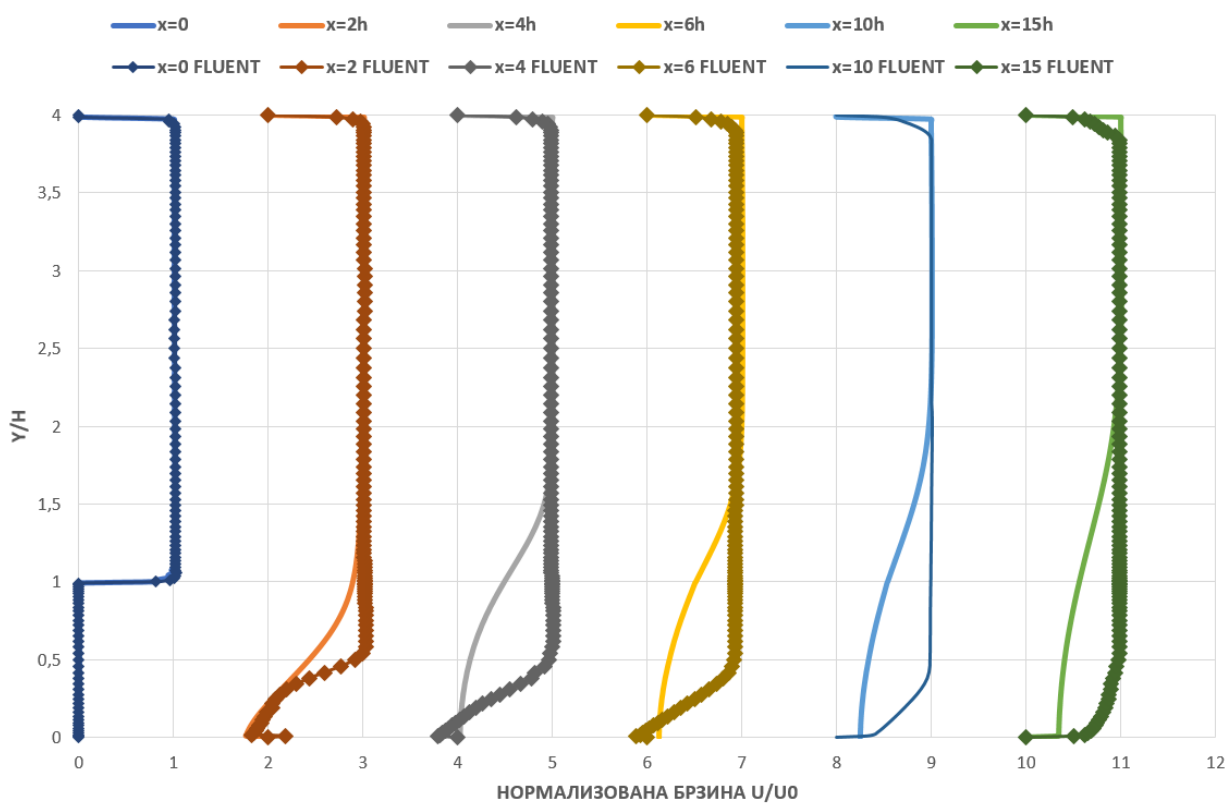
Резултати брзине струјања флуида приказани су дијаграмски за одређене додирне дужине после степеника (X_r). Брзина струјања флуида је нормализована ради лакшег приказа на дијаграму. Резултати су упоређени са експерименталним подацима из литературе Jovic, Driver [48] за дужине $4H$, $6H$, $10H$, $15H$ (слика 5.20).

У доњем делу канала се види да постоје одступања од 5% до 10% у односу на литературу који могу да буду последица одређених параметара као што су: почетна вредност кинетичке енергије турбуленције и дисипације кинетичке енергије турбуленције.

У поређењу резултата са софвером ANSYS FLUENT 15.0 (слика 5.21) примећују се одступања профила брзине у делу канала иза степеника што може да буде директна последица имплементираниог кода за зидне функције уграђеног у софтвер PAK-F.



Слика 5.20 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k-\omega$ турбулентни модел, поређење са литературом Jovic, Driver [48]



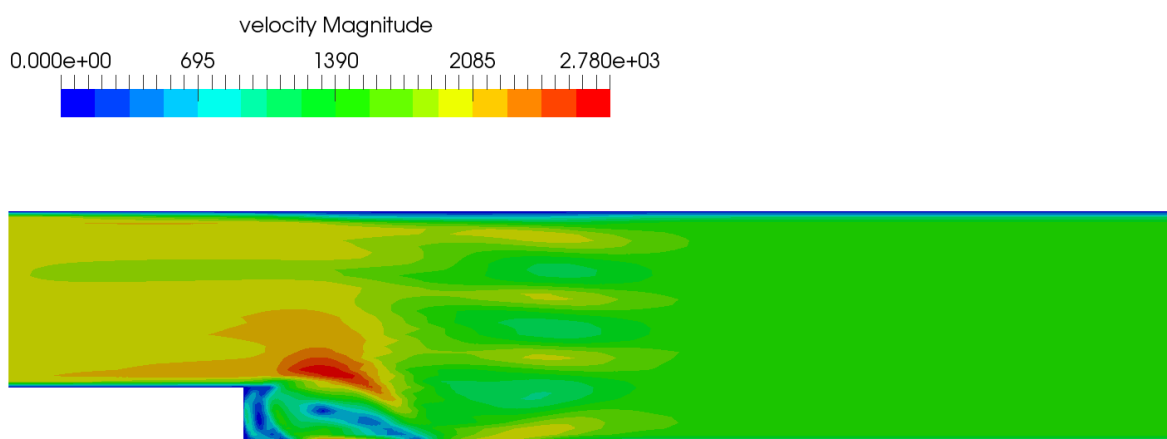
Слика 5.21 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , $k-\omega$ турбулентни модел, поређење са ANSYS FLUENT 15.0

5.1.3 2Д модел канала са степеником, *LES* турбулентни модел

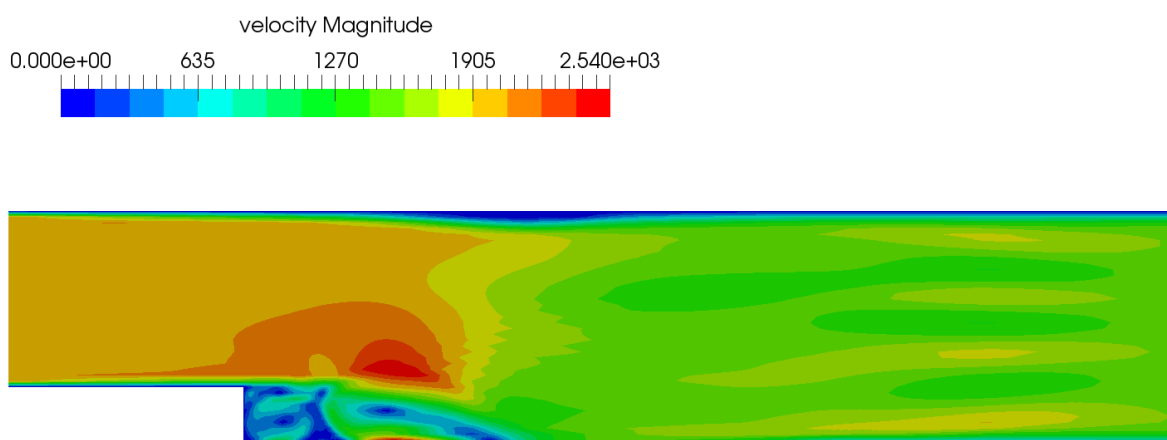
Симулација струјања флуида у каналу са степеником коришћењем *LES* турбулентног модела, имплементираног у софтвер *PAK-F*, је спроведена као нестационарна у 1000 корака од 0.0001 секунди. Геометрија проблема је иста као у поглављу 5.1.

Густина флуида има вредност $\rho = 1 \text{ g} / \text{mm}^3$, а динамичка вискозност $\mu = 1 \text{ g} / \text{mm} \cdot \text{s}$. При улазној осредњеној брзини флуида од $v_{inlet} = 2000 \text{ mm} / \text{s}$ добија се Рејнолдсов број $Re = 6000$.

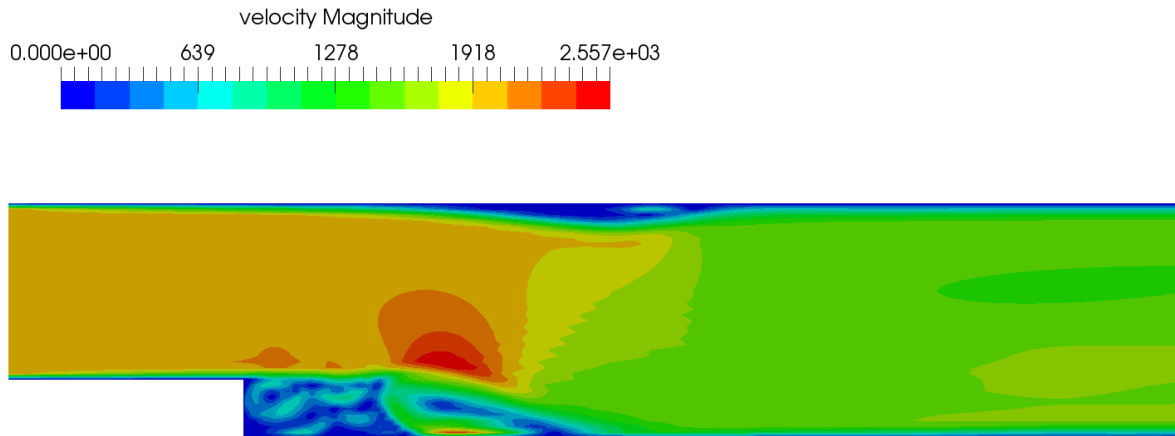
Резултати симулације струјања флуида за брзину и поље пада притиска дати су на сваких 50 корака односно на сваки 0.001 секунд (слике од 5.22 до 5.39), док су струјнице дате у 13 различитих корака симулације (слике од 5.40 до 5.52). У приказу струјница се најбоље може видети шта представља *LES* симулација односно могу се видети крупни вртлози који се јављају услед турбулентне вискозности.



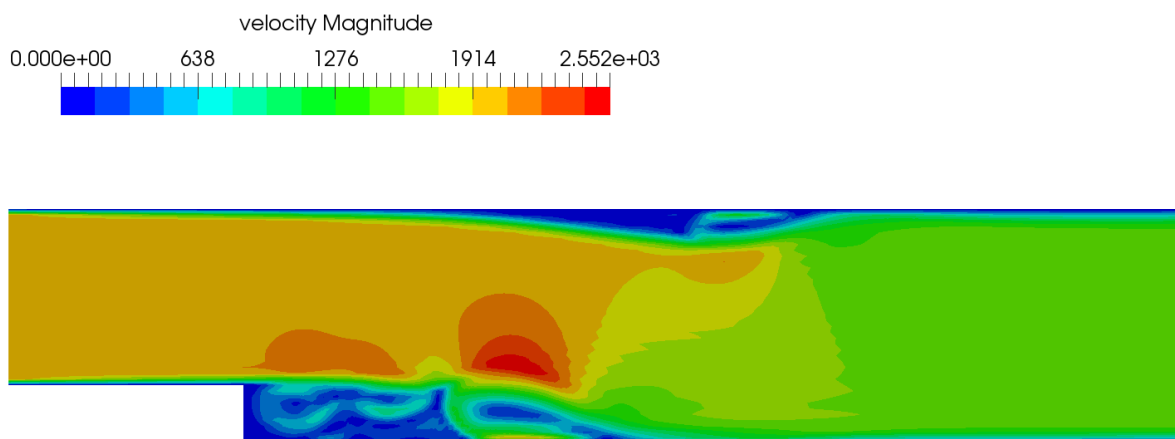
Слика 5.22 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, *LES* турбулентни модел, корак 50



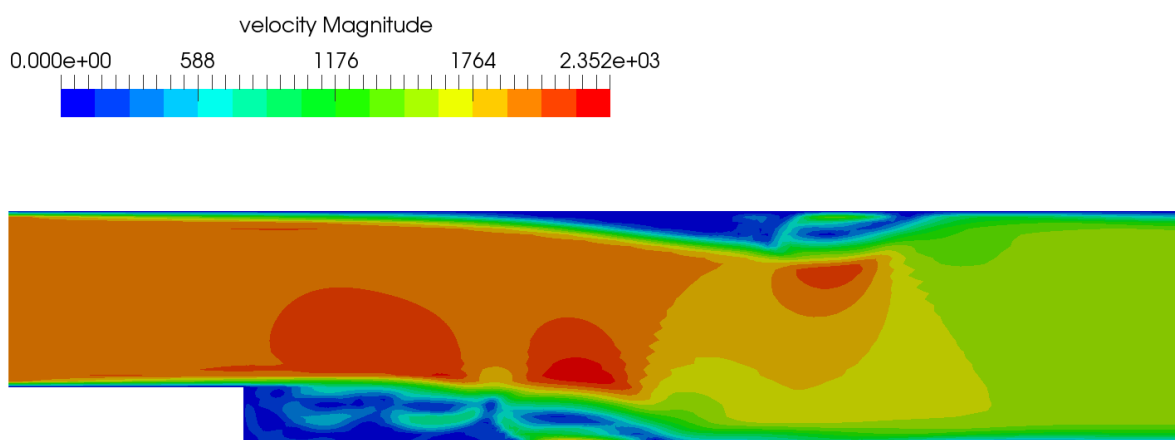
Слика 5.23 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, *LES* турбулентни модел, корак 100



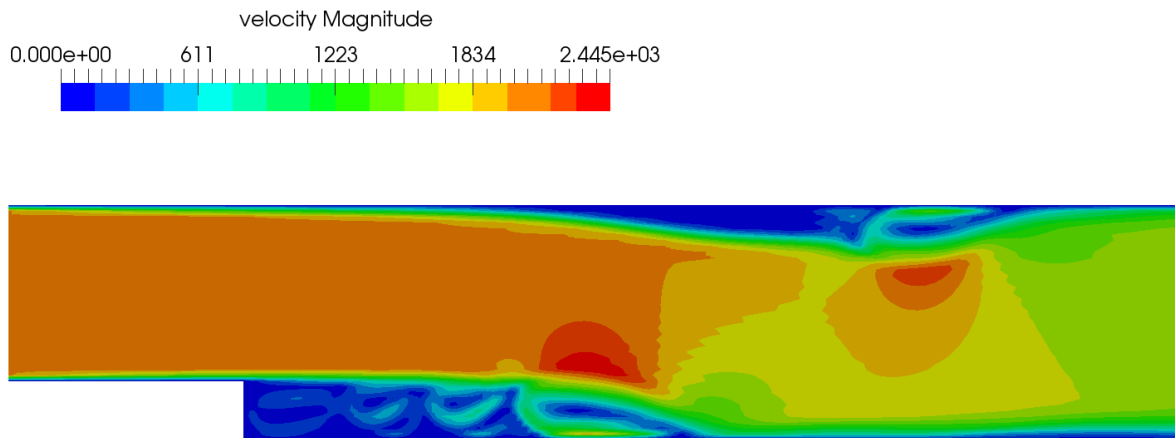
Слика 5.24 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150



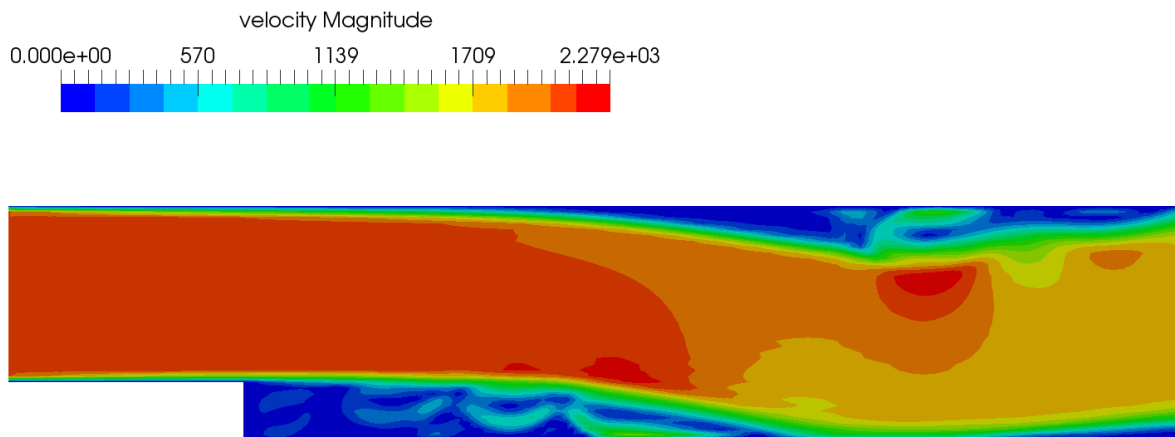
Слика 5.25 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200



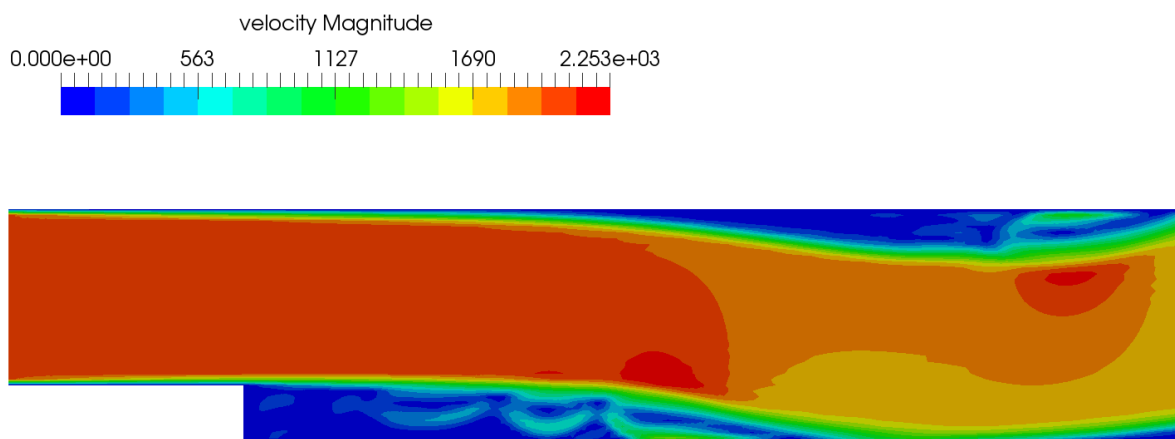
Слика 5.26 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250



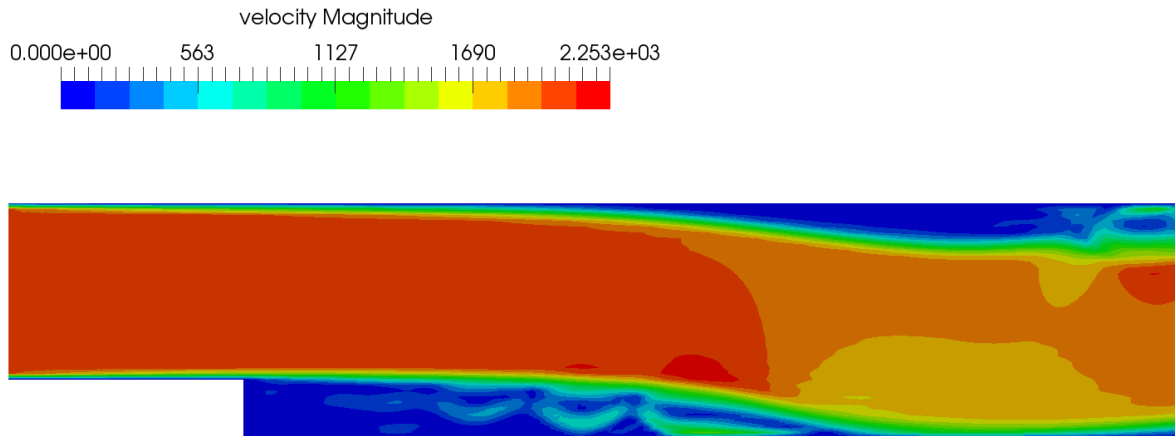
Слика 5.27 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300



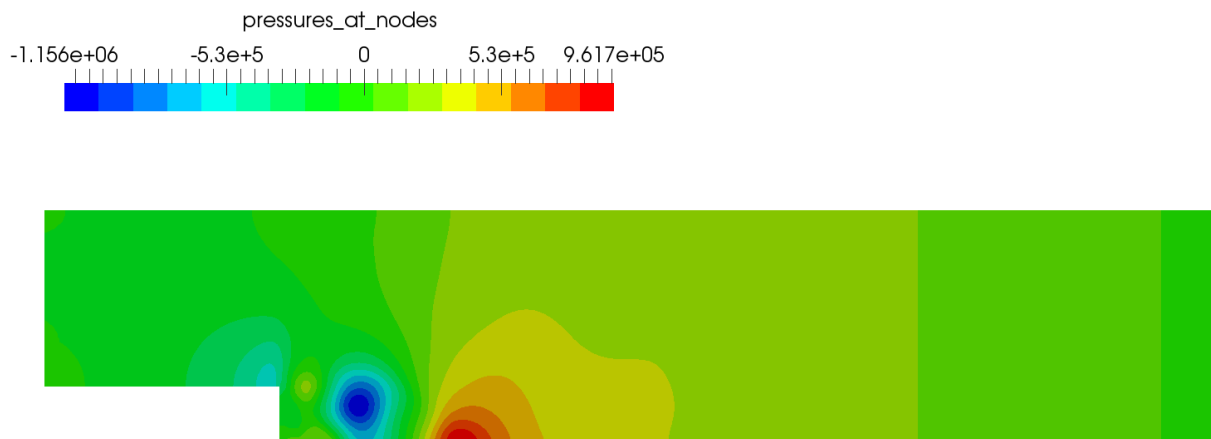
Слика 5.28 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350



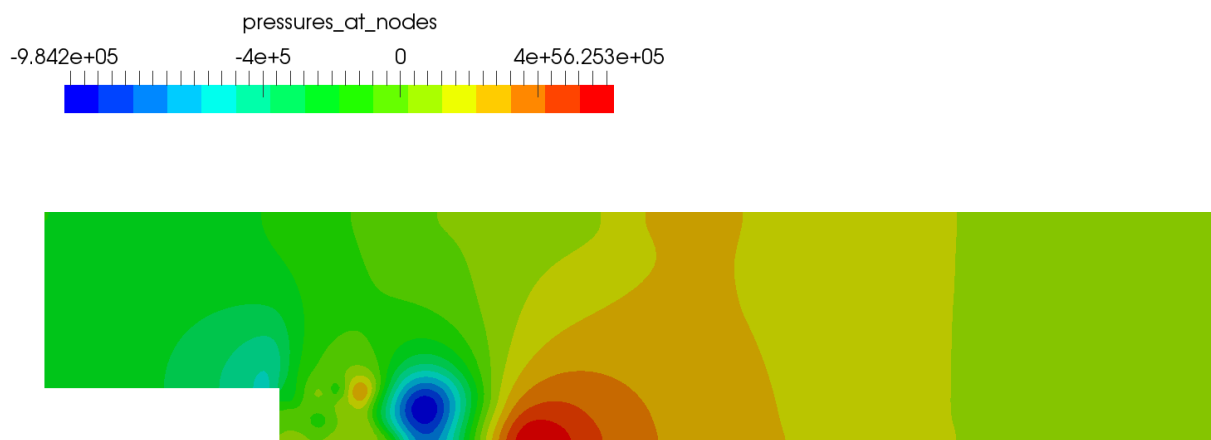
Слика 5.29 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400



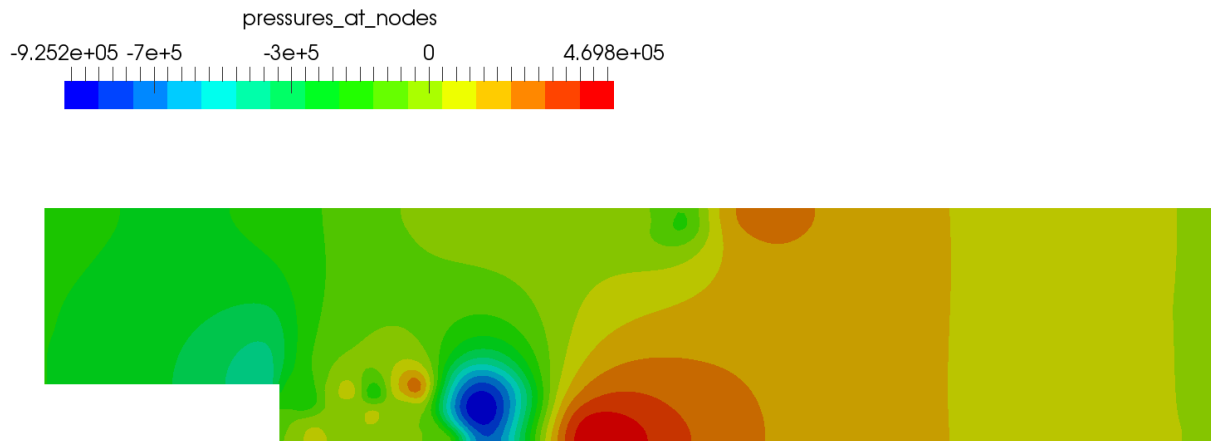
Слика 5.30 Расподела брзине струјања флуида у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450



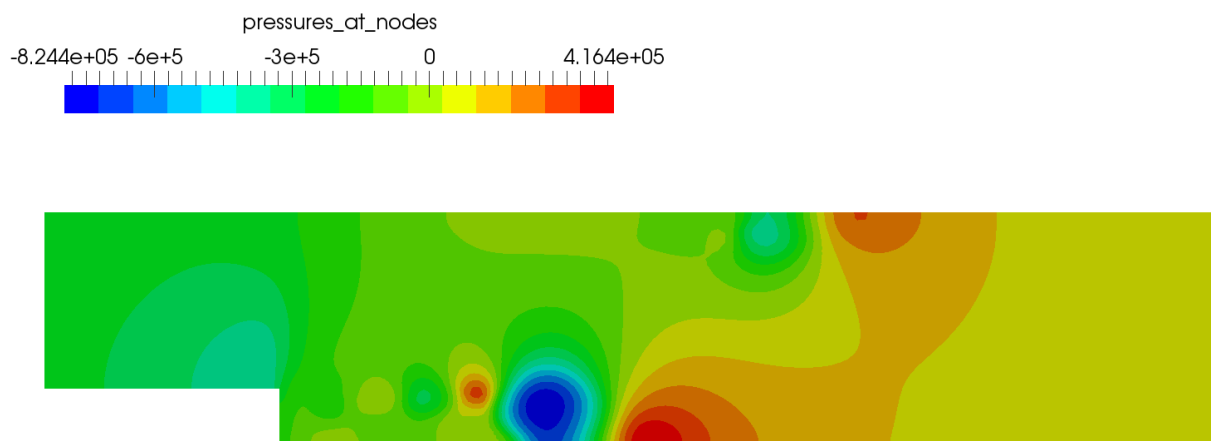
Слика 5.31 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 50



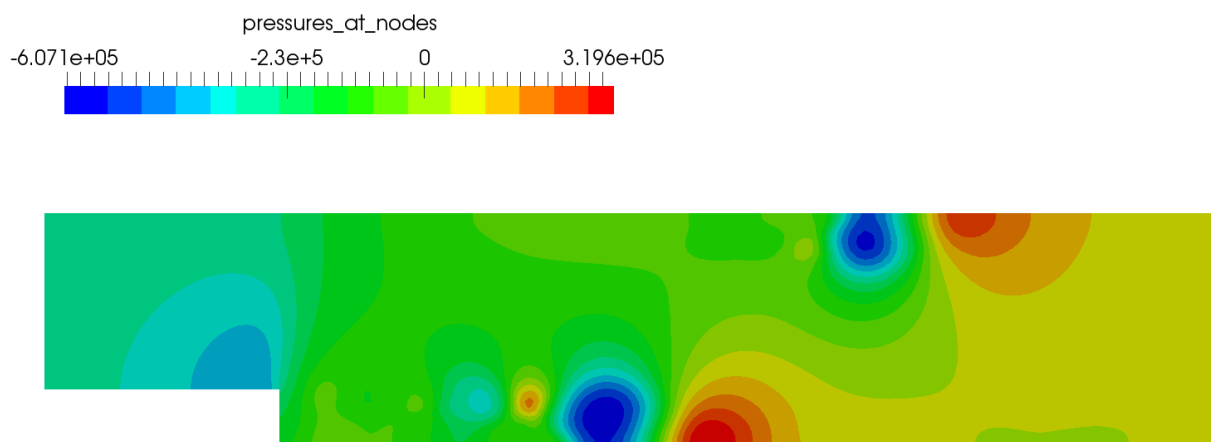
Слика 5.32 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 100



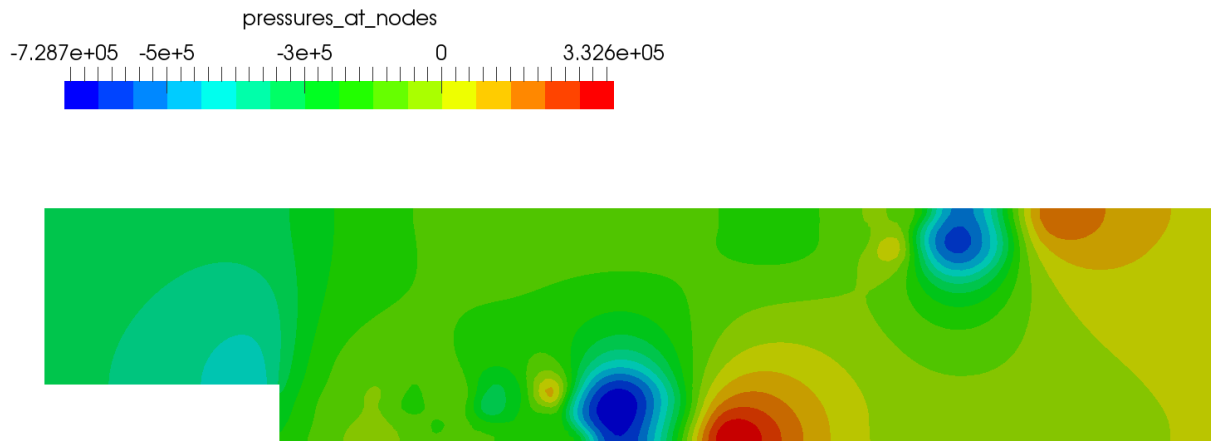
Слика 5.33 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150



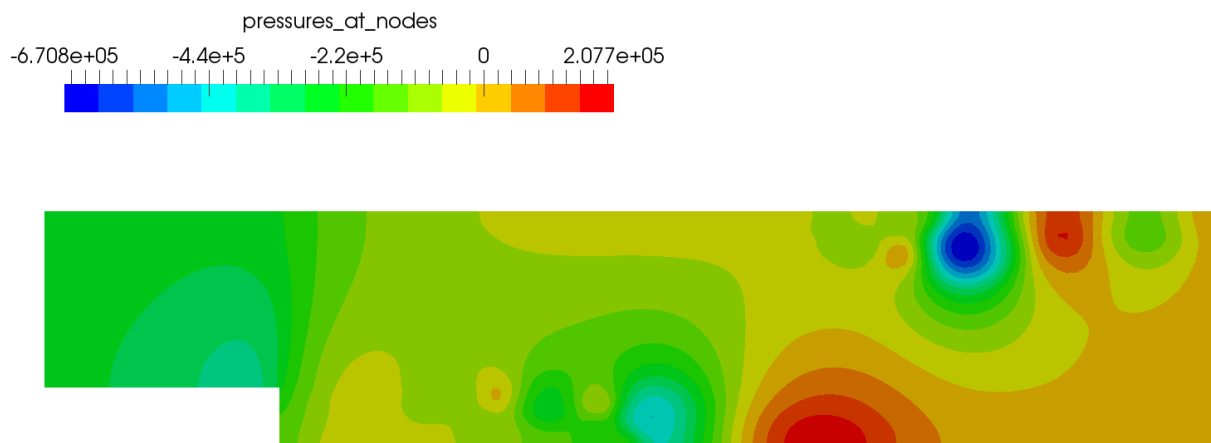
Слика 5.34 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200



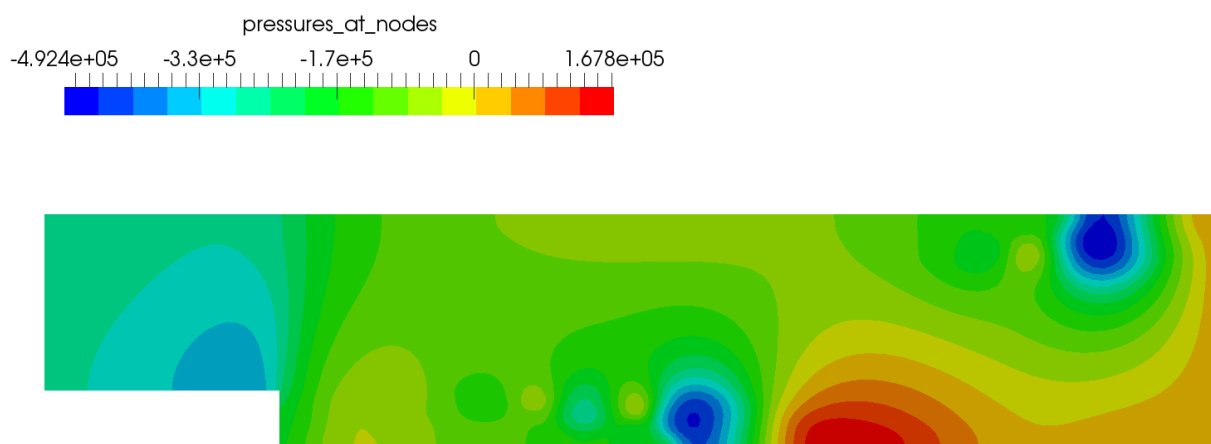
Слика 5.35 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250



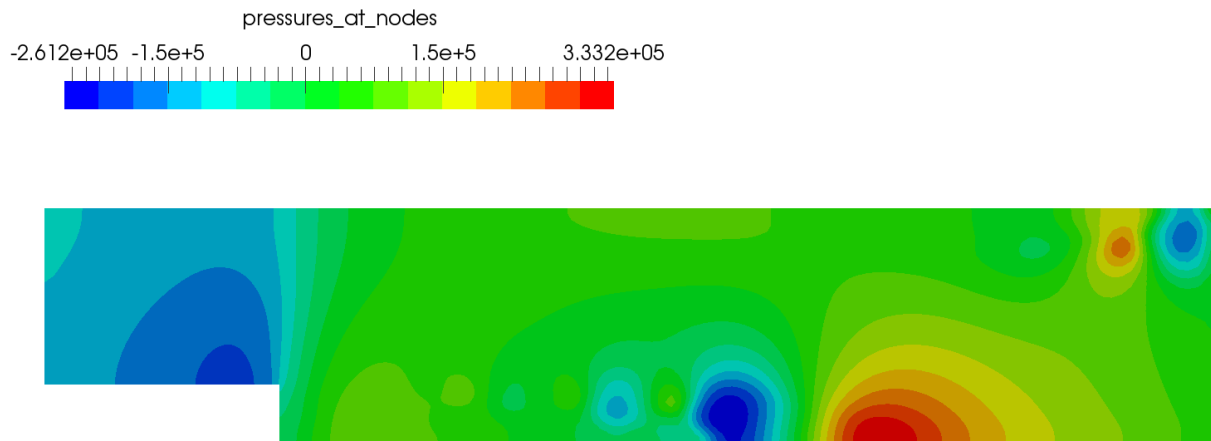
Слика 5.36 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300



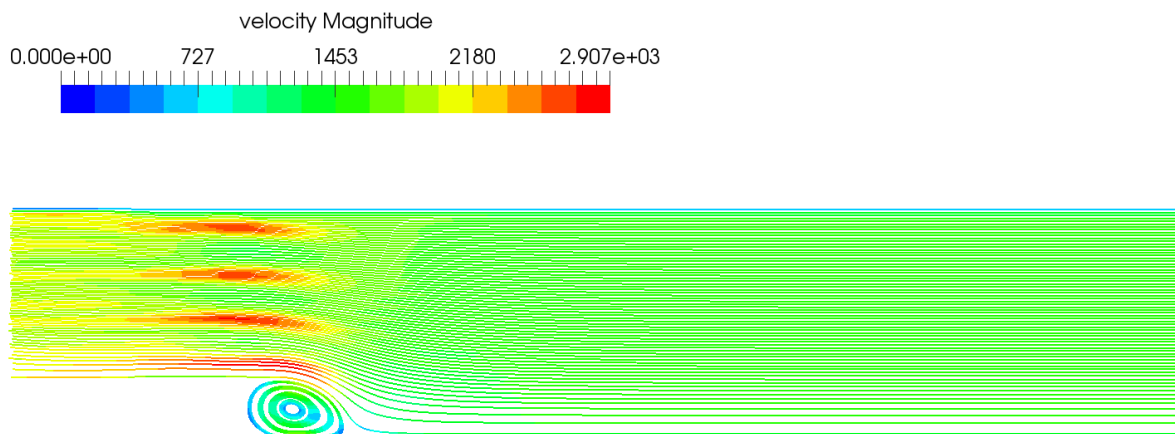
Слика 5.37 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350



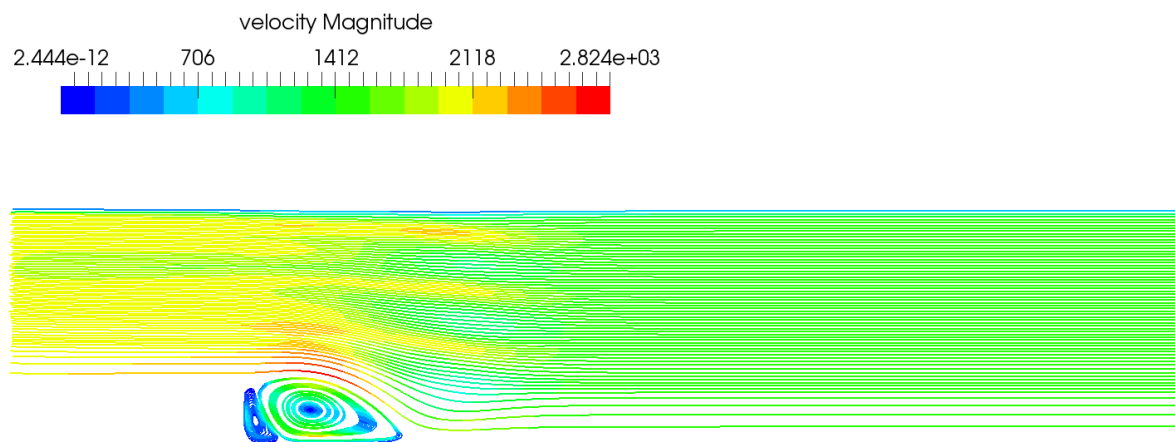
Слика 5.38 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400



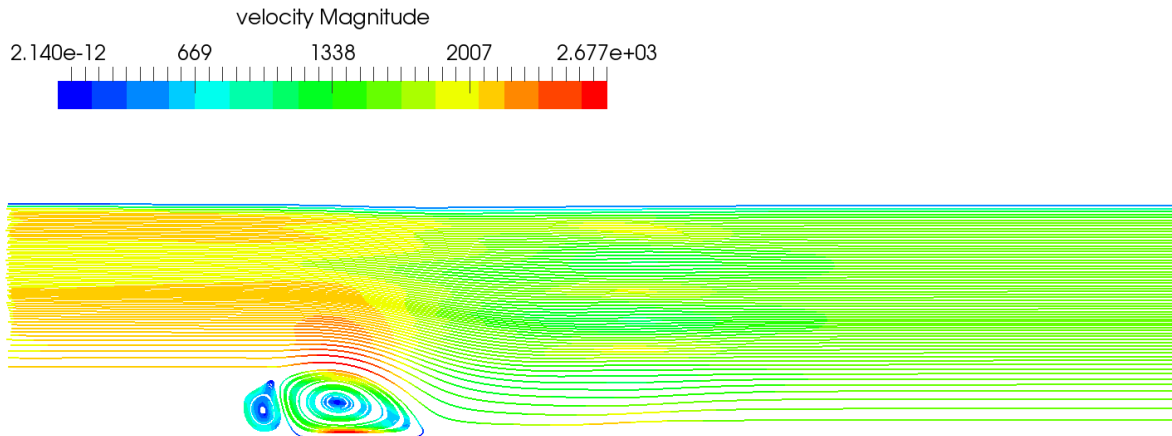
Слика 5.39 Поље пада притиска у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450



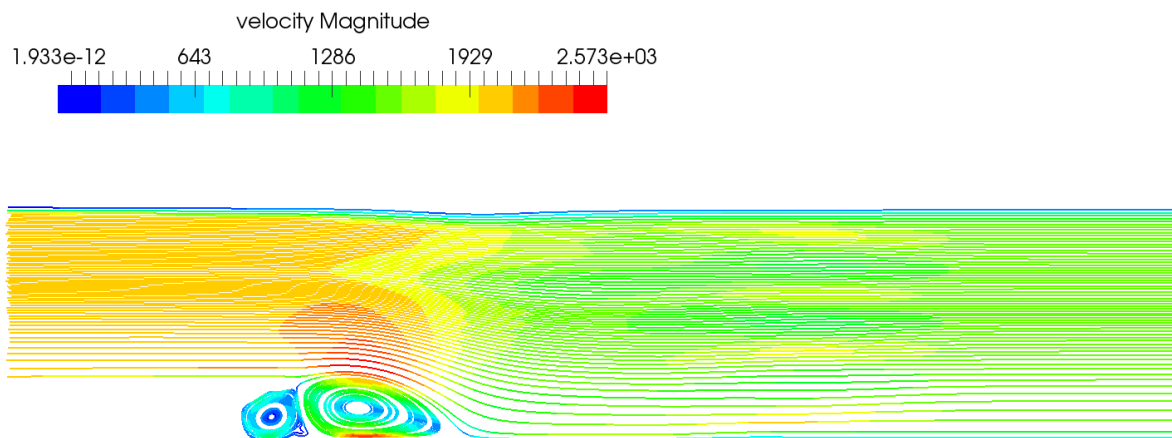
Слика 5.40 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 20



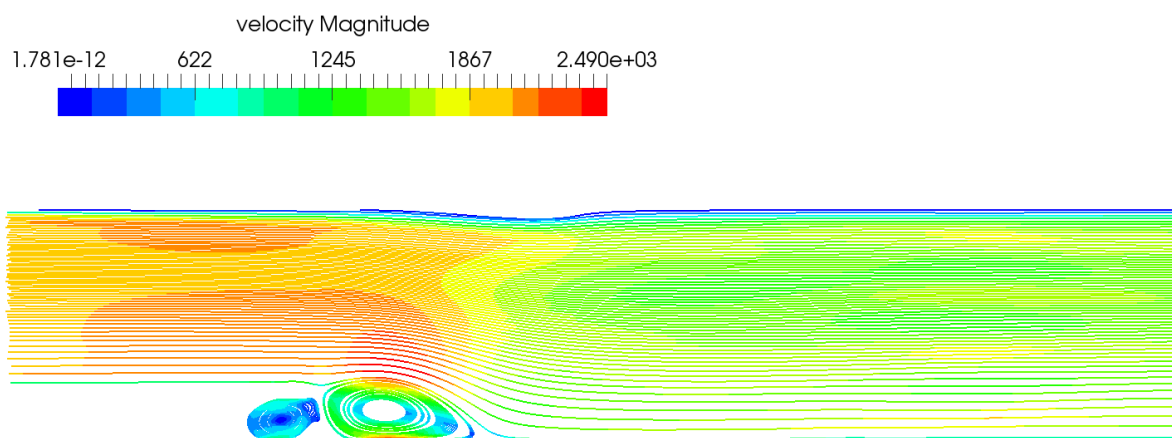
Слика 5.41 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 40



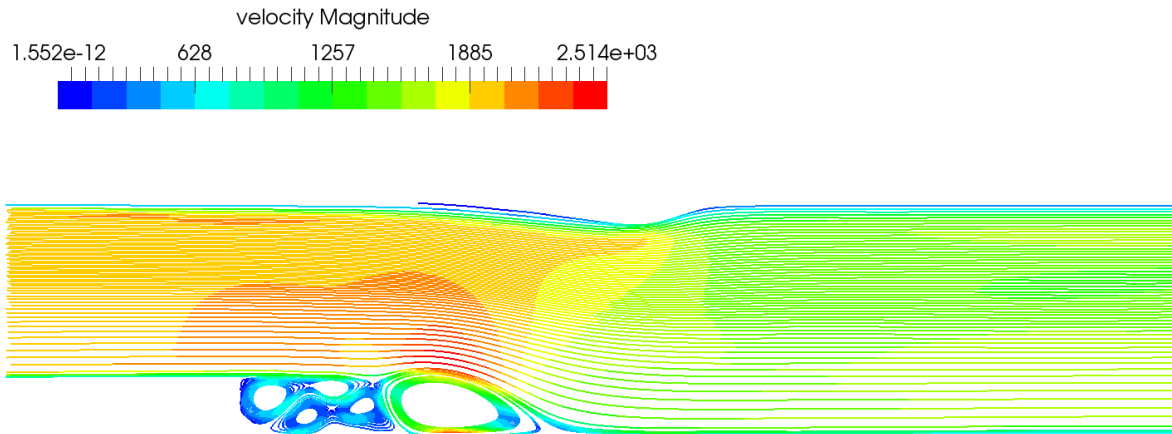
Слика 5.42 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 60



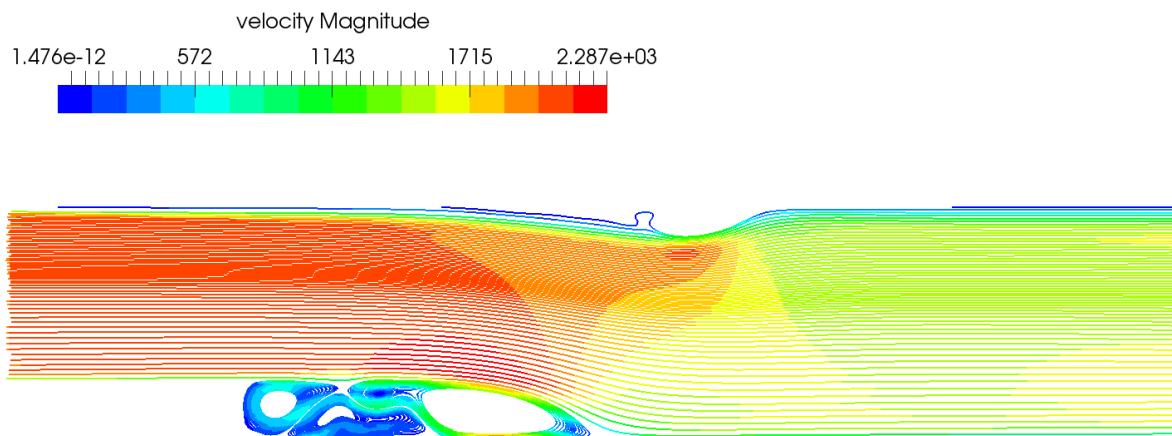
Слика 5.43 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 80



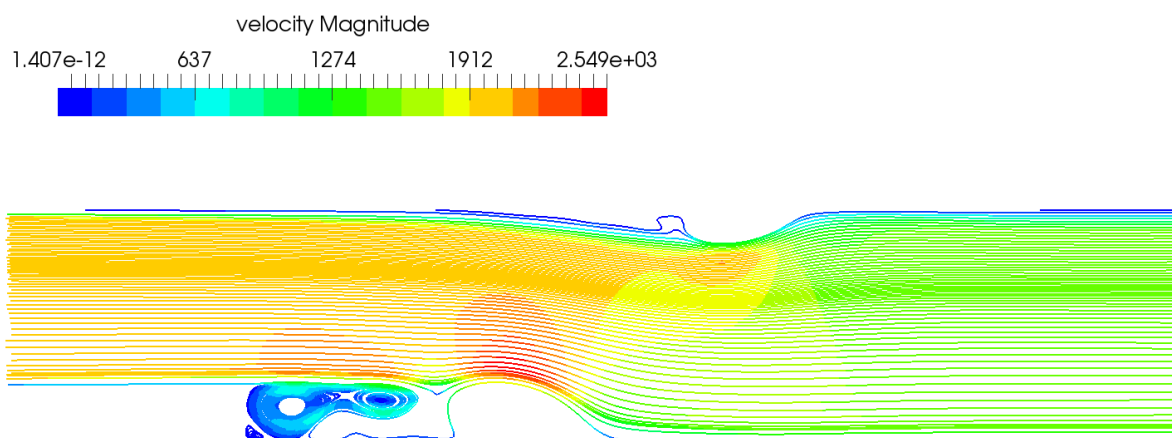
Слика 5.44 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 100



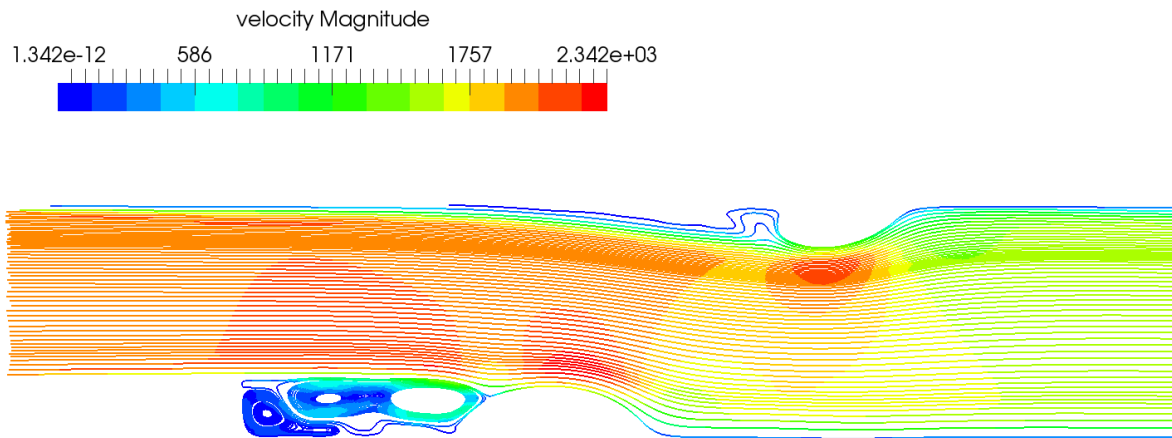
Слика 5.45 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 150



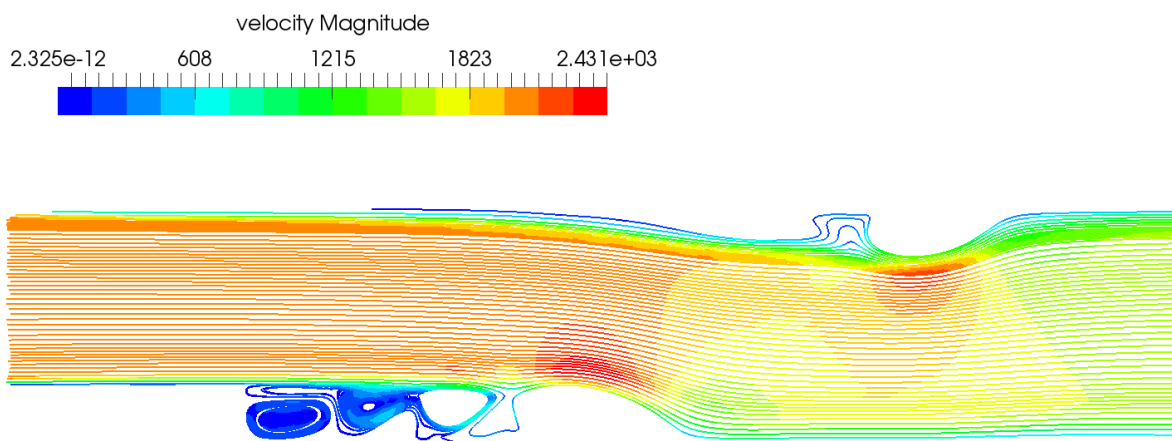
Слика 5.46 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 180



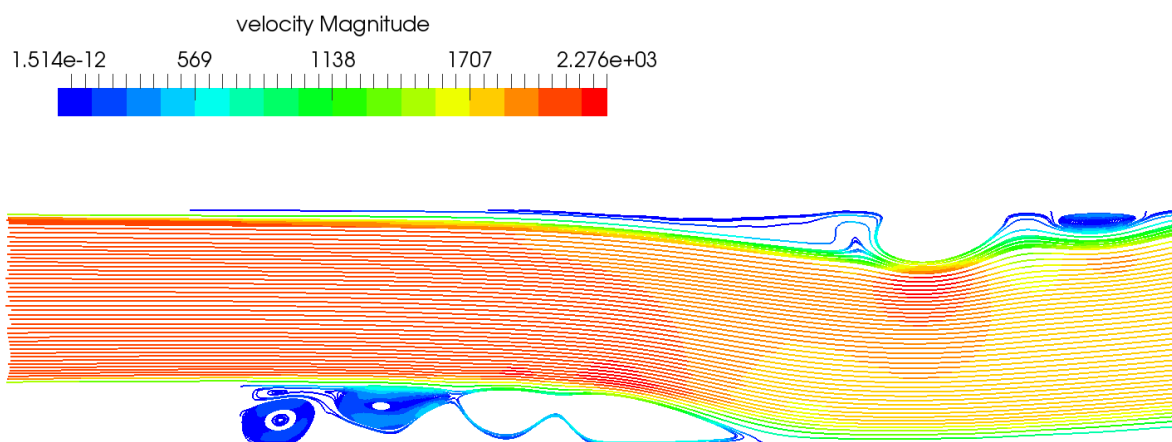
Слика 5.47 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 200



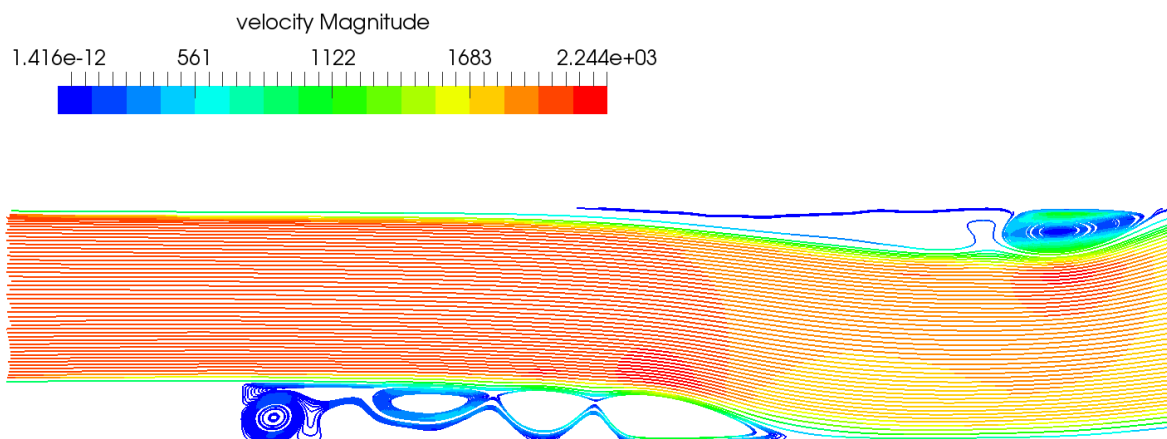
Слика 5.48 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 250



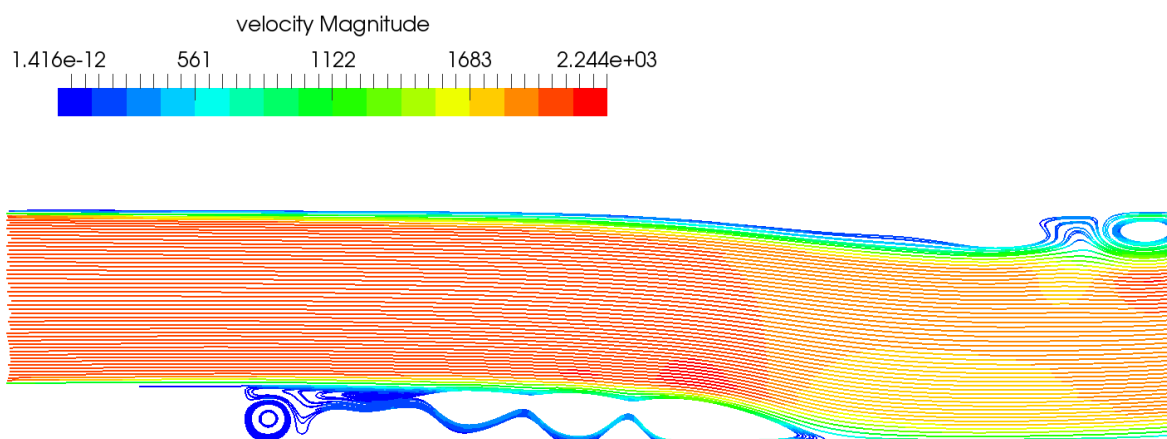
Слика 5.49 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 300



Слика 5.50 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 350

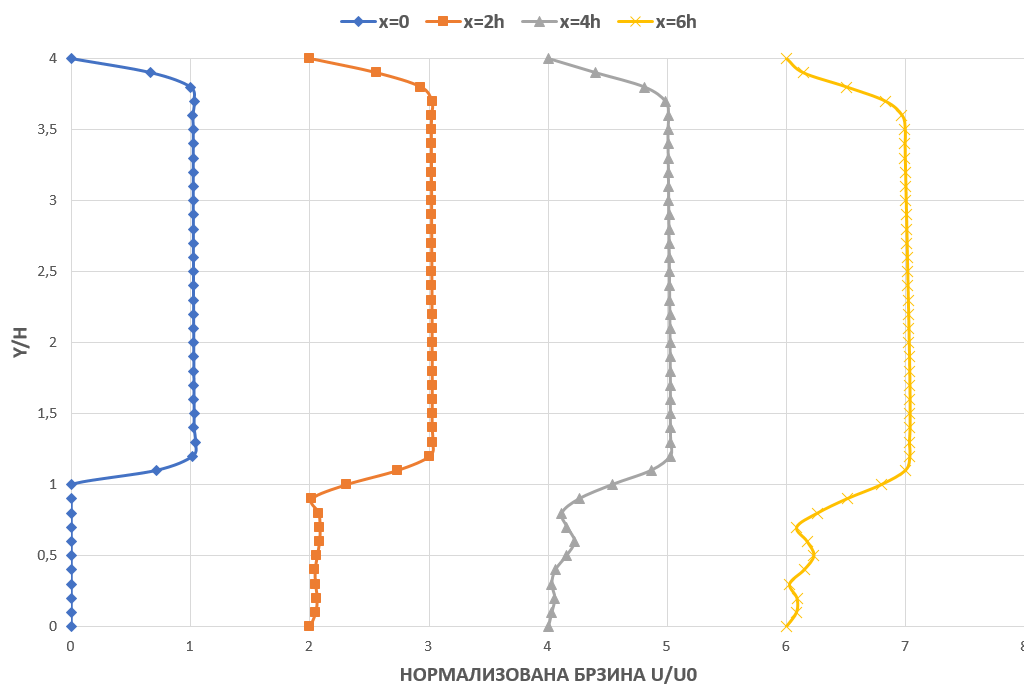


Слика 5.51 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 400



Слика 5.52 Струјнице при струјању у каналу са степеником, LES турбулентни модел, корак 450

Дијаграмски резултати брзине струјања приказани су на слици 5.53 за корак 400 у симулацији. Овај корак је узет као репрезентативни из разлога што је код њега већ у великој мери развијено турбулентно струјање флуида. Брзина струјања флуида је нормализована ради лакшег приказа на дијаграму. Услед великих вртлога који се јављају иза степеника на доњем делу канала долази до померања границе где флуид пада на дно канала. Ова граница се налази негде око $X_r = 8H$ за временски корак 400 (слика 5.29).



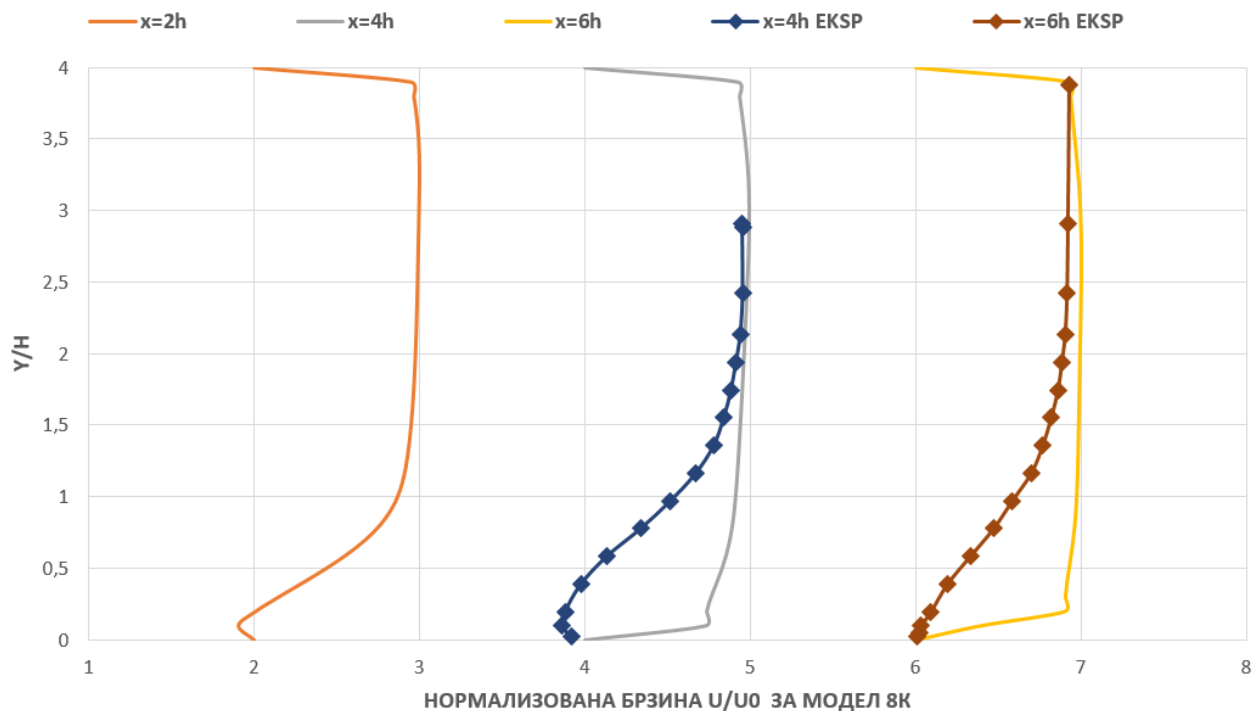
Слика 5.53 Дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r , LES турбулентни модел, корак 400

5.2 Утицај густине мреже на резултат код струјања у каналу са степеником

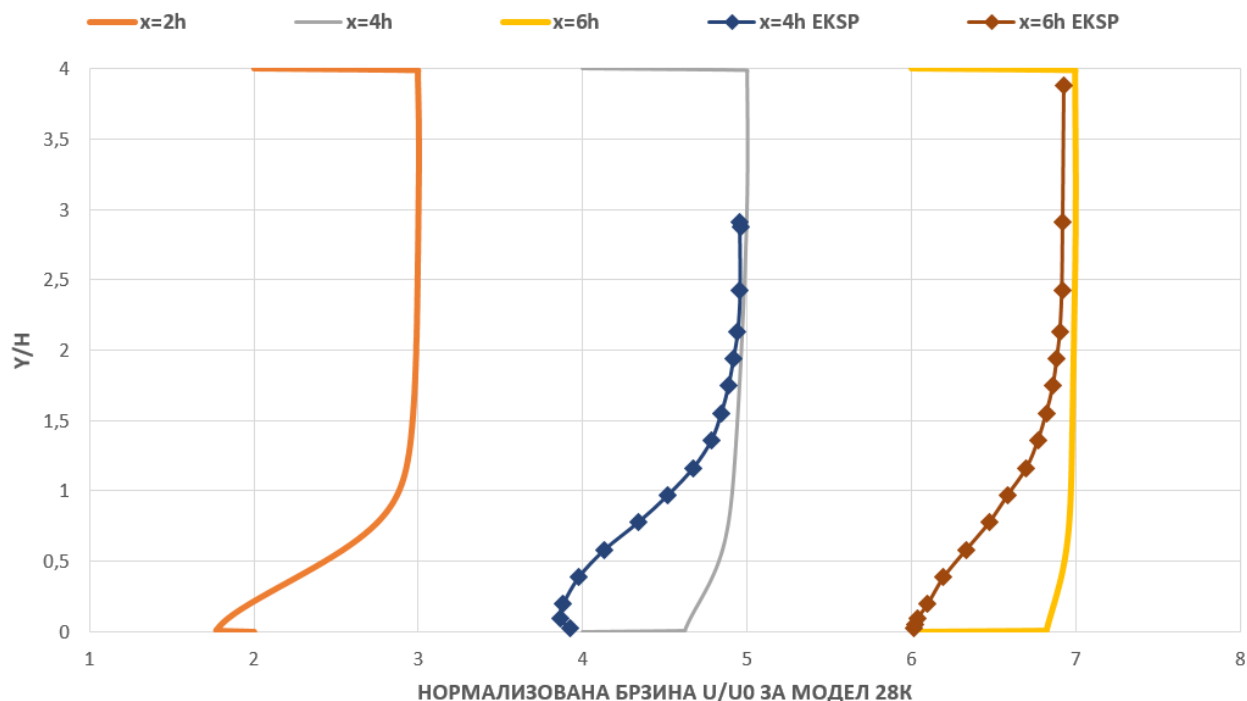
Густина мреже код метода коначних елемената има битан утицај на крајњи резултат прорачуна. За поређење је узет претходни пример струјања флуида преко степеника из поглавља 5.1

Пример је моделиран као 2Д проблем и коришћене су следеће густине мреже: 8000 чворова, 28000 чворова, 35000 чворова и 50000 чворова. На следећим дијаграмима приказани су резултати за брзину струјања и експериментални резултати упоредно за различите додирне дужине после степеника: $2H$, $4H$ и $6H$. Прорачун је извршен са $k-\omega$ турбулентним моделом као нестационарно струјање са улазним подацима као у поглављу 5.1.

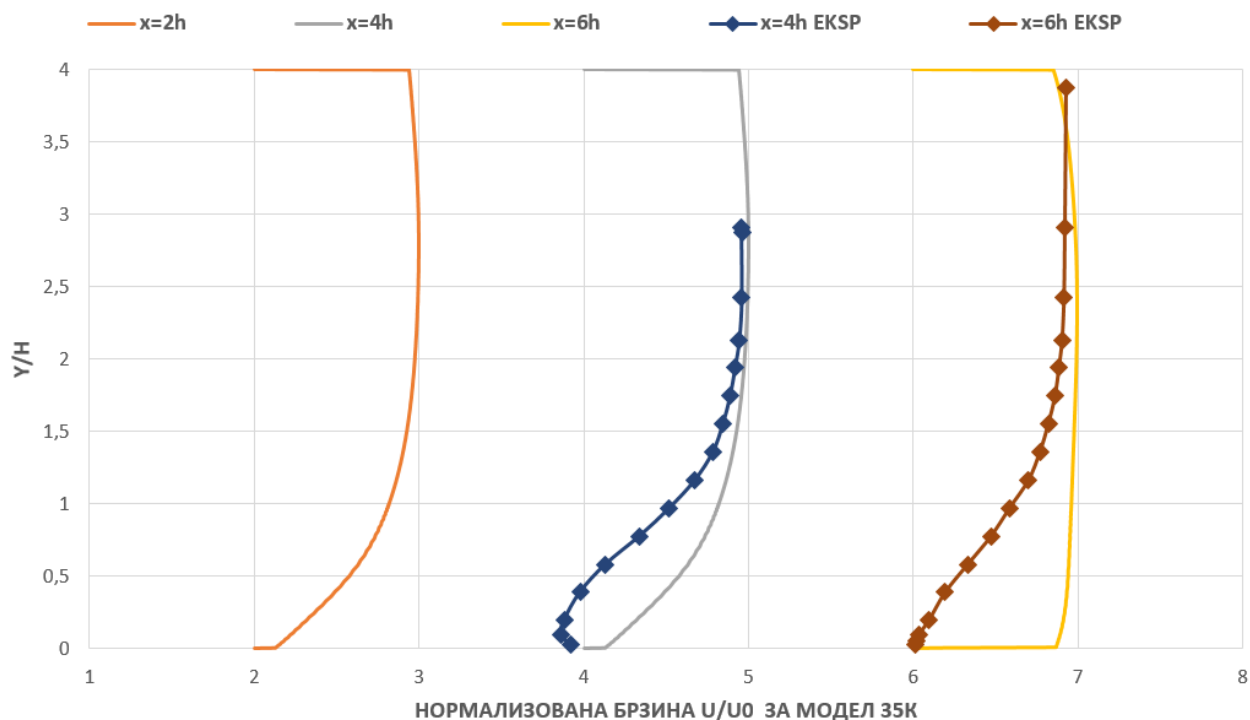
На сликама од 5.54 до 5.57 дати су упоредни дијаграми добијених резултата у софтверу *PAK-F* и експерименталних резултата из литературе [48]. Експериментални резултати су на дијаграму приказани као линије са квадратићима док су резултати из софтвера *PAK-F* приказани само линијама.



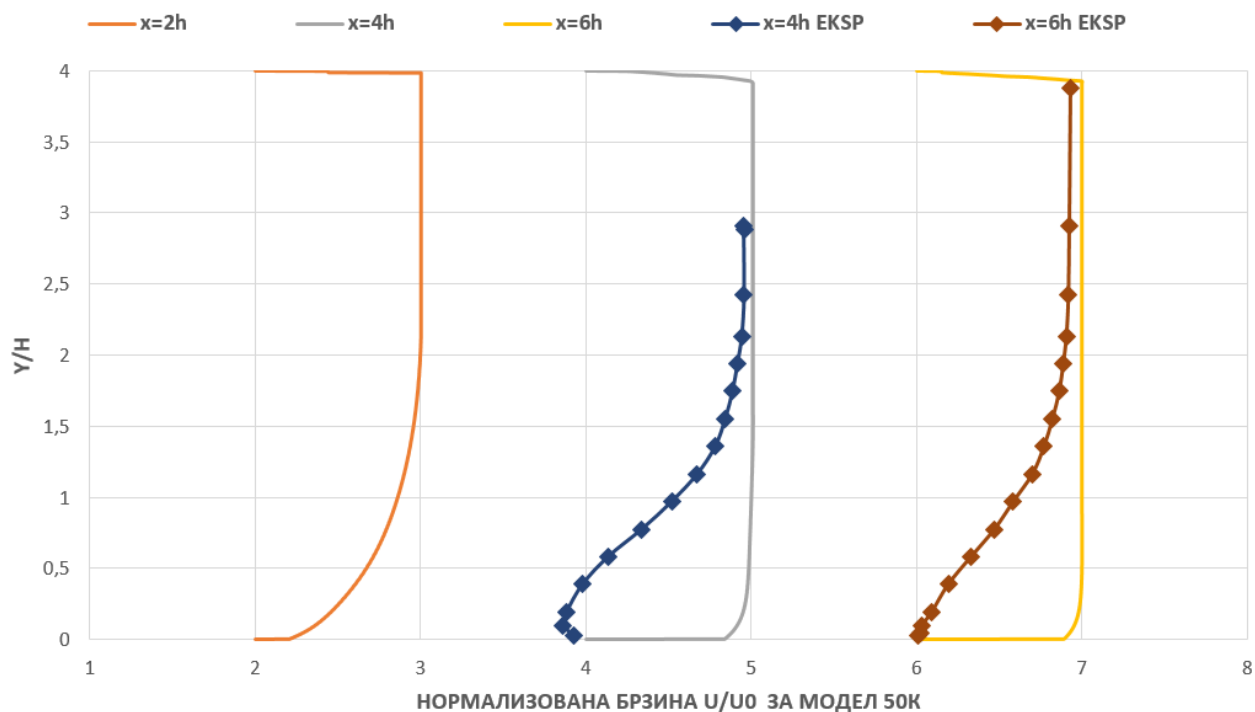
Слика 5.54 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 8000 чворова



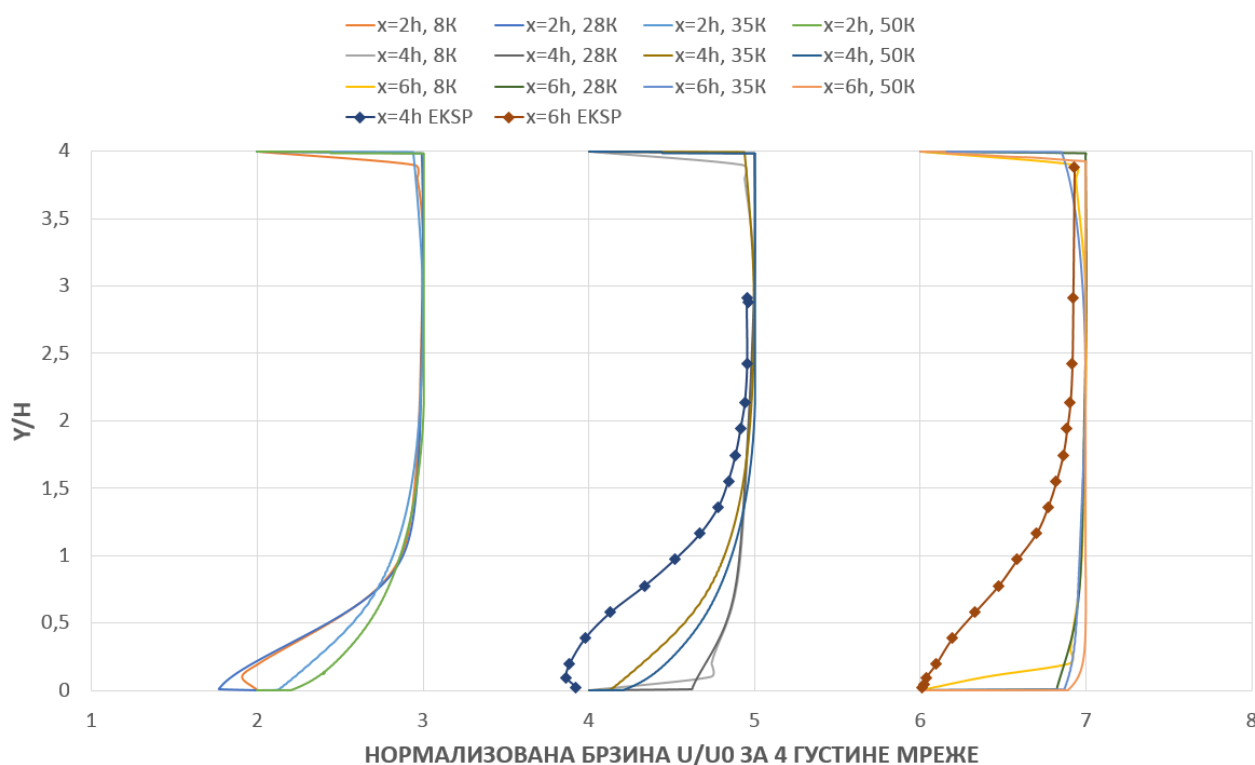
Слика 5.55 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 28000 чворова



Слика 5.56 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 35000 чворова



Слика 5.57 Упоредни дијаграм брзине струјања флуида за различите додирне дужине после степеника X_r и експерименталних резултата, $k-\omega$ турбулентни модел, мрежа од 50000 чворова



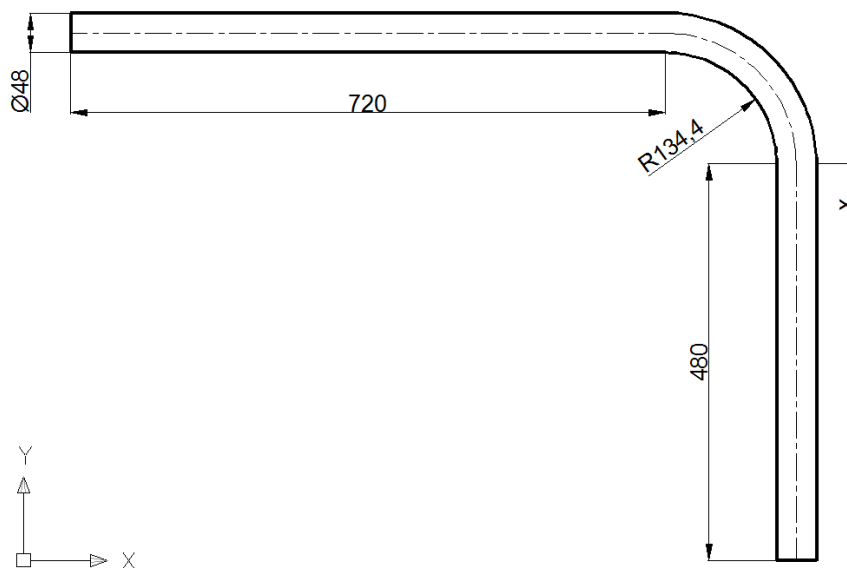
Слика 5.58 Утицај густине мреже коначних елемената на тачност резултата за различите додирне дужине после степеника X_r

На слици 5.58 приказан је збирни дијаграм за 4 густине мреже за пример струјања флуида преко степеника. Експериментални резултати су приказани за дужине $X_r = 4H$ и $X_r = 6H$. Може се извести закључак да се повећавањем густине мреже долази до тачнијих резултата у пределу изнад степеника, док се у делу испод степеника нумеричка тачноста положаја додирне тачке помера ка степенику, а струјање постаје све више турбулентно са тенденцијом пораста близу зидова.

5.3 Ламинарно и турбулентно струјање флуида у цеви кружног попречног пресека са кривином од 90°

У овом поглављу приказано је ламинарно и турбулентно струјање флуида у цеви кружног попречног пресека са кривином од 90° у софтверу *PAK-F*. Геометрија и димензије цеви дати су на слици 5.59. Радијус кривине цеви је 2,8 пута већи од пречника цеви. Пре кривине од 90° прво је креирана права цев дужине 720mm. Након кривине струјање флуида прелази у праву цев дужине 480mm.

Флуид коришћен у нумеричком експерименту је вода са $\rho = 1e^{-3} g / mm^3$ и динамичке вискозности $\mu = 1e^{-3} g / mm \cdot s$. За експериментална испитивања направљена је цев од плексигласа кроз коју протиче вода. Мерења брзине струјања флуида су вршена ласер-доплер методом и то при 0.58 пречника пре уласка флуида у кривину, на 30° , 60° и 75° степени у кривини, као и у равни постављеној на растојању један пречник према литератури [49].

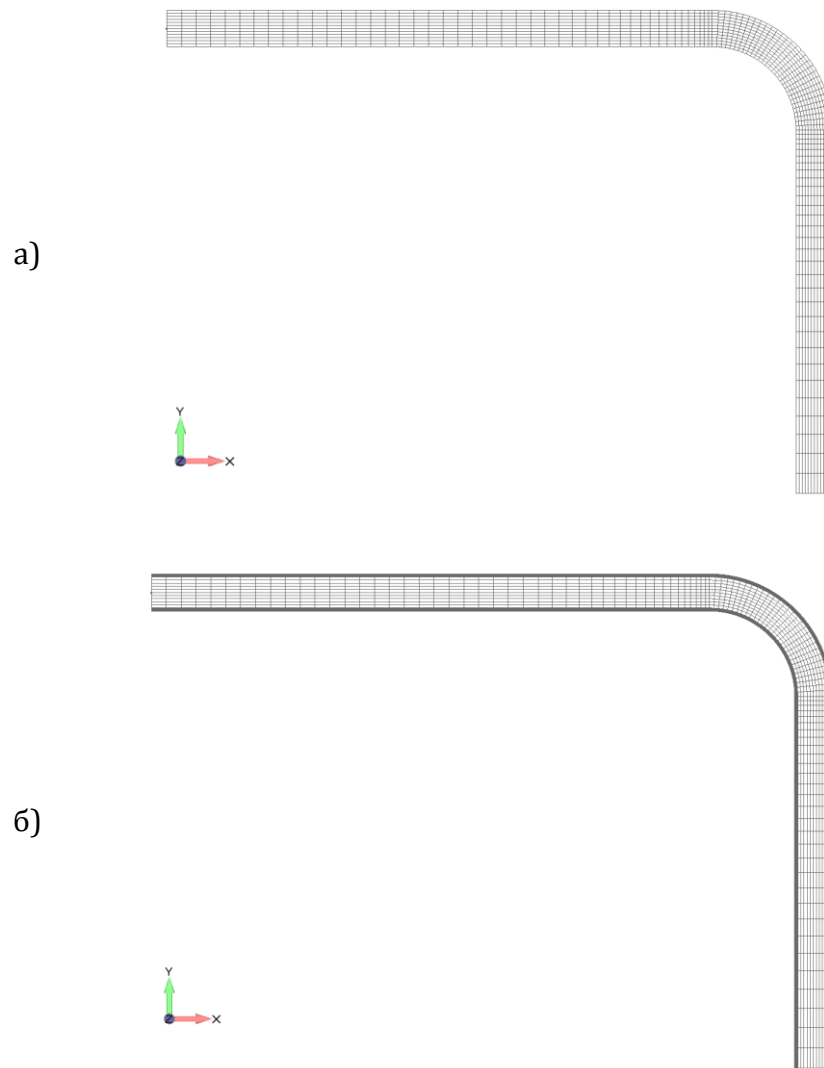


Слика 5.59 Геометрија цеви кружног попречног пресека са кривином од 90°

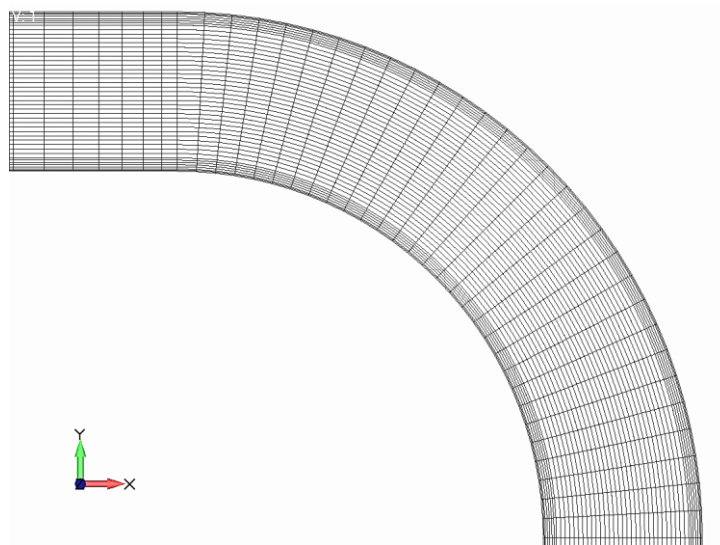
Нумерички резултати су упоређени са експерименталним резултатима у три случаја:

- а) Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 10.5mm/s, поглавље 5.3.1
- б) Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 23mm/s, поглавље 5.3.2
- ц) Турбулентно струјање при улазној осредњеној брзини флуида од 920mm/s, поглавље 5.3.3.

Мрежа коначних елемената је креирана за два случаја. За ламинарно струјање је коришћена мрежа са укупно 7980 коначних елемената, док је за турбулентно струјање коришћена мрежа од 36800 коначних елемената. На слици 5.60 приказана су оба случаја мреже коначних елемената, док је на слици 5.61 приказан детаљ мреже коришћене при турбулентном струјању. Детаљнија анализа резултата је дата у Закључку, поглавље 8.



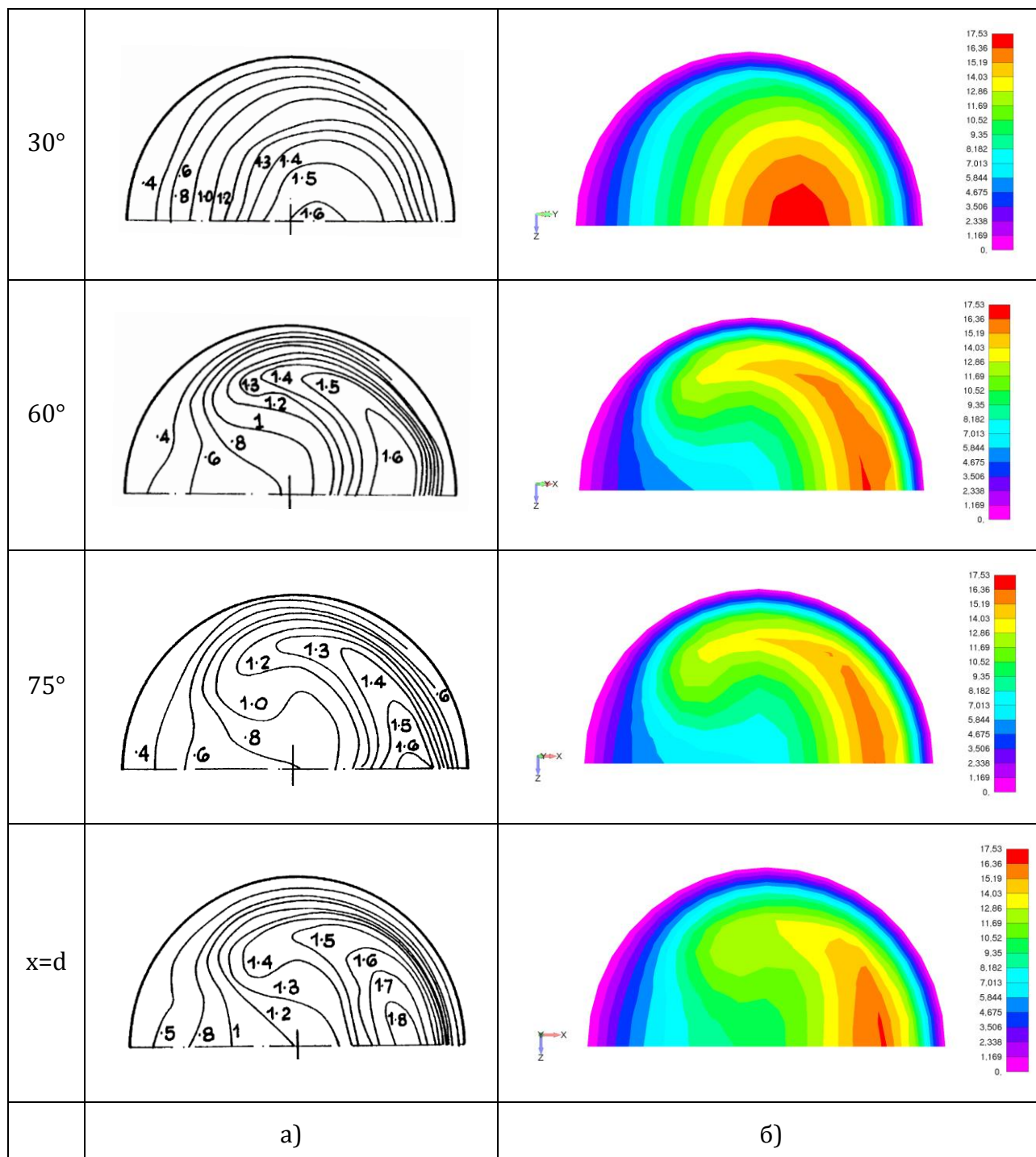
Слика 5.60 Мрежа коначних елемената цеви у кривини од 90° , а) мрежа од 7980 коначних елемената, б) мрежа од 36800 коначних елемената



Слика 5.61 Детаљ мреже коначних елемената цеви у кривини од 90°

5.3.1 Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 10.5mm/s

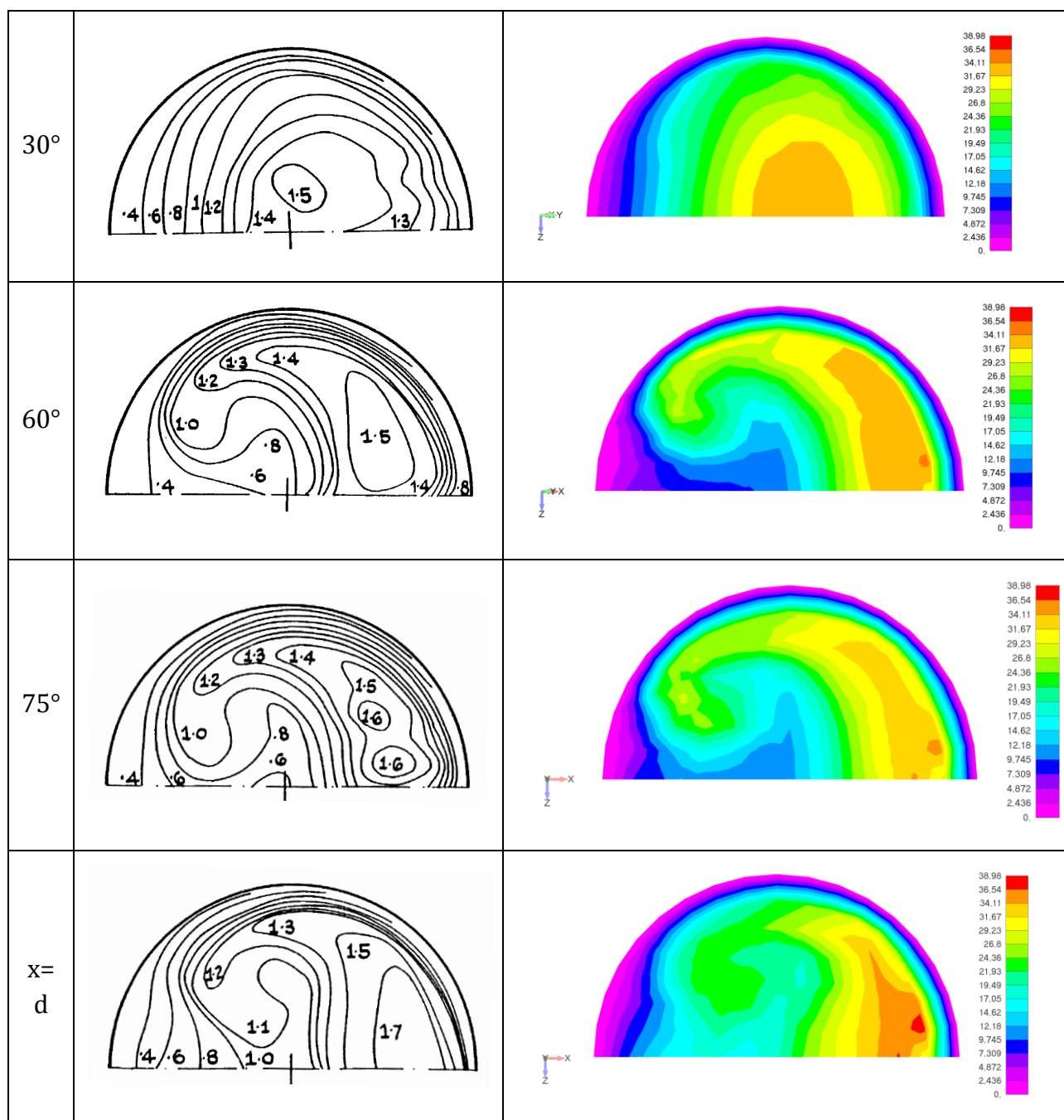
За ламинарно струјање у цеви при улазној брзини од $v_{inlet} = 10.5 \text{ mm/s}$ добија се Рејнолдсов број $Re = 500$. Поређење резултата са експериментом је приказано за четири пресека цеви: под углом од 30° , 60° , 75° у кривини и на растојању удаљеном један пречник од краја кривине ($x=d$). Експериментални резултати су приказани изолинијама у односу v/v_{inlet} , док су нумерички резултати приказани у пуном износу брзине v .



Слика 5.62 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 10.5mm/s , а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F

5.3.2 Ламинарно струјање при улазној брзини флуида од 23mm/s

За ламинарно струјање у цеви при улазној брзини флуида од $v_{inlet} = 23\text{mm/s}$ добија се Рејнолдсов број $Re = 1093$. Поређење резултата са експериментом је приказано за четири пресека цеви: под углом од 30° , 60° , 75° у кривини и на растојању удаљеном један пречник од краја кривине ($x=d$). Експериментални резултати су приказани изолинијама у односу v/v_{inlet} , док су нумерички резултати приказани у пуном износу брзине v .

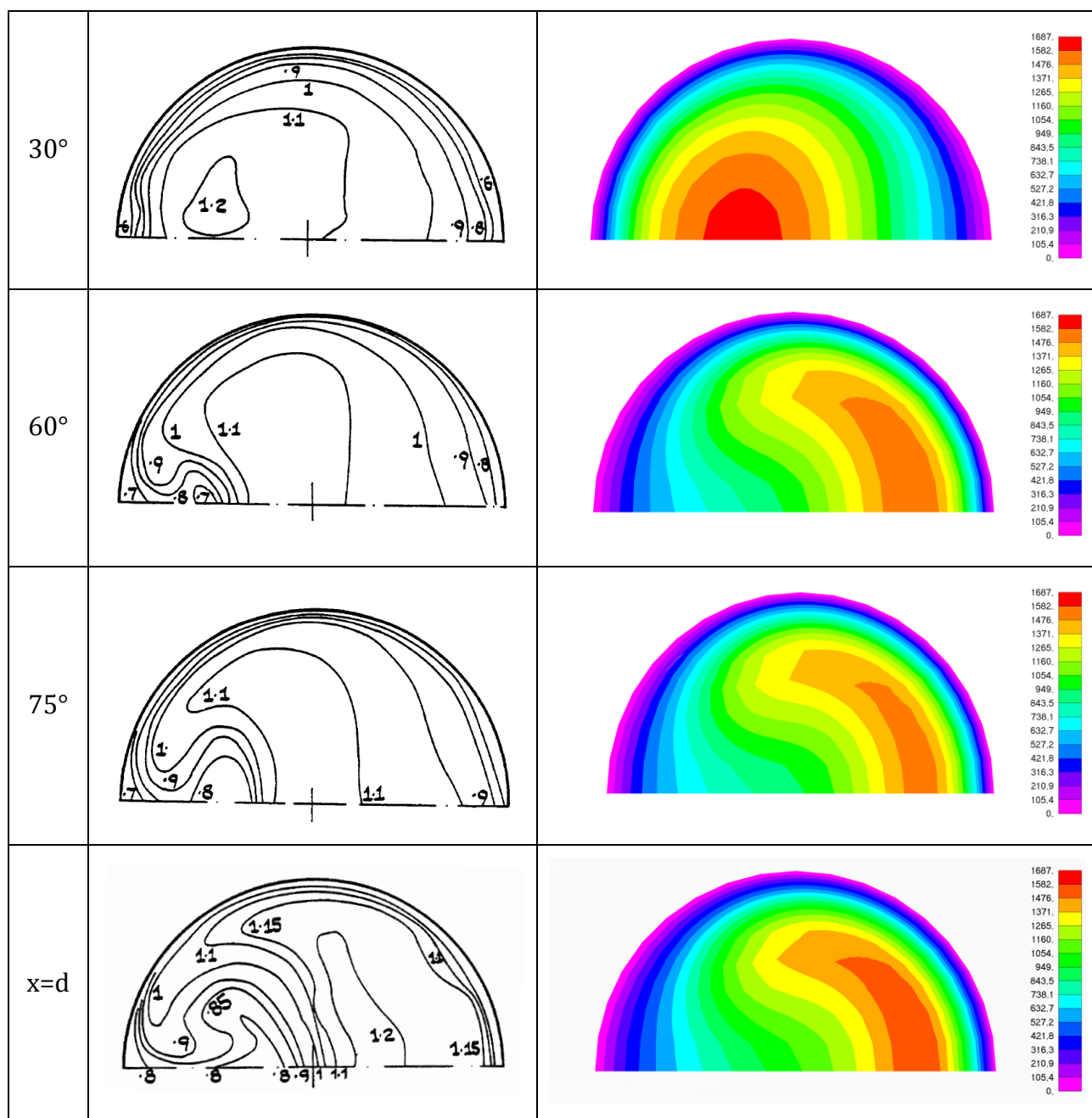


а)	б)
----	----

Слика 5.63 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 23 mm/s, а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F

5.3.3 Турбулентно струјање при улазној осредњеној брзини флуида од 920mm/s

За турбулентно струјање у цеви при улазној осредњеној брзини флуида од $v_{inlet} = 920\text{mm/s}$ добија се Рејнолдсов број $Re = 43000$. Поређење резултата са експериментом је приказано за четири пресека цеви: под углом од $30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ у кривини и на растојању удаљеном један пречник од краја кривине ($x=d$).



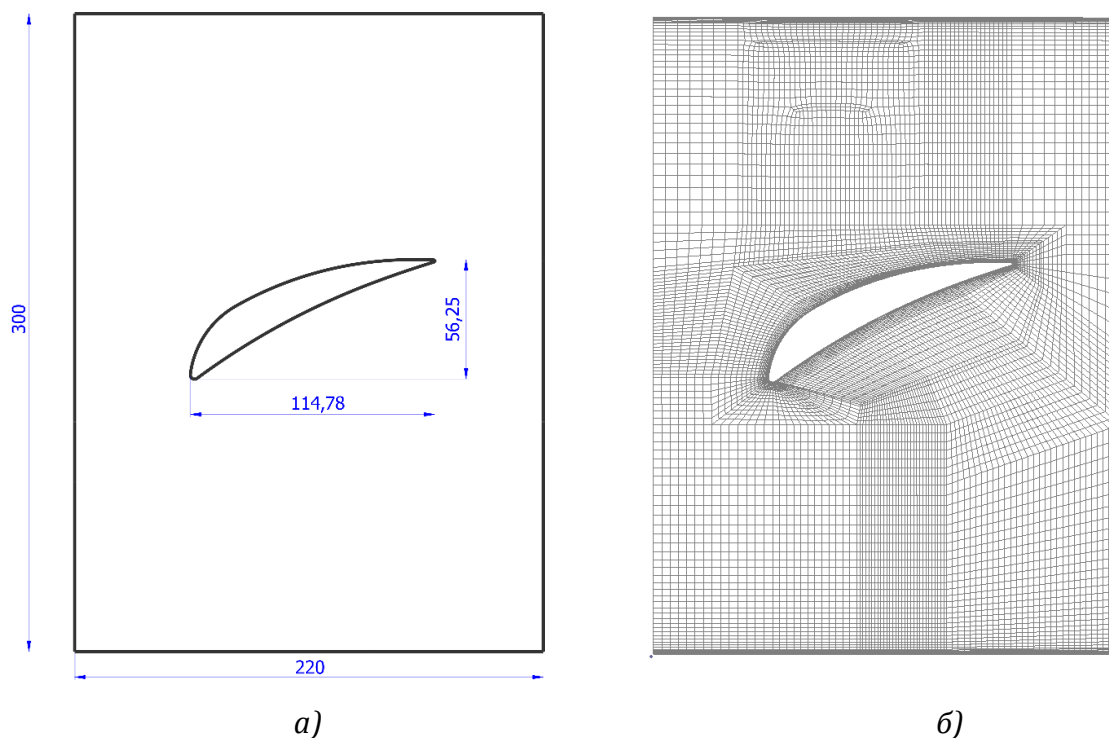
	а)	б)
--	----	----

Слика 5.64 Поређење са експерименталним подацима за улазну брзину струјања од 920m/s , а) Експериментална мерења у односу v/v_{inlet} , б) Нумеричка симулација у PAK-F

5.4 Турбулентно струјање нестишљивог флуида преко аеродинамичког профила

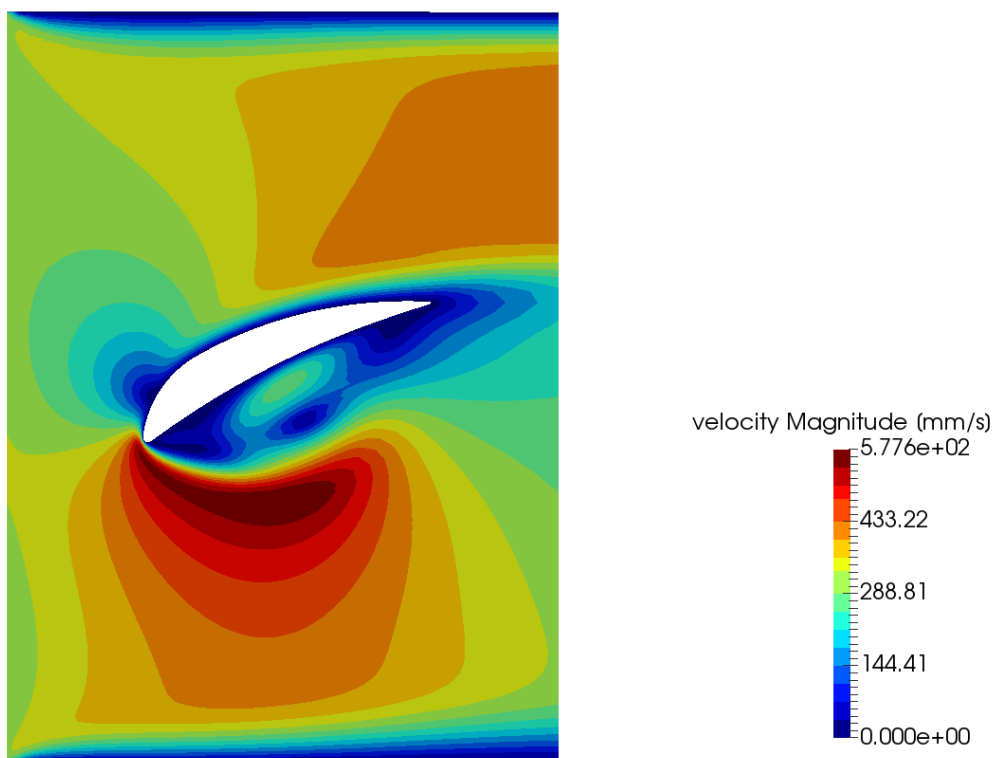
Пример прорачуна турбулентног струјања флуида приказан је на струјању нестишљивог флуида преко аеродинамичког профила. Профил је потопљен у воду и креће се осредњеном брзином $v_{inlet} = 0.3\text{m/s}$. Димензије канала дате су на слици 5.65.а. Рејнолдсов број за овај пример је $Re = 90000$ тако да се ради о потпуно турбулентном струјању.

Гранични услови на моделу су да је брзина на зидовима канала и на ивицама профила једнака нули. Почетна осредњена брзина од 0.3m/s задата је на левој страни модела подједнако у сваком чвору модела. Густина воде је $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, док је динамичка вискозност $\mu = 1\text{kg/m}\cdot\text{s}$. Модел коначних елемената садржи 11974 елемента и 12258 чворова (слика 5.65б). Проблем је разматран као 2Д симулација у равни. Прорачун је нестационаран у 200 временских корака од 0.01 секунду. После две секунде прорачун улази у стационарно стање.

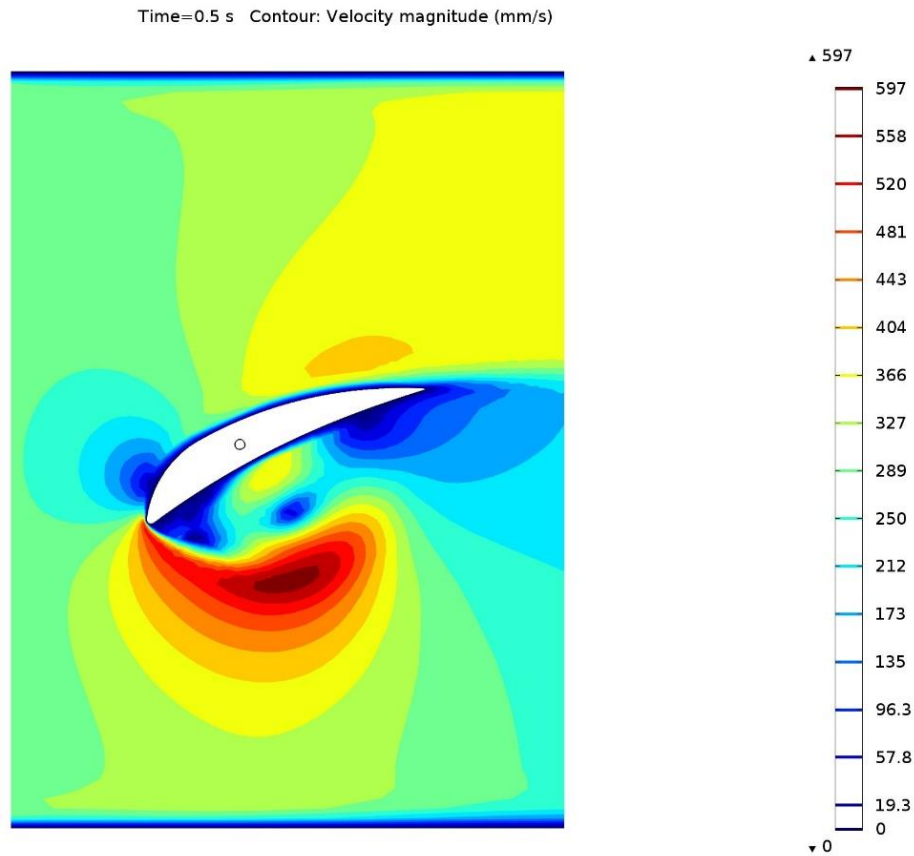


Слика 5.65 а) Геометрија аеродинамичког профила, б) Модел коначних елемената аеродинамичког профила

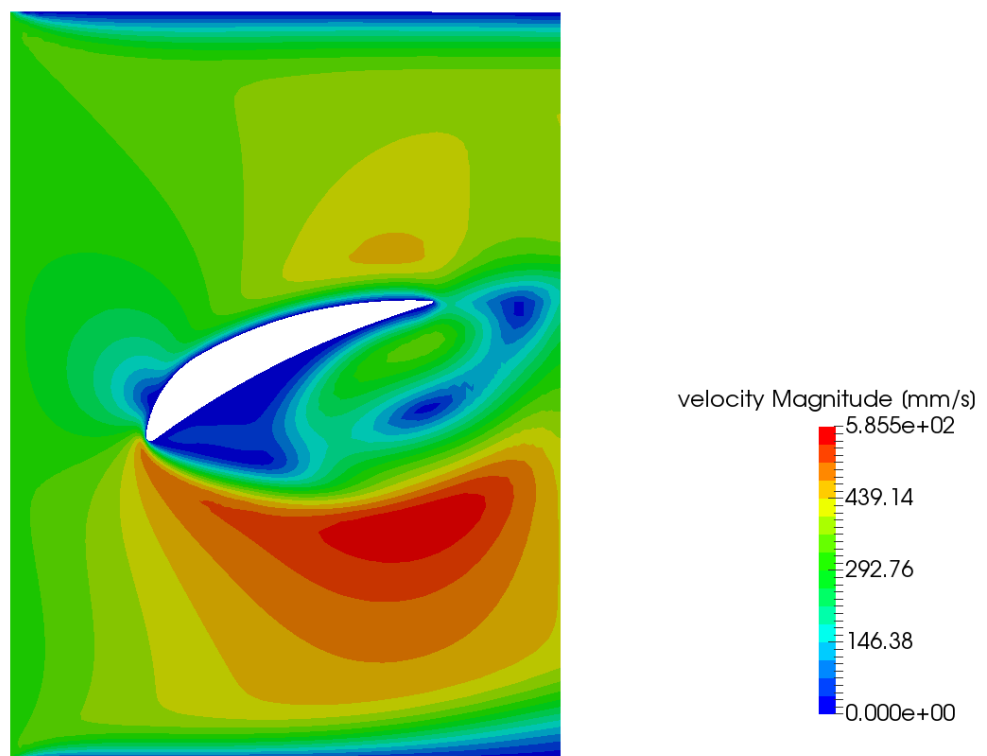
Приказани су упоредни резултати прорачуна у *PAKF* и *Comsol Multiphysics* у 4 карактеристична корака (50. корак – 0.5s, 100. корак – 1s, 150. корак – 1.5s и 200. корак – 2s). Дати су резултати за расподелу брзине струјања дуж профила (слике од 5.66 до 5.73) и струјнице које се јављају при опструјавању флуида око аеродинамичког профила (слике од 5.74 до 5.81). Анализа резултата дата је у Закључку, поглавље 8.



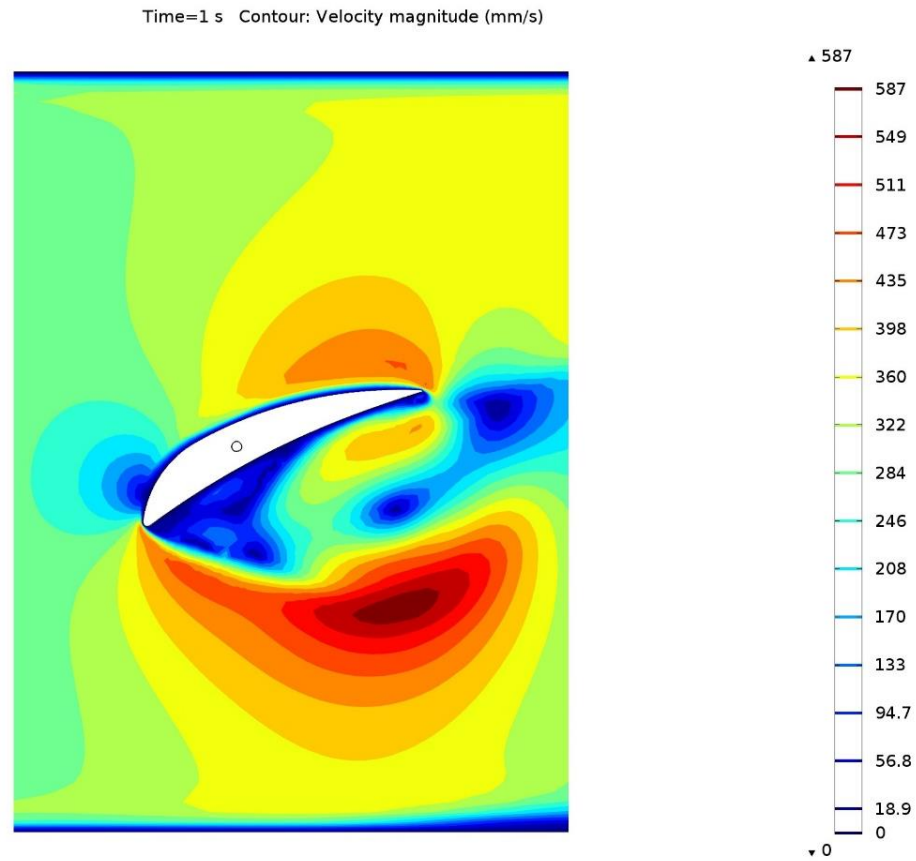
Слика 5.66 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 50, солвер *PAKF*



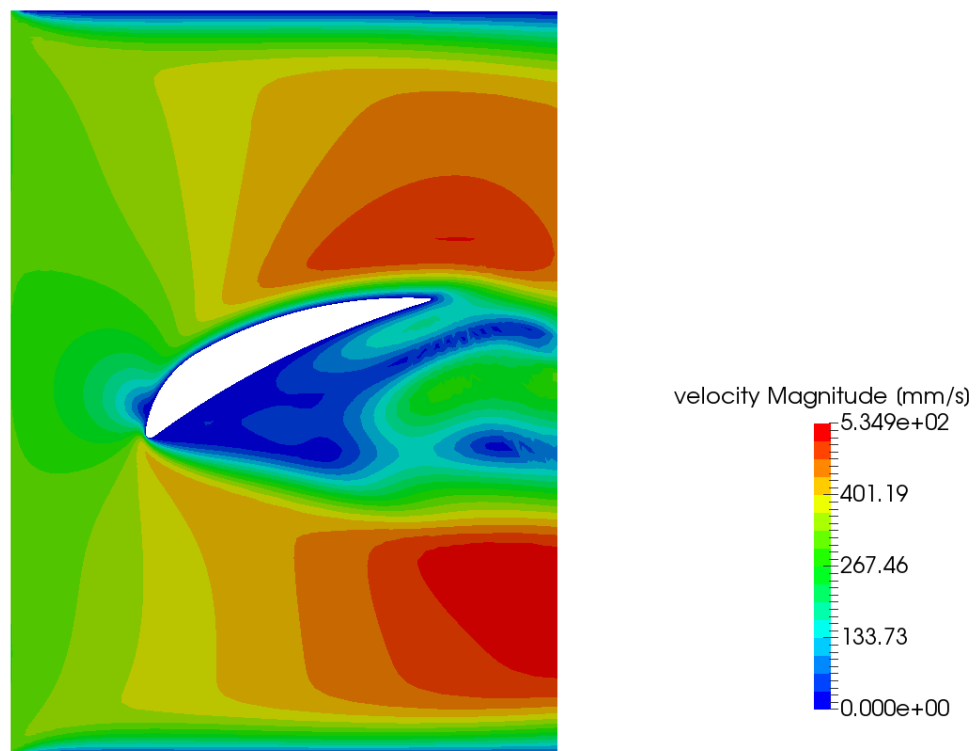
Слика 5.67 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 50, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



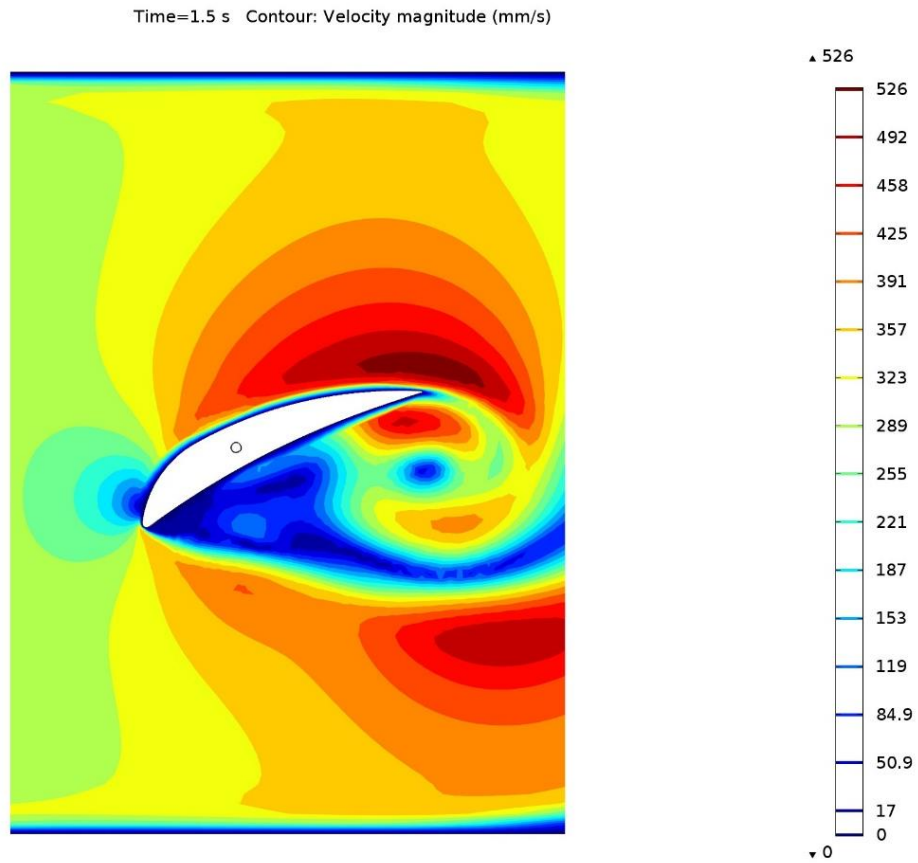
Слика 5.68 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 100, солвер RAKF



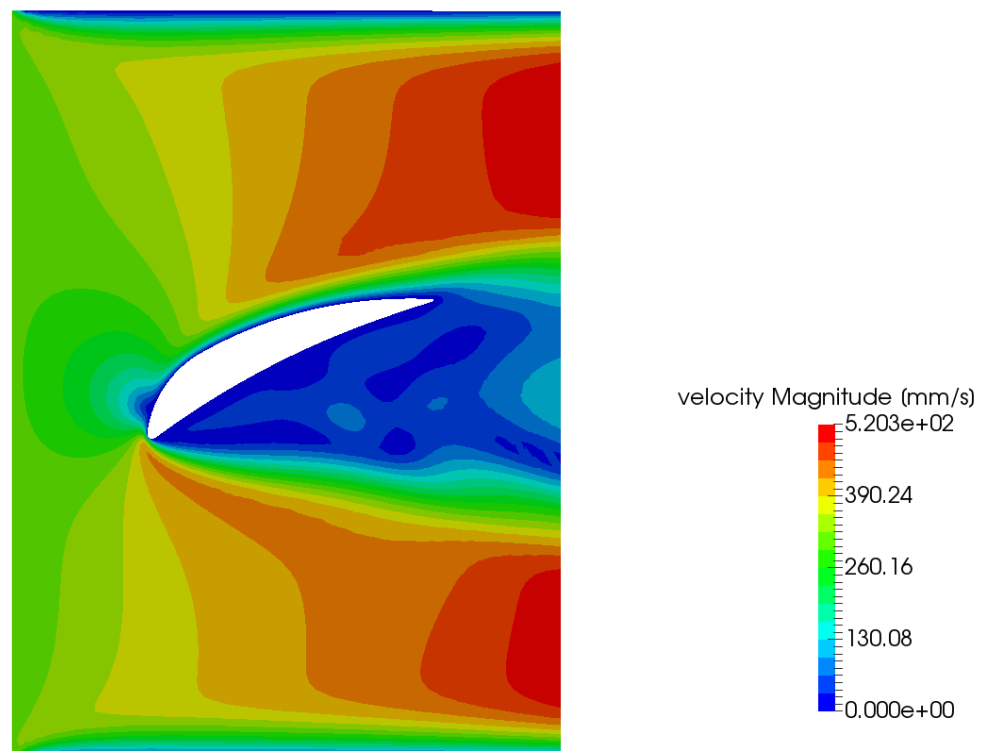
Слика 5.69 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 100, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



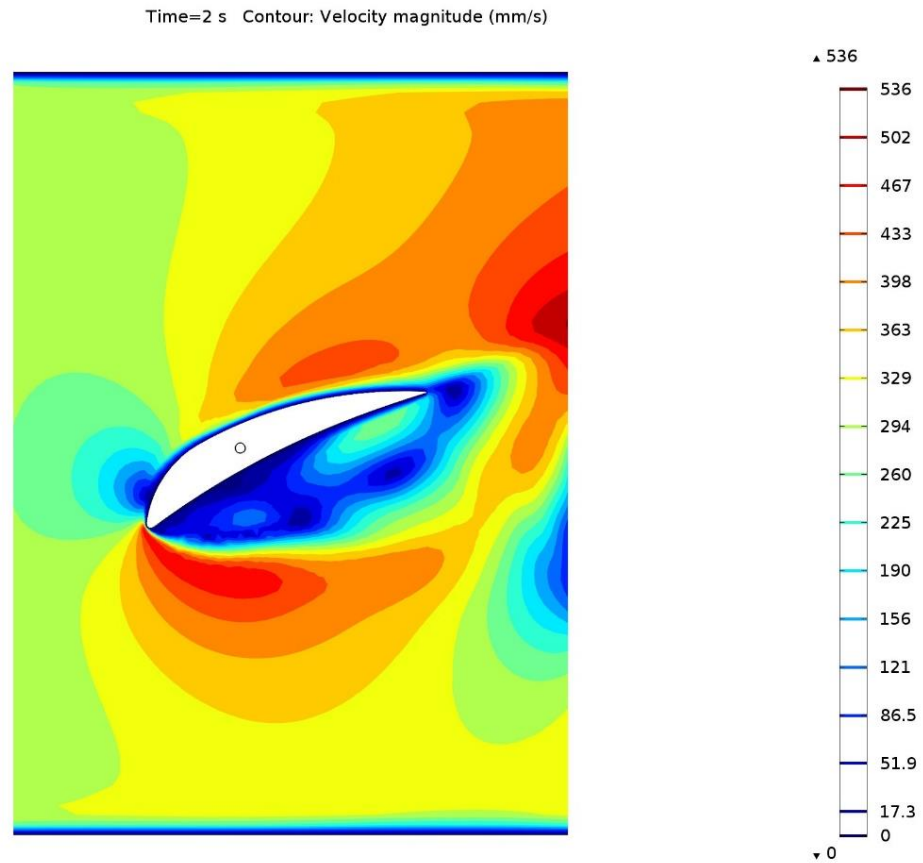
Слика 5.70 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 150, солвер RAKF



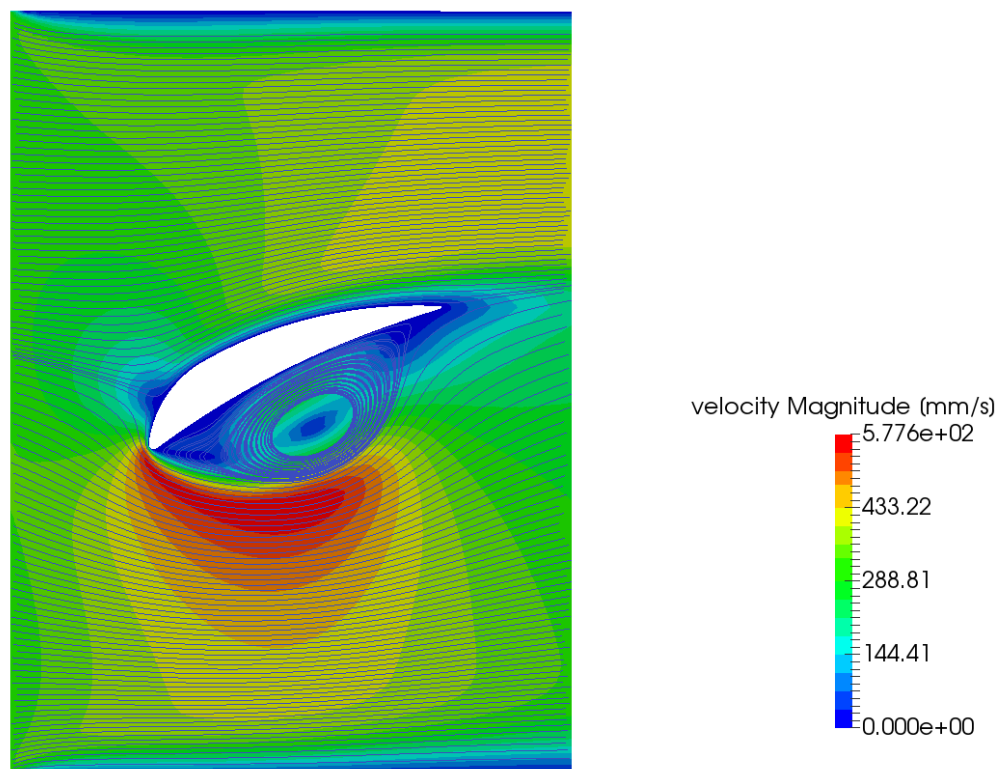
Слика 5.71 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 150, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



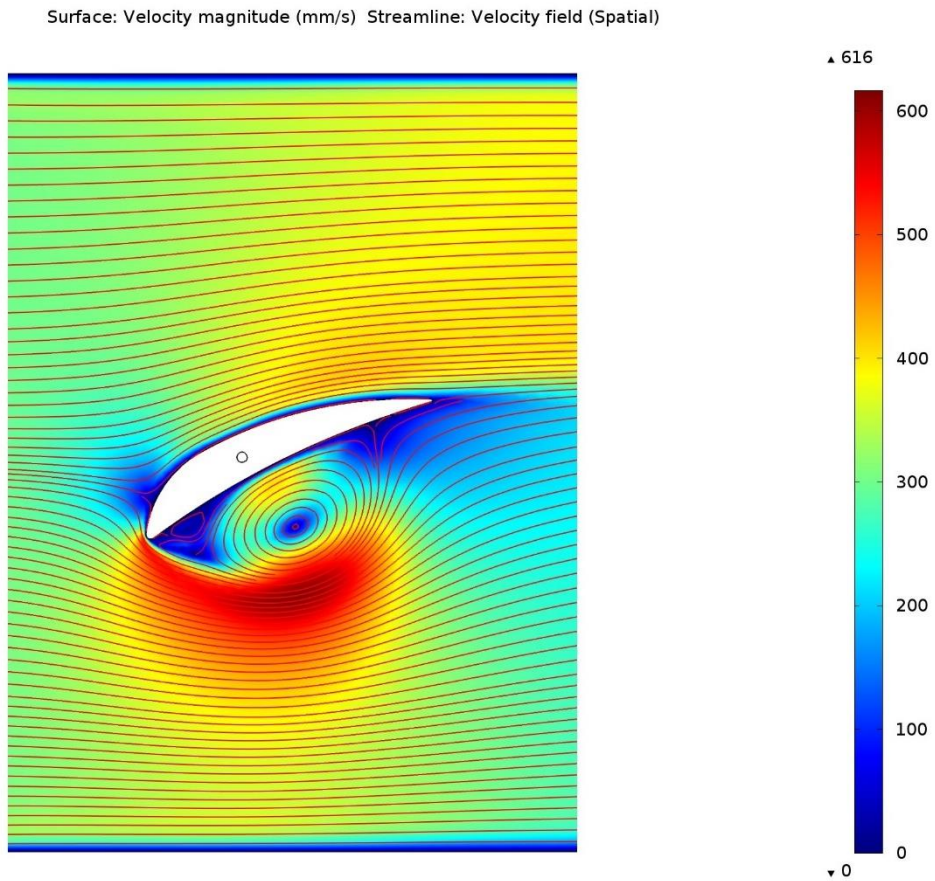
Слика 5.72 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 200, солвер PAKF



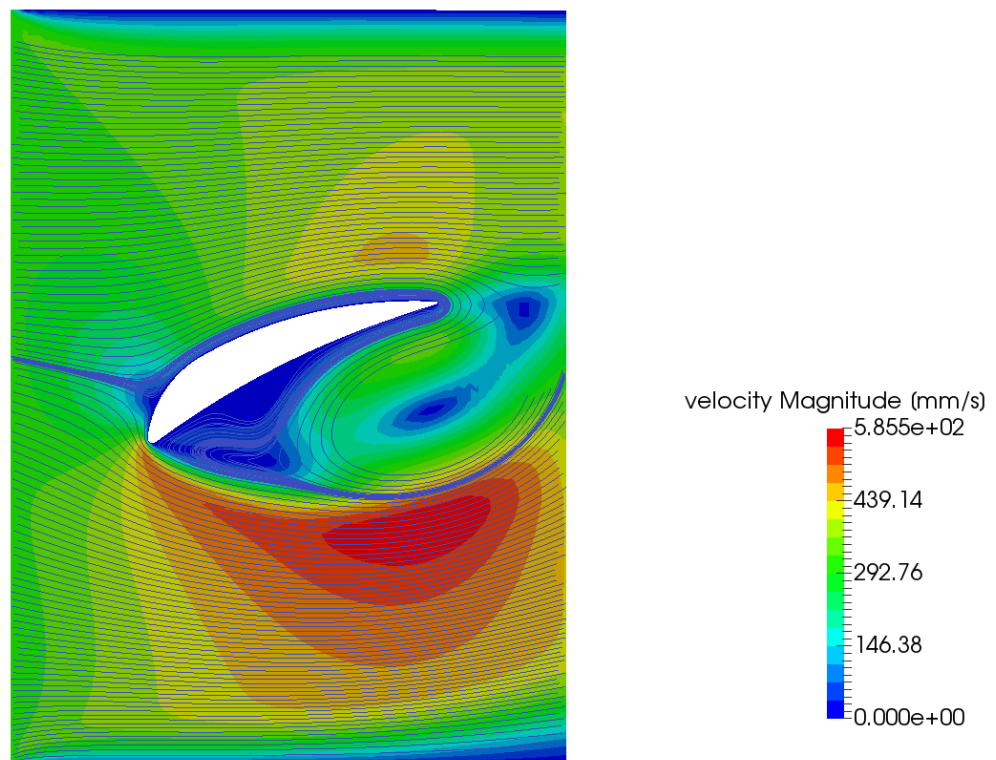
Слика 5.73 Расподела брзине струјања флуида преко профила, корак 200, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



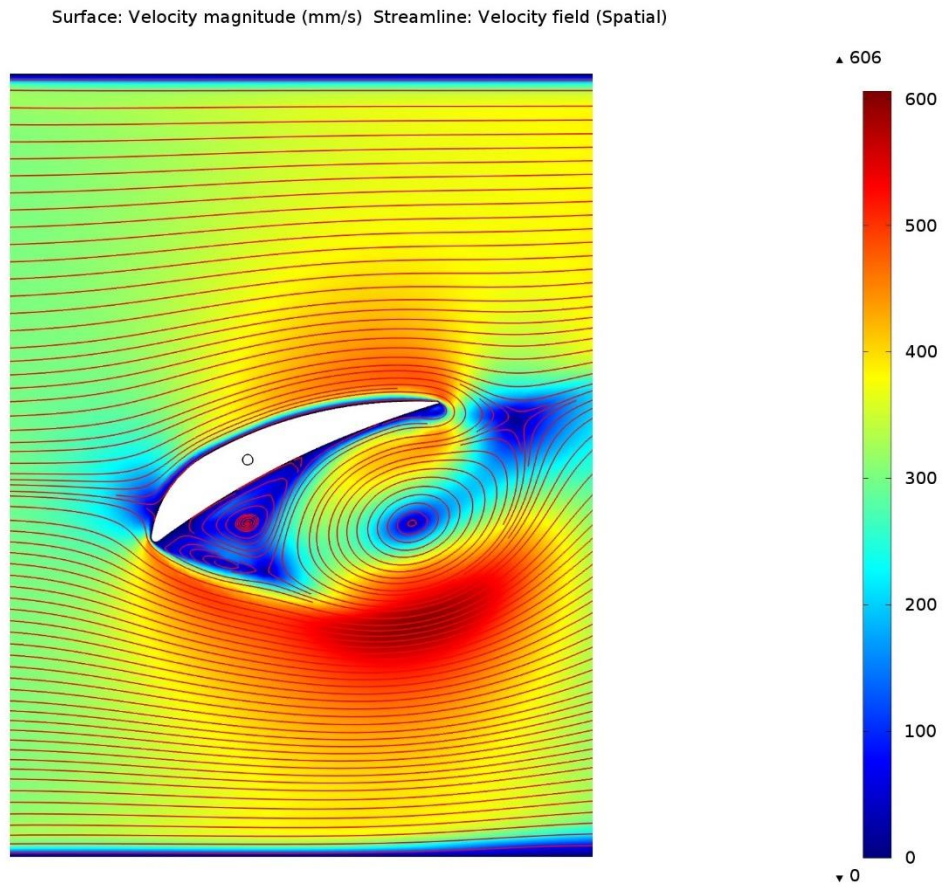
Слика 5.74 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 50, солвер PAKF



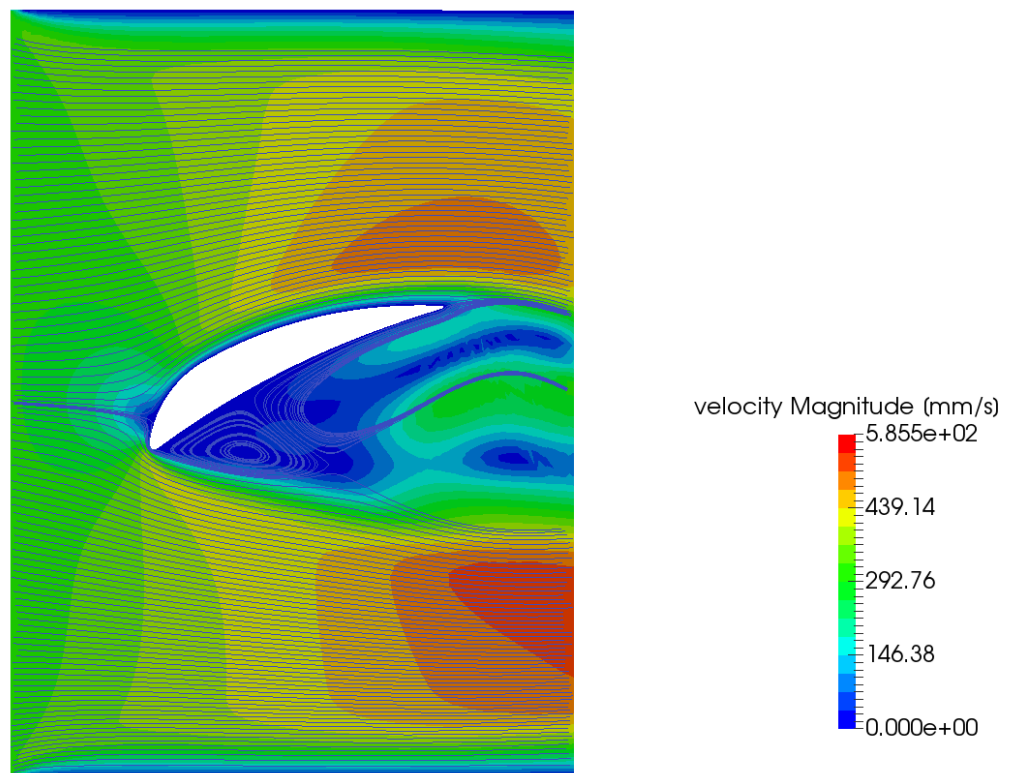
Слика 5.75 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 50, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



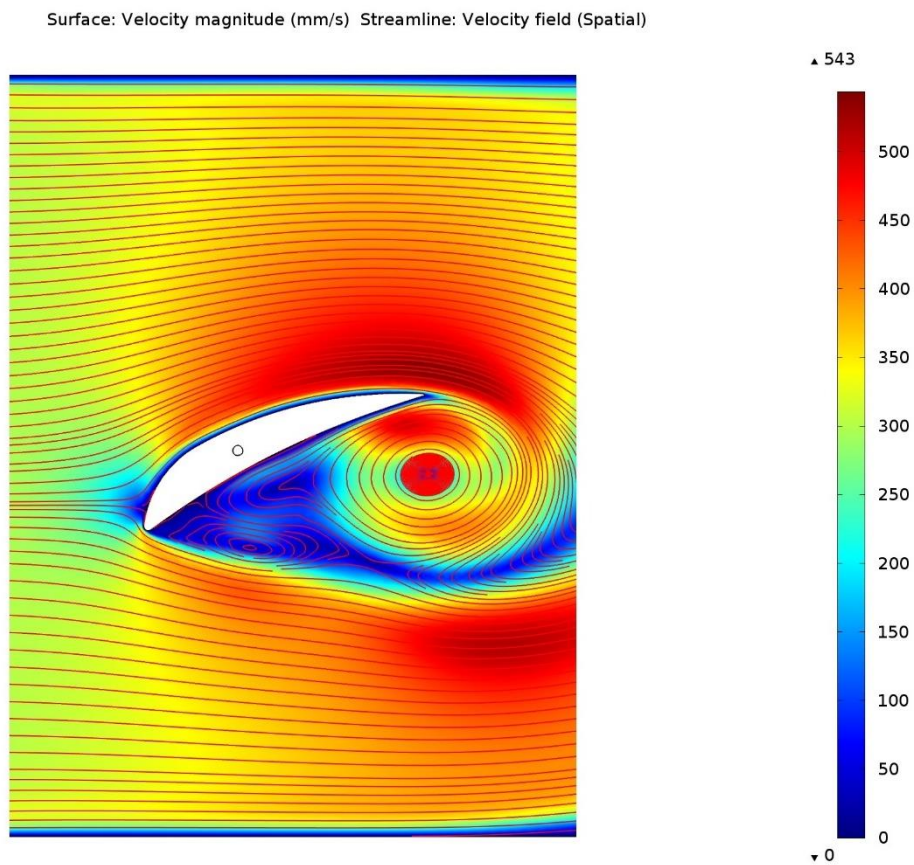
Слика 5.76 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 100, солвер PAKF



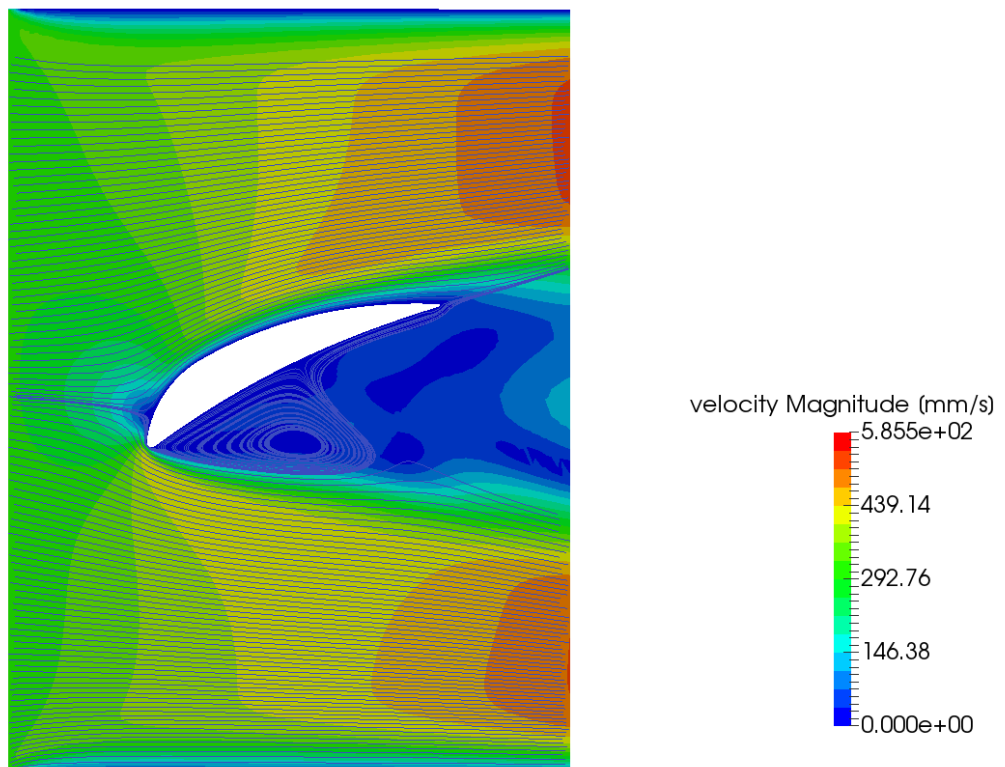
Слика 5.77 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 100, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



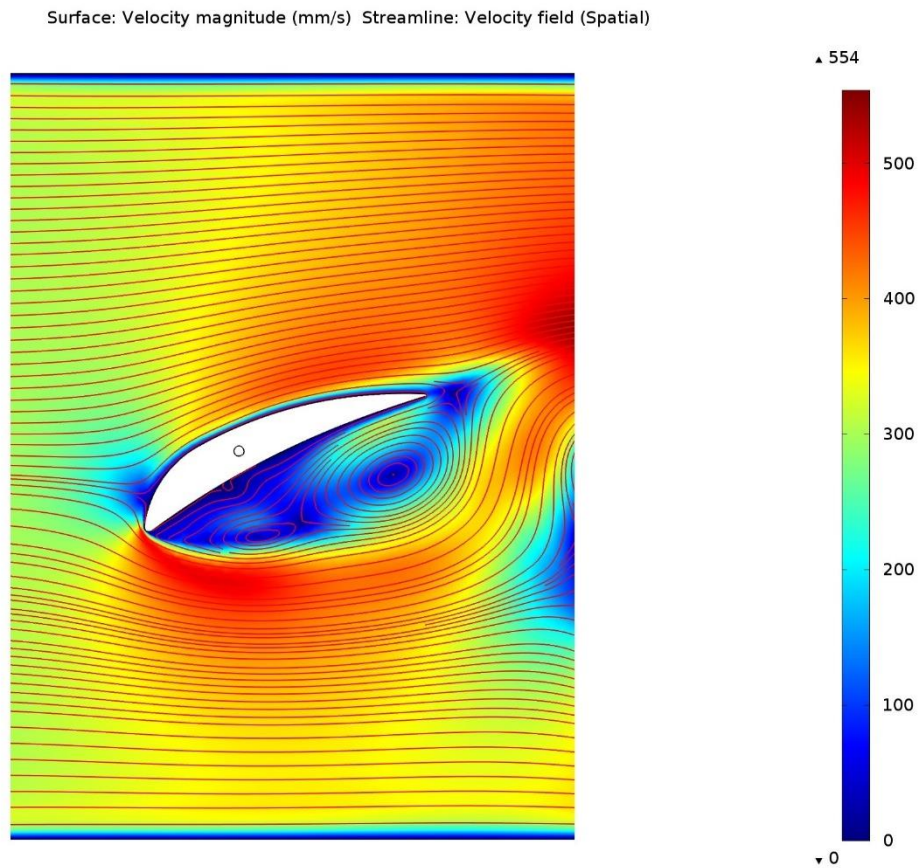
Слика 5.78 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 150, солвер PAKF



Слика 5.79 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 150, солвер COMSOL MULTIPHYSICS



Слика 5.80 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 200, солвер PAKF



Слика 5.81 Струјнице при струјању флуида преко профила, корак 200, солвер COMSOL MULTIPHYSICS

6 Увод у биоинжењеринг и струјање крви кроз артерије

У последњих неколико година, развој рачунарских техника, прорачуна и моделирања, се све више користи за опште разумевање хемодинамике и понашање крвних судова. Компјутерски модели су доста заступљени у различитим сферама истраживања и упоредо се користе у медицинској пракси. Што се тиче медицинске праксе, компјутерске технологије се све више користе са циљем успостављања директне спреге између снимања органа пацијента и моделирање органа на рачунару. Компјутерске симулације се користе за детаљније информације о протоку крви, брзини струјања крви, смичућег напона на зиду и појаве турбулентног струјања.

6.1 Увод у кардиоваскуларни систем

Кардиоваскуларни систем се састоји од крвних судова чија је главна улога да транспортује хранљиве материје и кисеоник путем крви до периферних ткива. Може се поделити на два дела [50], [51]:

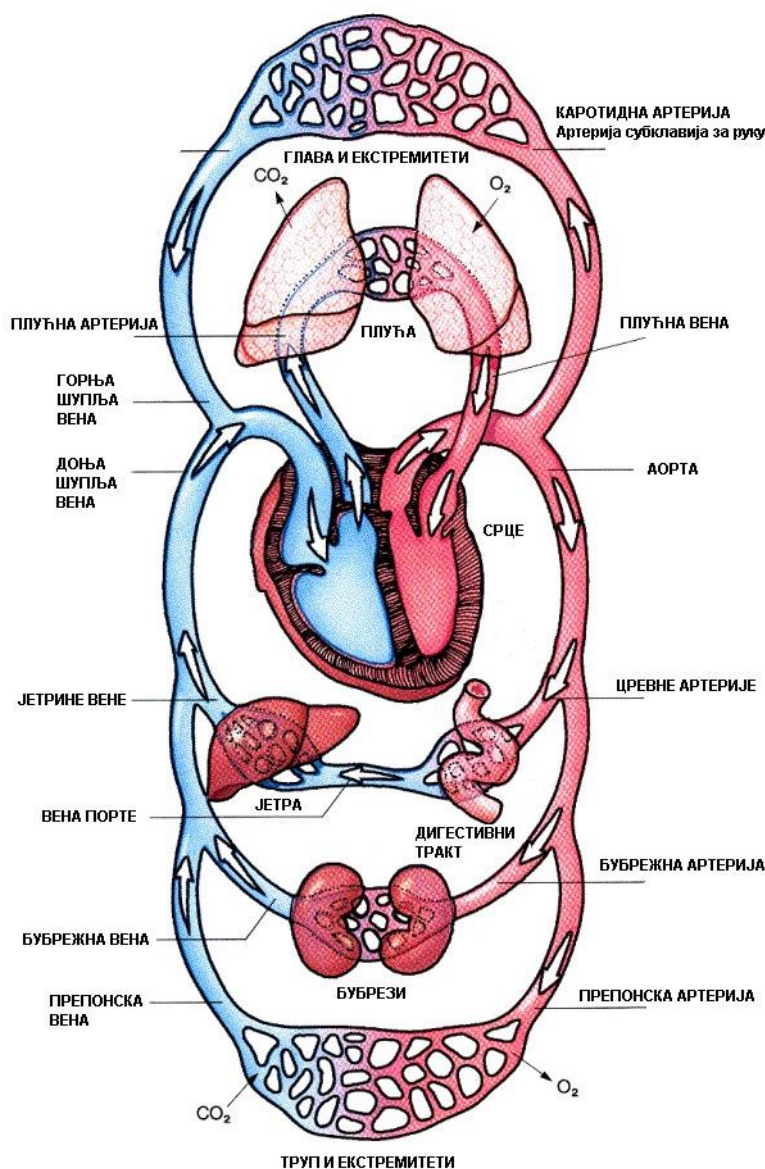
- системску циркулацију којом се транспортују хранљиве материје и
- плућну циркулацију која служи за оксидацију хемоглобина у крви

Ова два дела су повезана преко срца које представља пумпу крвног система. Системска циркулација се назива и велики крвоток јер снабдева све органе и ткива крвљу сем плућа. У системској циркулацији налази се 84% крви (64% у венама, 15% у артеријама и 5% у капиларима. Срце садржи 7% а плућни крвни судови 9% укупне крви. Циркулаторни систем се дели на артерије, артериоле, капиларе, вене и венуле.

Артерије преносе крв из срца у ткива под високим притиском. Због тога артерије имају веома јак васкуларни зид и струјање у њима је брзо. Артерије су крвни судови који се састоје из три слоја (интима, медије и адвентиције). Што су даље од срца оне постепено губе еластична влакна, а у њима се јављају и увећавају мишићна влакна. Мишићна влакна су набројнија у артериолама.

Артериоле су последње мале гране артеријског система и имају улогу контролних валвула помоћу којих се омогућава или спречава пролаз крви у капиларе, у зависности од тренутне потребе ткива. Артериоле су танки крвни судови (пречника 15-70 микрона). Њихов зид окружује дебели слој кружно распоређених глатких мишићних ћелија, које својим грчењем могу значајно смањити њихов лумен, и у кратком времену повећати отпор у артериолама. Промена отпора у артериолама мења ниво крвног притиска у артеријама. У случају повећаног отпора у артериолама смањује се проток крви и расте крвни притисак. Пад тонуса (ширење) артериола повећава одлив крви из артерија и доводи до смањења крвног притиска.

Капилари су најтањи крвни судови пречника 5-7 микрона, дужине 0.5-1.1 mm, у чијим зидовима постоје мале поре кроз које могу разне материје да дифундују. Они се налазе у међућелијским просторима, и уско су у додиру са ћелијама органа и ткива. Капиларни зидови су формирани од само једног слоја ендотелних ћелија, око којих је танак слој везивног ткива базалне мембране чији је физиолошки значај да се кроз њих обавља метаболизам између крви и ткива. У периферним ткивима централни (главни) део циркулације чини око 10 милијарди капилара, са укупном површином 500 m² који настају гранањем малих артерија. Укупна дужина свих капилара у људском телу износи око 100.000 km. У ткивима, са интензивним метаболизмом, број капилара на 1 mm² пресека ткива много је већи него у ткивима у којима је метаболизам мање интензиван. У срцу, 1 mm² пресека ткива има два пута више капилара у односу на скелетне мишиће. У сивој маси у мозга, где највећи део нервних ћелијских елемента, капиларна мрежа је много гушћа него у белој маси.



Слика 6.1 Шема циркулаторног система [20]

У ткивима постоје две врсте функционисања капилара:

- Прави капилари, формирају најкраћи пут између артериола и венула (они се означавају као главни капилари. Они у свом почетном делу имају мишићне ћелије (тзв прекапиларне сфинктере), који регулишу проток кроз њих. Проширење (дилатацију) правих капилара регулише метаболизам угљен-диоксид, млечна киселина и друге материје.
- Артериовенски капилари су друга група капилара или бочне гране прве групе капилара, они се крећу од завршетка главног магистралног капилара и настављају у своје венске крајеве. Ове бочне гране обликују микроциркулациону капиларну мрежу. Запреминска и линеарна брзина протока крви у микроциркулацији углавном зависи од бочних грана. Магистрални капилари играју важну улогу у дистрибуцији крви и лимфе у капиларној мрежи, и другим појавама у микроциркулацији, јер могу да обезбеде директан проток крви из артериола у вене заобилажењем правих капилара.

Венски систем се наставља на артеријски систем. Он започиње малим венулама, које се настављају даље у артериовенске капиларе. На њих се настављају мање вене. Мање вене се уливају у веће. Све вене се на крају спајају и формирају горњу и доњу шупљу вену која се улива у десну преткомору срца. Вене имају улогу да транспортују крв из ткива у срце, али да притом служе и као велики резервоар крви. Притисак у венском систему је веома низак тако да је зид вена веома танак. Венуле и мале вене се састоје од глатких мишићних влакана. Зид вена и венула се састоји из трослојног ткива (интима, медија, адвентиција).

Срце човека пумпа крв континуално у артерију аорту при средњем притиску од 100 mmHg (13.3 kPa). Ово пумпање је пулзаторно и због тога крвни притисак у артеријама осцилује између 120 mmHg (16.0 kPa) у систоли (периоду контракције срца) до 80 mmHg (10.7 kPa) у дијастоли (периоду релаксације срца). Са смањењем величине крвног суда смањује се и крвни притисак, па на крају циркулаторног система у капиларима средњи притисак износи око 17 mmHg а кад доспе у десну преткомору, приближно пада на 0 mmHg. Тако велики пад притиска у венама указује на то да је отпор у њима већи него што би се то очекивало за крвне судове тог промера. Већи део тог отпора узрокован је спољашњом компресијом вена, посебно шупље вене, која је већи део времена затворена.

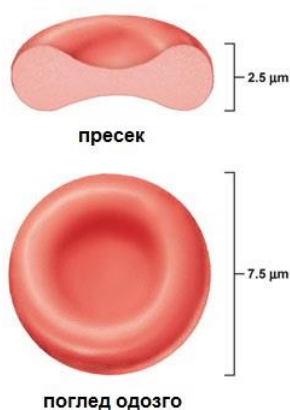
6.1.1 Крв

Крв чини око 55% течне крвне плазме и око 45% чврстих крвних ћелија које се налазе у плазми. Крвна плазма је безбојна, односно жућкаста течност која представља водени раствор органских и неорганских материја. Састоји се од воде, натријум-хлорида, осталих соли, мале количине шећера, неких масних материја, хормона, кисеоника и угљен-диоксида. У крвној плазми се налазе крвне беланчевине: албумини, имуноглобулини и фибриноген. Албумини су транспортни протеини крвне плазме (преносе липиде, неке од хормона и јоне) и одржавају сталан осмотски притисак крви. Имуноглобулини учествују у одбрамбеним реакцијама имунског система. Фибриноген

стварају ћелије јетре и од њега настаје фибрин за време процеса коагулације. При повреди крвног суда фибрин ван крвних судова се таложи заједно са крвним ћелијама при чему се на површини издваја серум.

Крвне ћелије су црвена крвна зрнца (еритроцити), бела крвна зрнца (леукоцити) и крвне плочице (тромбоцити). Црвена крвна зрнца дају крви црвену боју, састављена су од беланчевина и холестерина, а садрже и хемоглобин. Бела крвна зрнца су постојане ћелије које се размножавају деобом. Крвне плочице су најмања крвна зрнца и у уској су вези са згрушавањем крви.

Еритроцити (црвена крвна зрнца, енг. *Red Blood Cells – RBC*) обављају преношење кисеоника и угљен-диоксида. Код већине сисара зрели еритроцити немају једро ни органеле. Имају облик двоструко улубљеног диска чиме се њихова површина повећава и тиме олакшава размена гасова. Еритроцити су веома гипки – са лакоћом се прилагођавају неправилном облику капилара као и променама њиховог пречника. Ова особина еритроцита је веома значајна, јер је њихов пречник већи од пречника најмањих капилара.



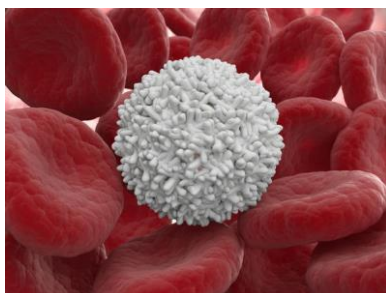
Слика 6.2 Приказ еритроцита [52]

У цитоплазми еритроцита присутно је око 33% хемоглобина – протеина за који се везују кисеоник и угљен-диоксид. Када је за њега везан кисеоник, хемоглобин постаје оксихемоглобин, а када је везан угљен-диоксид он прелази у карбаминохемоглобин. Ова два облика хемоглобина могу прелазити један у други. Уколико се, међутим, за хемоглобин веже угљен-моноксид, хемоглобин прелази у карбоксихемоглобин. То једињење више не може да прелази ни у један од претходна два облика.

Еритроцити живе око 120 дана, након чега остарели еритроцити бивају разложени у јетри, слезини, лимфним чворима и коштаном сржи. Еритроцити виших кичмењака стварају се у коштаном сржи, док се код нижих кичмењака стварају у слезини. Процес стварања свих крвних ћелија назива се хематопоеза, док је стварање еритроцита - еритропоеза.

Леукоцити (бела крвна зрнца, енг. *White Blood Cells – WBC*) се према изгледу једра и цитоплазме сврставају у две основне групе:

- гранулоците, који имају сегментирано једро и грануле у цитоплазми и
- агранулоците, чије је једро целовито, округло и у цитоплазми нема зрнаца - гранула.

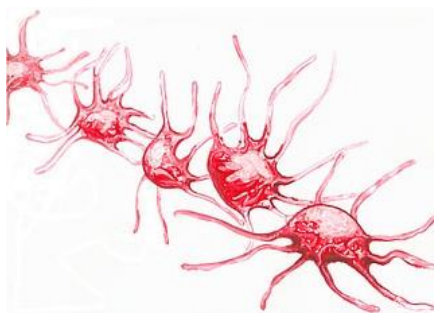


Слика 6.3 Леукоцит окружен еритроцитима [52]

Леукоцити су у основи одбрамбене ћелије пошто учествују у:

- одбрани организма од патогених организама (бактерија, гљива, протозоа, паразитских црва) и вируса,
- упалним процесима и алергијским реакцијама
- имају способност фагоцитозе микроорганизама па се називају и фагоцити.

Тромбоцити (крвне плочице енг. *Thrombocytes*) су ситна зрнца плочастог облика која не садрже једро и живе веома кратко. Имају веома важну улогу у коагулацији (згрушавању крви приликом повреде крвног суда, чиме се спречава отицање крви).



Слика 6.4 Тромбоцити [52]

Улога крви је транспортна, хомеостатска, терморегулациона и одбрамбена. Крв има велики капацитет. Из плућа узима кисеоник и транспортује до сваке ћелије у организму, затим из дигестивног система узима све сварене материје (шећери, аминокиселине, масти, протеине) и веном портом их транспортује до јетре, која узима потребну количину хранљивих материја, а остатак до других органа. Материје растворљиве у води крв одводи до бубрега. Путем крви транспортују се хормони до циљне (рецепторне) ћелије којој је тај хормон потребан, нпр. инсулин транспортује до свих ћелија, јер је свим ћелијама он потребан, док тиреостимулирајући хормон (енг. *TSH*) спроводи само до штитне жлезде, јер је само њој тај хормон потребан. Крв одржава све факторе за одржавање сталности; контролисано одаје воду и електролите. Ово представља осмотски хомеостазис, а уједно и електрохемијски хомеостазис. Птице и сисари су хомеотерми, односно имају способност да одржавају сталну телесну температуру, за шта

је задужена крв. У хипоталамусу се налазе центри за овакву регулацију. Поикилотерми немају овакву способност, иако неки од њих имају крв. Крв има способност да одбрани организам од разних штетних агенаса, који би могли нарушити неки од типова хомеостазиса. Сви ти агенси се зову антигени (најчешће су протеини, ређе сложени липиди и угљени хидрати) и они су егзогеног порекла, тј. потичу са друге јединке. Организам на те агенсе одговара стварањем антитела.

6.1.2 Проток крви у крвним судовима

У већини артерија крв се понаша као Њутнов флуид, а динамичка вискозност се може узети као константа од око 3.5 сР ($3.5 \cdot 10^{-3}$ Pas) за нормалан хематокрит. У мањим крвним судовима долази до не-Њутновског понашања крви зато што вискозност зависи од услова струјања. Уведени су разни феноменолошки механички модели за крв, засновани на биолошким истраживањима. Преглед ових модела може се наћи у литератури [53], [54]. У случају када смичуће деформације протока крви нису превише ниске, као у артеријама средњих димензија и венама, вискозност крви се може изразити као функција хематокрита H и деформације смицања. Ова функционална веза се зове Кејсонова релација [54] и приказана је следећом једначином:

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{D_{II}}} \left(k_0(H) + k_1(H) \sqrt{2\sqrt{D_{II}}} \right)^2 \quad (6.1)$$

где су $k_0(H)$ и $k_1(H)$ експериментално одређене функције, а D_{II} је друга инваријанта брзине деформације и рачуна се као:

$$D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \quad (6.2)$$

Како крв има своју течну (плазма) и чврсту компоненту (ћелијски елементи), она није константног састава и вискозитета, па уз појаву ламинарног струјања и турбуленције, примена основних физичких закона није тако једноставна.

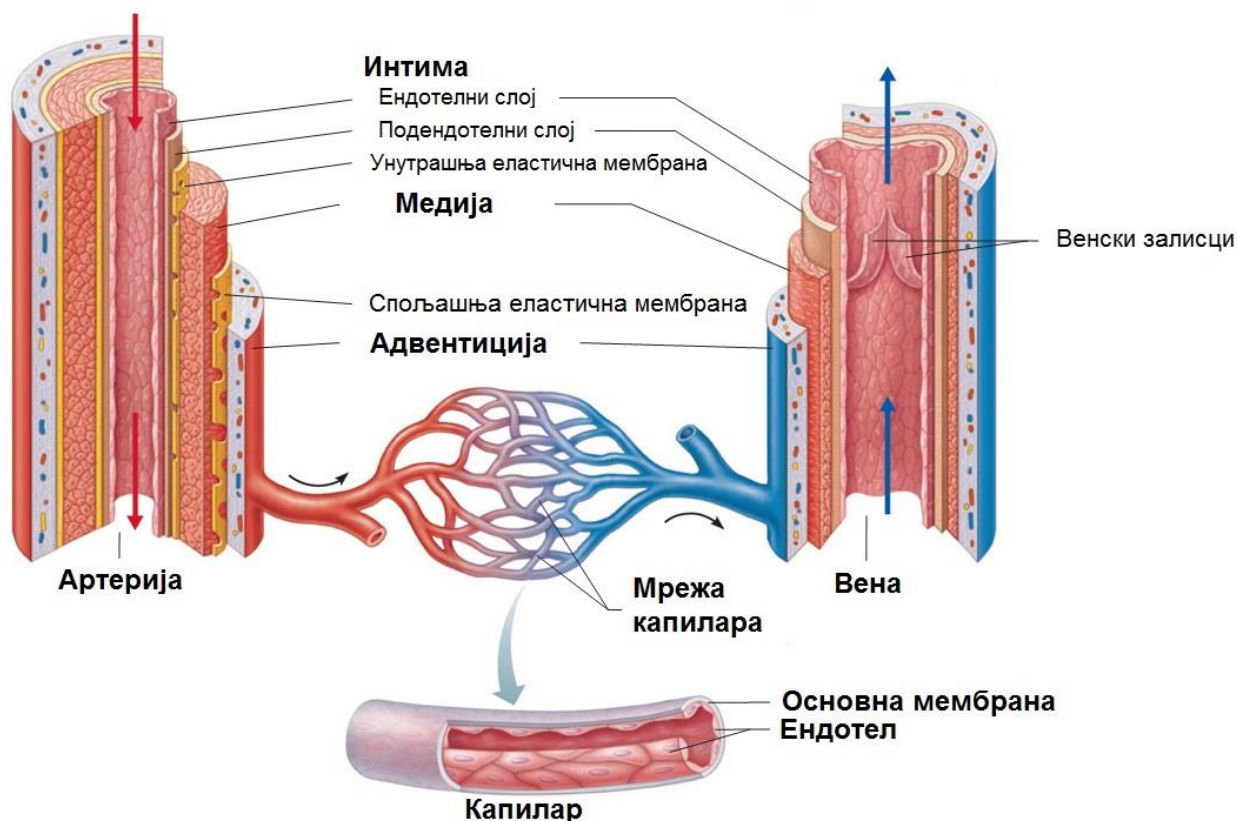
Када крв тече кроз дугачке крвне судове глатких зидова, она то чини ламинарно или кретањем у облику равних, концентричних (кружних), струјних слојева, при чему сваки слој крви остаје на једнакој удаљености од зида крвног суда. Гранични слој крви у контакту са зидом крвног суда се не креће. Затим се остали крећу све већом брзином да би централни део крви у центру крвне струје имао највећу брзину. Ова појава се зове параболични профил брзине тока крви а оваква врста кретања назива се ламинарни ток и значајно се разликује од турбулентног тока када се крв у крвним судовима креће у свим смеровима. Ламинарни ток крви одвија се до одређене критичне брзине где Рејнолдсов број не прелази вредност од 2000.

Када крв протиче поред разних препрека или прелази преко неравне површине или улази у бифуркацију онда ток крви из ламинарног може прећи у турбулентан. Турбулентни ток је облик кретања крви који се осим кретања у правцу крвног суда

карактерише и попречним кретањем крви у различитим смеровима, стварајући при томе вртложно кретање. Турбулентно струјање се карактерише Рејнолдсовим бројем већ поменутиим у глави 2. Када Рејнолдсов број има вредност од 200 до 400 настаје турбулентан ток на месту гранања крвних судова, који ће нестати или прећи у ламинарни ток у правим деловима крвног суда. Када Рејнолдсов број има вредност преко 2000 турбуленција ће настати и у правим и глатким деловима крвног суда. У уским крвним судовима Рејнолдсов број никада није толико велики да може настати турбуленција. Али зато у асцендентној аорти у моменту максималног систолног избацавања критична брзина је премашена, може се јавити турбуленција али само ако је артерија сужена. Турбуленција најчешће настаје код анемија, јер је вискозност крви нижа, што објашњава честу појаву шумава доста честих код анемија.

6.1.3 Крвни судови

Главна функција крвних судова је да обезбеде адекватно снабдевање крвљу одређених области ткива, која под нормалним условима, треба да буде у складу са свим метаболичким потребама. Сви крвни судови (артерије, артериоле, капилари, вене и венуле) имају зид који се састоји од три слоја: интима, медија и адвентиција.



Слика 6.5 Структура артеријског и венског зида [52]

Интима се састоји од ендотелних ћелија које леже на базалној мембрани. Медија се састоји од глатких мишићних ћелија, колагена и еластина. Растегљивост и еластичност крвних судова зависи од медије чија еластична влакна и глатке мишићне ћелије

доприносе тонусу, односно констрикцији и дилатацији. Адвентиција је спољашњи слој који се састоји од колагених влакана распоређених у спиралној структури и фибропластних ћелија.

Упоређујући структуре зида артерија и вене могу се приметити следеће разлике:

- Артерије имају већи медија слој од вена. Глатки мишићи се углавном налазе у медија слоју, односно то значи да артерије имају више глатких мишића за производњу контракција од вена.
- Артерије имају више еластина него вене. Према томе, однос колагена и еластина је већи у венама него у артеријама.
- Вене имају дебљи адвентиција слој него што је то случај код артерија.

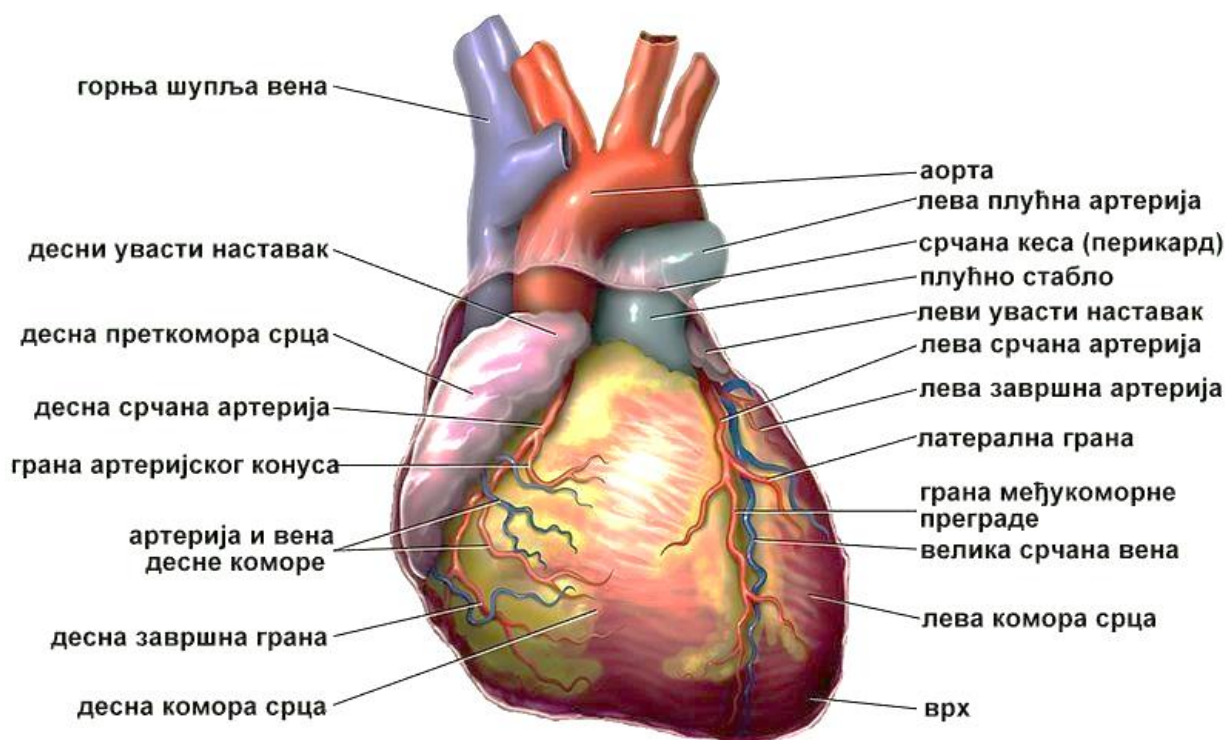
При моделовању зидова крвних судова претпоставља се да је материјал зидова хомоген и да је артерија цилиндрична мембрана или цевка са дебелим зидом.

Струјање крви у великим крвним судовима је проучавано дуги низ година. Велики број референци је доступан у овој области, нпр. [55], [56] где се детаљно описују резултати брзине струјања, притиска и напона смицања на зиду крвног суда.

6.1.4 Струјање крви у великим крвним судовима

При компјутерским прорачунима у крвним судовима крв може да се посматра као нестишљив хомогени вискозни флуид. Најчешће се проучавају 4 дела артеријског стабла: срце и проксимална аорта, абдоминална аорта, каротидна артеријска бифуркација и лева коронарна артерија. Ови крвни судови су најзначајнији, са једне стране зато што најчешће подлежу болестима и са друге стране зато што најбоље репрезентују струјање у целом артеријском стаблу [57].

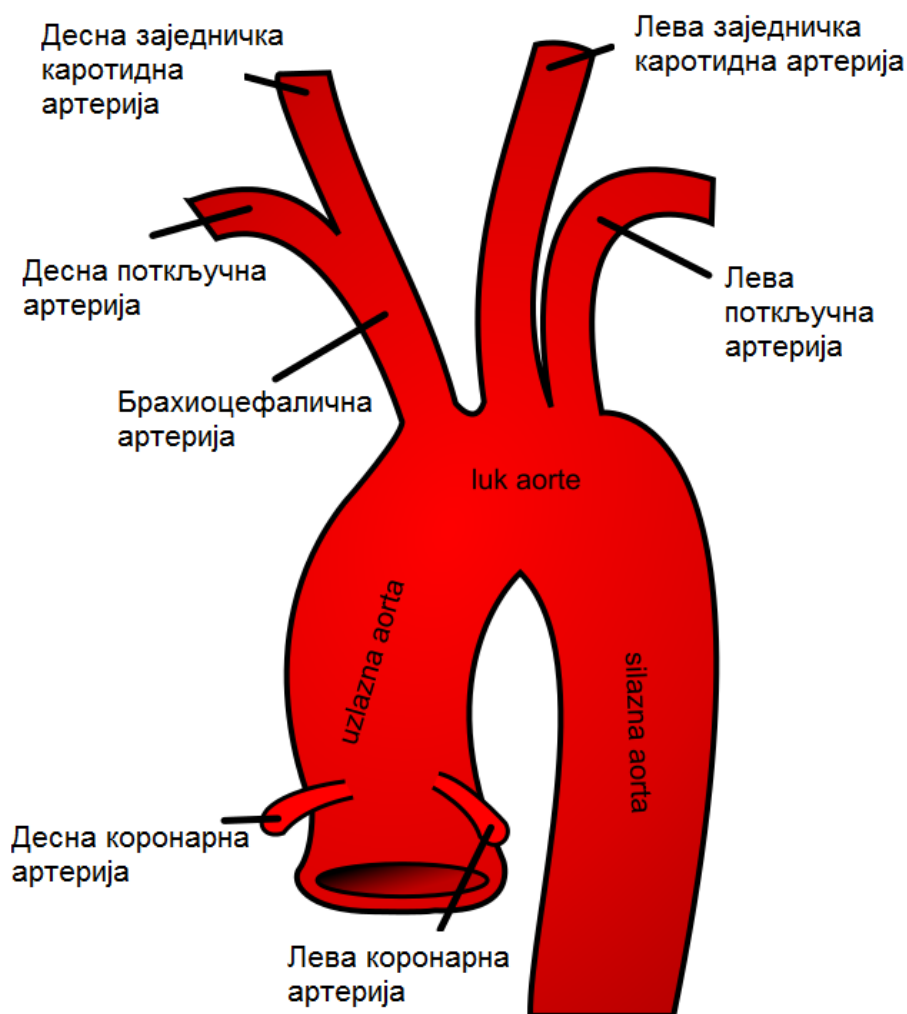
За струјања у срцу и великим крвним судовима важи да су доминантне инерцијалне у односу на вискозне силе. Рејнолдсови бројеви на максимуму систоле су реда величине 4000. Струјања у аорти и у плућном делу су слична струјањима улазних профила брзина која нису развијена. Из тог разлога се може сматрати да је област средишног струјања невискозних регија окружен развијеним граничним слојевима ка зиду.



Слика 6.6 Приказ срца са главним артеријама и венама [58]

Притисци и брзине у комплексном струјању у коморама срца, се одређују искључиво анализом 3Д струјања која укључују кретања граница. Иначе постоје *in vitro* модели ових струјања развијени у лабораторијама, док се *in vivo* мерења на човеку врше разним техникама, као што су: катетери, доплеров ултразвук, магнетна резонанца, итд. Све технике мерења и прорачуна показују присутност секундарног струјања у левој срчаној комори које настаје због струјања из атријума кроз митралну валвулу.

Аорта је велики крвни суд који полази из срца, тачније из леве срчане коморе и пролази уз задњи зид абдомена у правцу средње линије. Аорта носи и дистрибуира крв богату кисеоником до свих артерија системског крвотока. Из проширења почетног дела аорте (који се назива *bulbus*) полазе две коронарне артерије, а из лука се гранају артерије које снабдевају крвљу главу, врат и горње екстремитете. Аорта касније прелази у трбушну аорту, која се рачва у две илијачне артерије које снабдевају крвљу доње екстремитете.



Слика 6.7 Приказ аорте са каротидним и поткључним артеријама [20]

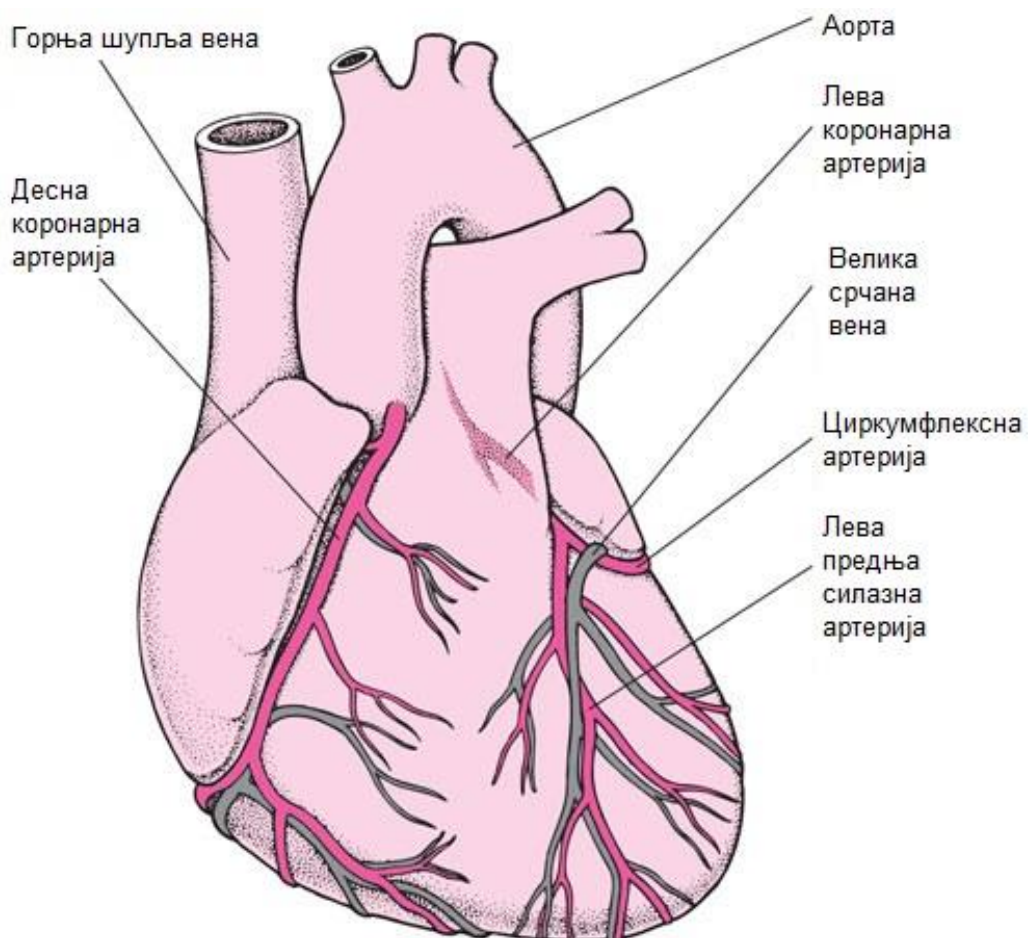
Каротидне артеријске бифуркације (каротиде) се налазе са обе стране у пределу врата. Ове артерије снабдевају мозак и лице са крвљу. Заједничка каротидна артерија (енг. *Common Carotid Artery – CCA*) рачва се на унутрашњу каротидну артерију (енг. *Internal Carotid Artery – ICA*) која снабдева мозак крвљу и спољашњу каротидну артерију (енг. *External Carotid Artery – ECA*) која снабдева лице крвљу. Атеросклероза се углавном развија на десној грани бифуркације што изазива велике проблеме код пацијената. Рејнолдсов број при струјању крви кроз каротидну бифуркацију је вредности приближно око 300.

Артерије иза бифуркације тј. рачве су под углом од 25° у односу на осу заједничке каротидне артерије. Код каротидних артерија у највећем проценту су присутни разни облици стеноза па су оне од посебног интереса за проучавање са медицинског аспекта. Хемодинамички аспект струјања крви кроз каротидне артерије је доста специфичан због комплексности струјања услед рачвања. Утицај различитих пречника каротиде, осцилаторних пулзација, секундарних струјања и смичућих напона на зиду артерија има велики утицај на проток и струјање крви кроз каротидне артерије.



Слика 6.8 Приказ каротидне артерије [58]

Лева коронарна артерија (енг. *Left Coronary Artery – LCA*) је главна артерија за снабдевање срца крвљу. Струјање у овој грани је прилично сложено. Лева главна коронарна артерија је прилично кратка што проузрокује тип струјања са врло малим *Womersley* параметром.



Слика 6.9 Приказ коронарних артерија [59]

Високи притисци у миокардијуму за време фазе систолне контракције чине да је струјање повратно у коронарним артеријама у поређењу са већином артерија. Коронарна бифуркација не лежи у једној равни већ је савијена око срца. Набројане претходне ставке представљају тешкоћу да се предвиди профил брзине струјања крви.

6.2 Основни параметри у хемодинамици

Основни параметри којим се оцењује хемодинамичко понашање су брзина и притисак крви. Површина попречног пресека вена је велика и износи четири пута више од пресека одговарајућих артерија. Из ове чињенице произилази и закључак зашто је складиштење крви у венском систему велико у односу на артеријски систем. Како кроз сваки одсечак крвног суда пролази исти волумен крви у јединици времена, брзина протока крви у сваком таквом одсечку обрнуто је пропорционална површини његовог попречног пресека. Код човека који мирује средња брзина струјања крви у аорти је 33 cm/s, а у капиларима износи 1/1000 део ове вредности (0,3 mm/s). Како је сваки капилар просечно дуг од 0,3 до 1 mm, то значи да свака јединица крви проведе у капилару свега 1 до 3 секунде. Ова чињеница веома изненађује јер се у том, јако кратком времену морају одиграти сви процеси дифузије кроз зид капилара.

Уз сталну запремину крви која протиче кроз било који део општег васкуларног система, линеарна брзина протока крви не може бити константна. Она пре свега зависи од укупне ширине појединих делова васкуларног корита. Гранањем артерија, упркос чињеници да се у свакој наредној грани крвни судови сужавају, њихов број се истовремено непрестано повећава, тако да је збир промера артеријских грана већи од промера великих артерија (аорта). Највеће проширење тог лумена је у капиларној мрежи где је збир свих капилара око 500-600 пута већи од пресека лумена аорте. Сходно томе и брзина кретања крви у капиларима је 500-600 пута спорија него у аорти.

Дистрибуција смичућег напона на крвним судовима (енг. *Wall Shear Stress – WSS*) је доста битан параметар при струјању крви и има важан утицај на циркулаторни систем. Откривено је да се артерије прилагођавају дугорочном смањењу или повећању смичућег напона на зиду. Смањење брзине протока узрокује задебљање интима како би се поново успоставио нормални смичући напон на зиду. На смичући напон реагују ендотелне ћелије. На површини лумена, напон смицања се може осетити директно као сила на ендотелне ћелије. Мерење градијента брзине близу зида, потребног за процену смичућег напона, је доста технички отежано па је тиме компјутерско мерење добра алтернатива за комплексне, инвазивне и скупе мерне технике. У литератури се још среће и назив ендотелни смичући напон (енг. *Endothelial Shear Stress – ESS*). Смичући напон на зиду крвног суда се израчунава као:

$${}^i\tau_{ij} = \mu \left. \frac{\partial^i v_t}{\partial n} \right|_{wall} \quad (6.3)$$

где су: v_t - тангентијална брзина, n - нормала на зид крвног суда, и μ је коефицијент динамичке вискозности. Прво се рачуна тангентијална брзина у интеграционим тачкама близу површине зида, а затим се нумерички рачуна градијент брзине $\partial^t v_t / \partial n$. На крају се утврђује коефицијент вискозности μ користећи просечну брзину у интеграционим тачкама или користећи константну вредност коефицијента вискозности. У суштини, смичући напон на зиду је пропорционалан стопи смицања γ , и динамичкој вискозности крви μ .

За пулзаторно струјање средња вредност смичућег напона на зиду у временском интервалу T може бити израчуната као [60]:

$$\tau_{mean} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{t}_s dt \right| \quad (6.4)$$

где је T временски интервал једног откуцаја срца. Друга скаларна величина је временски-просечна вредност површинског вектора смичућег напона и израчунава се као:

$$\tau_{mag} = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{t}_s| dt \quad (6.5)$$

где вектор \mathbf{t}_s представља површински смицајни вектор дефинисан као:

$$\mathbf{t}_s = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (6.6)$$

док се вектор смицања \mathbf{t} рачуна према Кошијевој формули [18]:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (6.7)$$

где је $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напона. Претходни изрази су дефинисани да би се израчунао битан хемодинамски фактор а то је Осцилаторни смицајни индекс – ОСИ (енг. *Oscillatory shear index* – *OSI*). ОСИ се рачуна преко следећег израза [60]:

$$OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_{mean}}{\tau_{mag}} \right) \quad (6.8)$$

ОСИ је бездимензиона величина која квантификује промену вектора напона смицања у односу на правац главног струјања у току једног срчаног циклуса. За чисто осцилаторно струјање ОСИ има максималну вредност 0.5 док за неосцилаторно струјање има вредност 0. ОСИ у суштини не узима у обзир јачину напона смицања, него више узима у обзир правац струјања [61].

7 Симулација ламинарног и турбулентног струјања крви на реалном моделу артеријске бифуркације са стенозама

У оквиру овог поглавља биће приказани резултати симулације ламинарног и турбулентног струјања на моделима артеријске бифуркације за више случајно одабраних пацијената. Биће приказани и резултати флуид-структура интеракције за два типа бифуркација (каротидна и коронарна артерија).

7.1 Методологија за брзо генерисање модела коначних елемената артеријске бифуркације

Места гранања у каротидним артеријама човека су локације које су најчешће захваћене атеросклерозом, са уделом од чак 20% у перкутаним интервенцијама. Неколико студија о дистрибуцији плака у кардиоваскуларном систему су показале да атеросклероза углавном настаје на гранањима у васкуларном стаблу, где артерије имају релативно сложену геометрију [61], [62]. Сложена геометрија условљава струјање које је јединствено за сваког појединачног пацијента. Већина прорачуна струјања до сада је вршена над такозваним просечним или идеализованим геометријама. Решења која се тако добијају могу знатно одступати од решења која би се добила неким прецизнијим моделирањем крвног суда [63]. У данашње време тренд и потреба је генерисање модела који прецизно описују реалне геометрије артеријских бифуркација захваљујући помаку који је направљен на пољима уређаја за радиолошку дијагностику и перформансама рачунара [64], [65].

У даљем тексту детаљно је описана методологија генерисања квалитетне мреже коначних елемената. Да би се убрзао процес генерисања модела развијен је софтвер *STL2FEM* [66], који на основу волуметријског модела добијеног радиолошким снимањем генерише топологију блокова за генерисање коначних елемената мултиблок методом. Први корак у генерисању мреже коначних елемената је одређивање геометрије зида каротидне артерије. То је данас могуће урадити на много начина, на пример компјутерском томографијом (*Computed Tomography - CT*), магнетном резонанцом (*Magnetic resonance - MR*).

Оригинални *CT* снимци, који садрже податке о ткивима у околини гранања каротидних артерија, у *DICOM* формату су учитани у софтвер *MIMICS*. У овом софтверу, за сваки од снимака, на основу подесивих граничних вредности контраста, идентификоване су регије које представљају различита ткива, односно органе на посматраном снимку. Спајањем граница тих регија, уз информацију о просторном положају сваког појединачног снимка, а затим и полигонизацијом модела, добија се 3Д модел свих органа чији контраст одговара одабраном опсегу. На слици 7.1 приказани су волуметријски

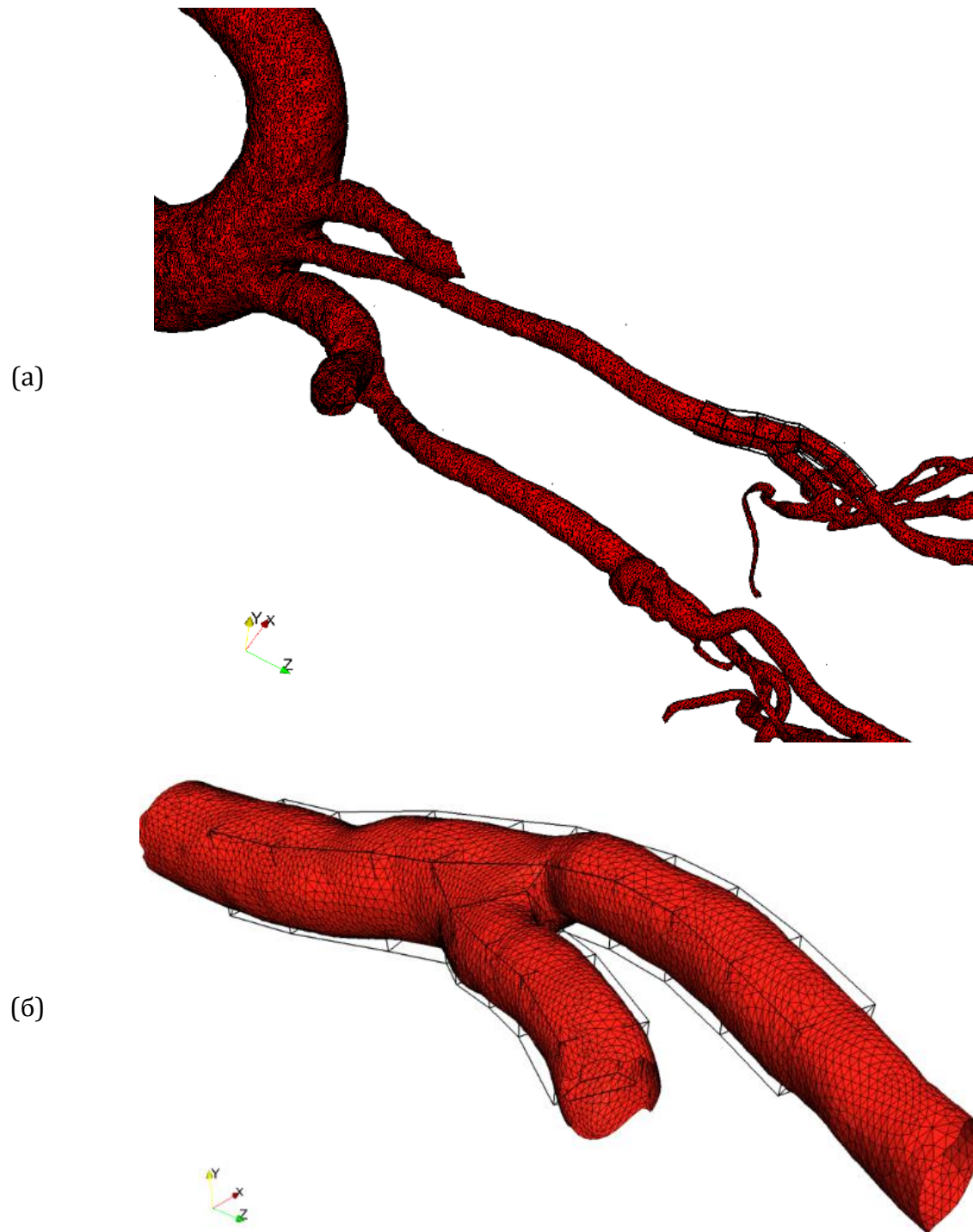
моделу ткива, углавном костију и крвних судова, који се добијају обрадом снимака генерисаних компјутерском томографијом (СТ скенером).

Из овог скупа треба изузети све органе осим крвотока (слика 7.2а). Несавршеност софтвера за реконструкцију волуметријског модела доводи до тога да у овај модел буду укључени и плакови саграђени од калцијума, па се стиче утисак да је на том месту проточни пресек повећан. Разлог овоме је што калцијум има исти контраст као и крв, па софтвер не разликује ова два материјала. Оваква места треба поправити брисањем локалне неправилности у полигонизованој мрежи и реконструкцијом насталог дисконтинуитета. Уколико је потребно врши се и децимација модела до нивоа када се задржава неопходан квалитет детаља, што утиче на перформансе следећих корака у процесу генерисања МКЕ модела. Генерисање мреже коначних елемената полази са становишта да је тачна геометрија модела садржана у *STL* датотеци, која представља интерфејс ка следећим фазама у креирању модела.



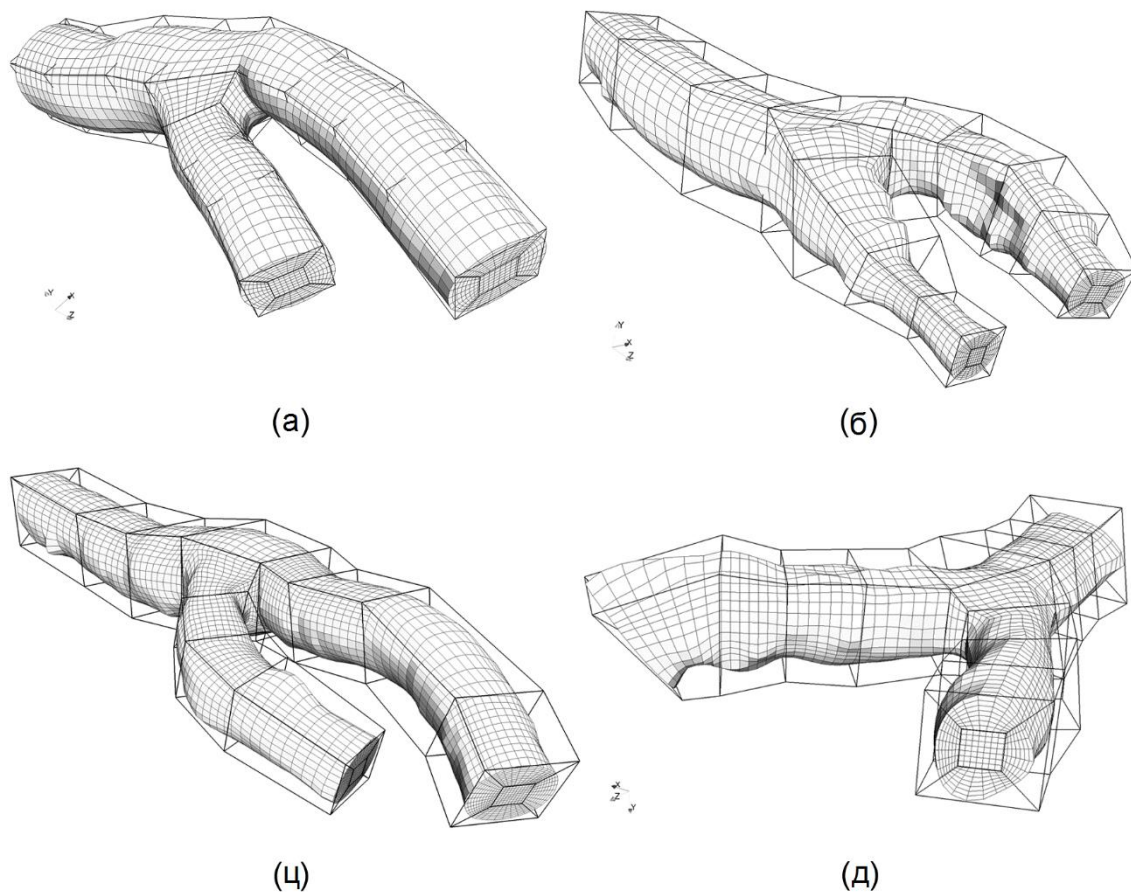
Слика 7.1 Волуметријски модели ткива (кости и крвни судови) добијени обрадом ЦТ снимака [66]

Лева и десна каротидна бифуркација за посматраног пацијента нису геометријски једнаке. На основу примера из праксе, познато је да се геометрија бифуркација веома разликује код различитих пацијената. У ретким случајевима је потребна ручна интервенција за фино подешавање темена блокова како би се што тачније обухватила сама бифуркацију.



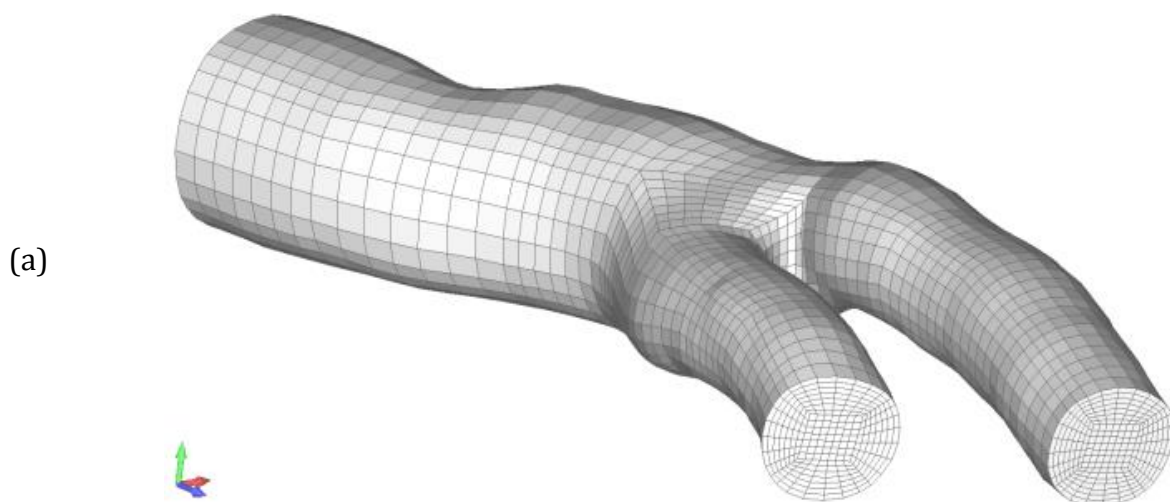
Слика 7.2 (а) Волуметријски модел ткива каротидних артерија, (б) Блокови генерисани софтвером *STL2FEM* [66]

Креирана топологија блокова записује се у *VTK* датотеку, па може да се користи у другим софтверима за генерисање мреже 3Д коначних елемената (слика 7.2б). Пример таквог софтвера је *IA-FEMesh* [67], софтвер отвореног кода који се ослања на *VTK* библиотеке. Софтвер *STL2FEM* користи мултиблок методу при генерисању коначних елемената, при чему се чворови генеришу коришћењем трансфинитне интерполације без релаксације мреже.

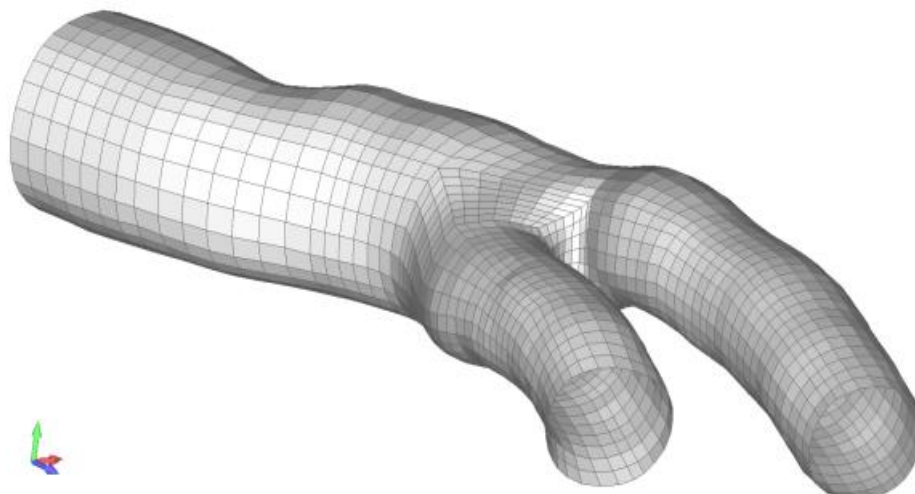


Слика 7.3 Модели коначних елемената са блоковима генерисани софтвером STL2FEM, (а) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 7, (б) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 6, (ц) каротидна артеријска бифуркација - пацијент 5, (д) коронарна артеријска бифуркација - пацијент 9 [66]

Могуће је креирање два типа коначних елемената: осмочворни 3Д елементи (слика 7.4а) и четворочворне елементи љуске (слика 7.4б). Добијени модели коначних елемената верно описују посматрани физички домен.



(б)

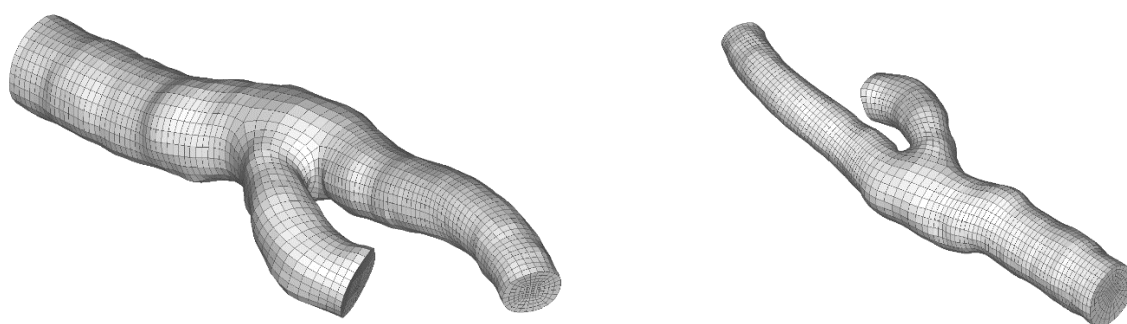


Слика 7.4 Модели коначних елемената бифуркације каротидне артерије, (а) флуидни домен; (б) домен солида

7.2 Нумеричка симулација ламинарног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 5

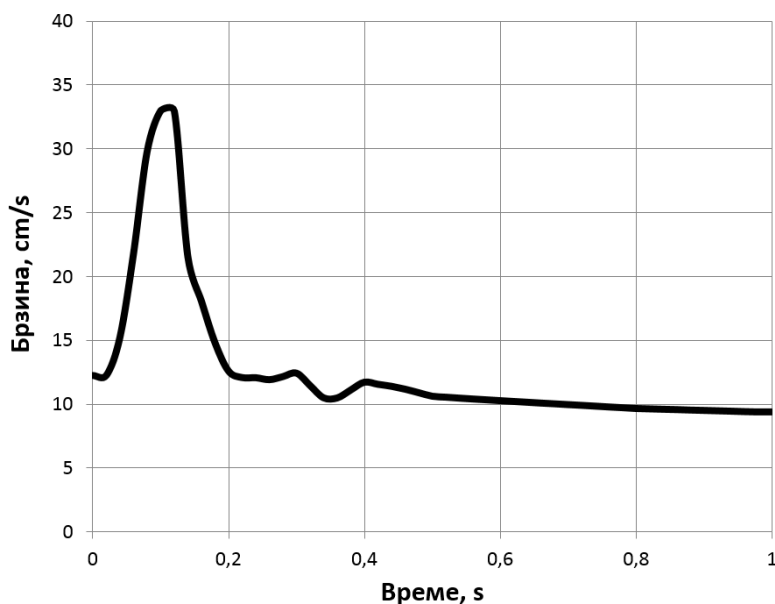
Симулација струјања крви кроз крвни суд извршена је на реалној бифуркацији каротидне артерије изабраног пацијента 5 чије је моделирање приказано у претходном поглављу. За прорачун је коришћен софтвер *PAK-F* [46]. Прорачун је извршен у 30 временских корака у интервалу од 0.8s. Од тога првих 10 корака по 0.02s, а осталих 20 корака по 0.03s.

МКЕ модел флуидног домена је моделиран са 20237 3Д елемената. На слици 7.5 приказан је флуидни домен који је коришћен у прорачуну.



Слика 7.5 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 5

Флуид, односно крв у овом примеру, се посматра као Њутнов флуид и сматра се да је струјање ламинарно. Просечна брзина струјања крви на улазу у каротидну артерију је $v_{sr} = 16.9 \text{ cm/s}$. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.6).



Слика 7.6 Временска функција брзине у тежишту пресека при уласку у артерију за један срчани циклус

За домен флуида примењени су следећи гранични услови:

- а) на улазу је задат параболични профил брзине,
- б) на површинама на излазним гранама модела постоји отпор који се јавља због тога што се струјање крви наставља кроз друге крвне органе.

Уколико се као гранични услови, не задају притисци на излазним површинама, као резултат добија се поље пада притиска у моделираном домену. Материјалне карактеристике за домен флуида приказани су у табели 7.1.

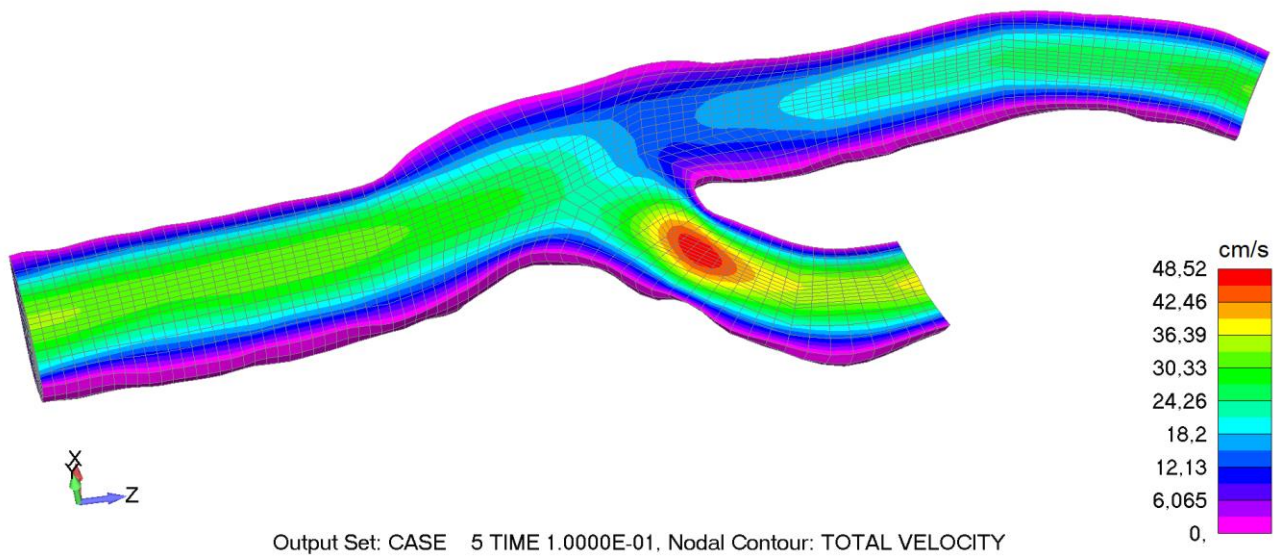
Материјалне карактеристике	Флуид (крв)
Густина ρ (kg / m^3)	1050
Динамичка вискозност μ ($kg / m \cdot s$)	$3.675 \cdot 10^{-3}$

Табела 7.1 Материјални подаци за домен флуида

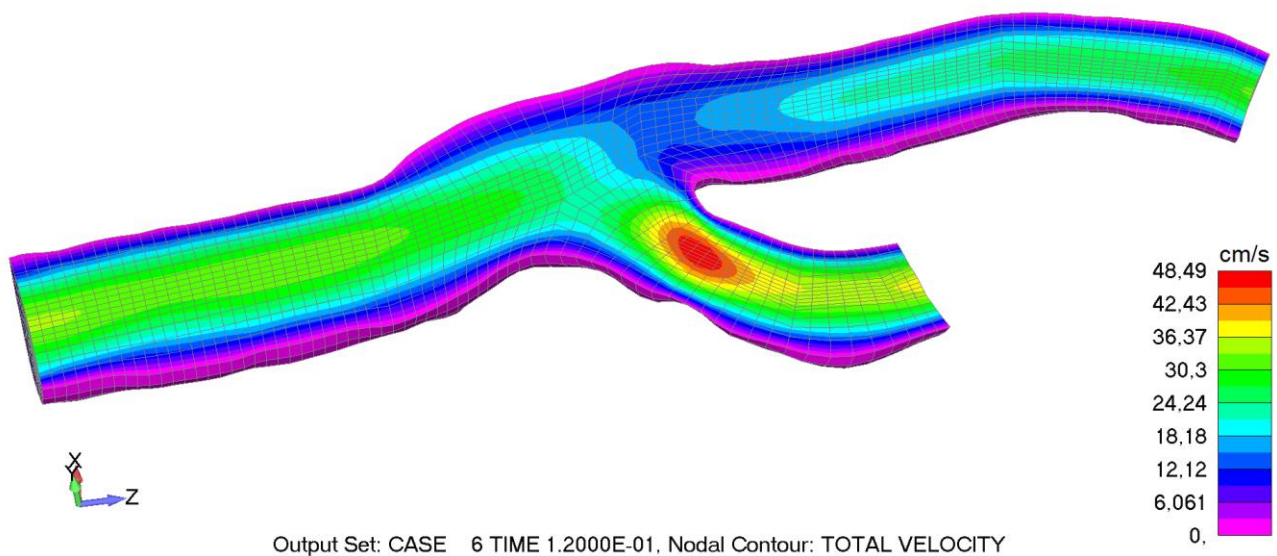
На сликама које следе приказани су резултати симулације струјања флуида. Физичка поља која се добијају прорачуном за домен флуида су брзина, притисак, смицајни напон и ОСИ индекс. Поље брзина струјања крви (слике од 7.7 до 7.10), поље пада притиска (слике од 7.11 до 7.14), расподела смицајног напона на зиду артерије (слике од 7.15 до 7.22) и ОСИ индекс (слике 7.23 и 7.24) приказани су у више корака од којих су најзначајнији кораци када имамо максимум систоле (5. и 6. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 10. и 24. корака.

Расподела брзине струјања крви (слике од 7.7 до 7.10) дата је у пресеку модела тако да се јасно може видети повећање брзине струјања на месту где имамо стенозу на унутрашњој грани каротидне артерије. На спољашњој грани каротидне артерије долази до смањења брзине које може да има за последицу нагомилавање штетних материја. на сликама од 7.15 до 7.22 приказана је расподела смицајног напона на зиду артерије где се

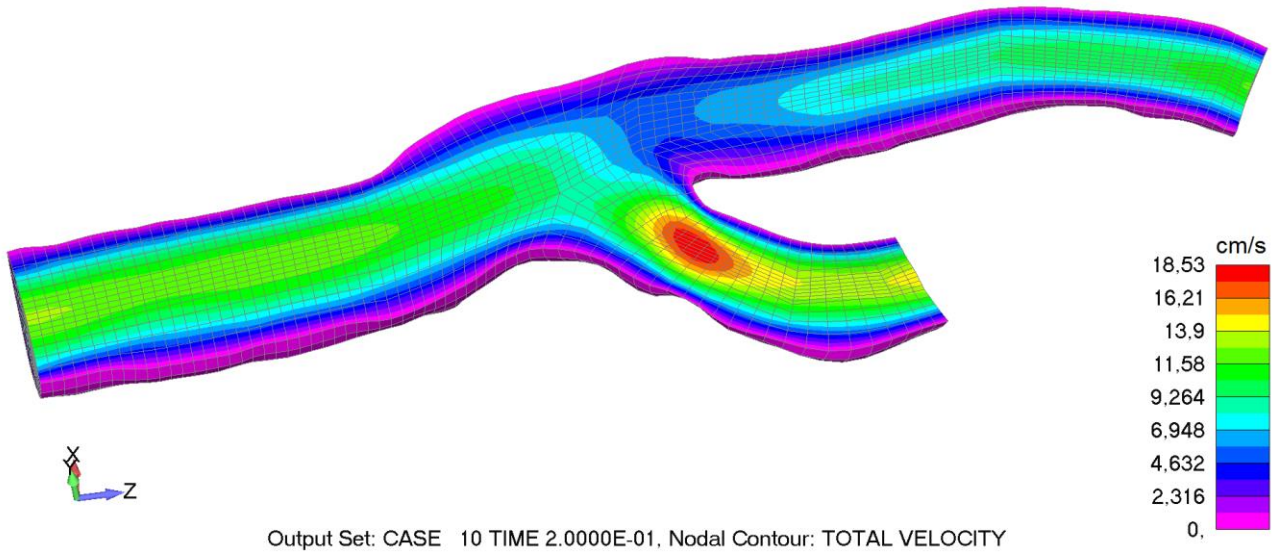
може видети да су максималне вредности смицајног напона на местима где имамо стенозу артерије.



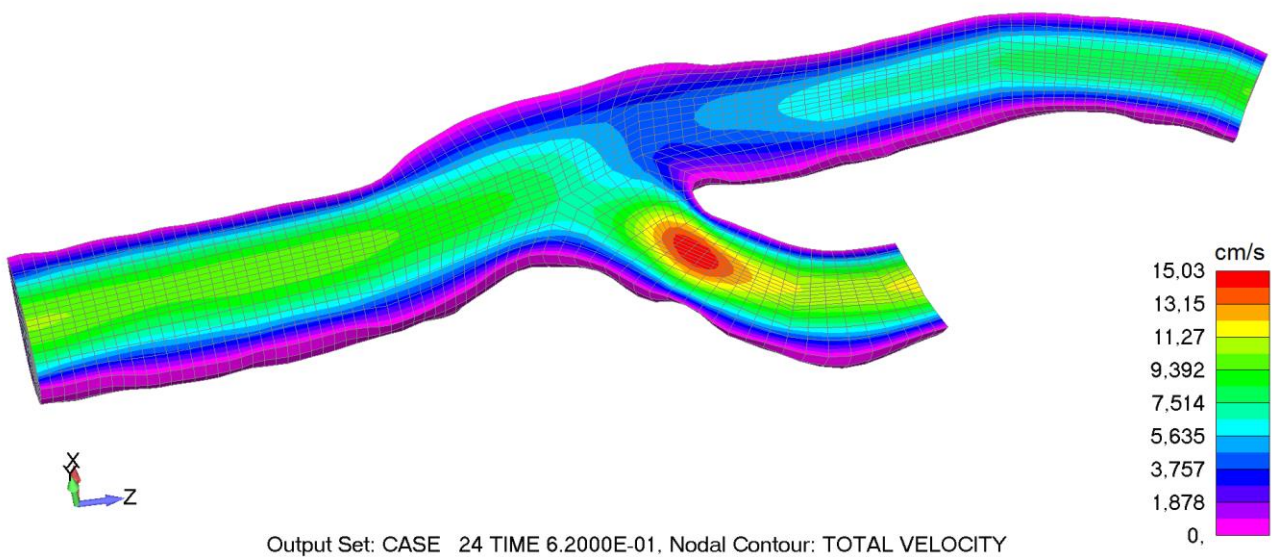
Слика 7.7 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 5



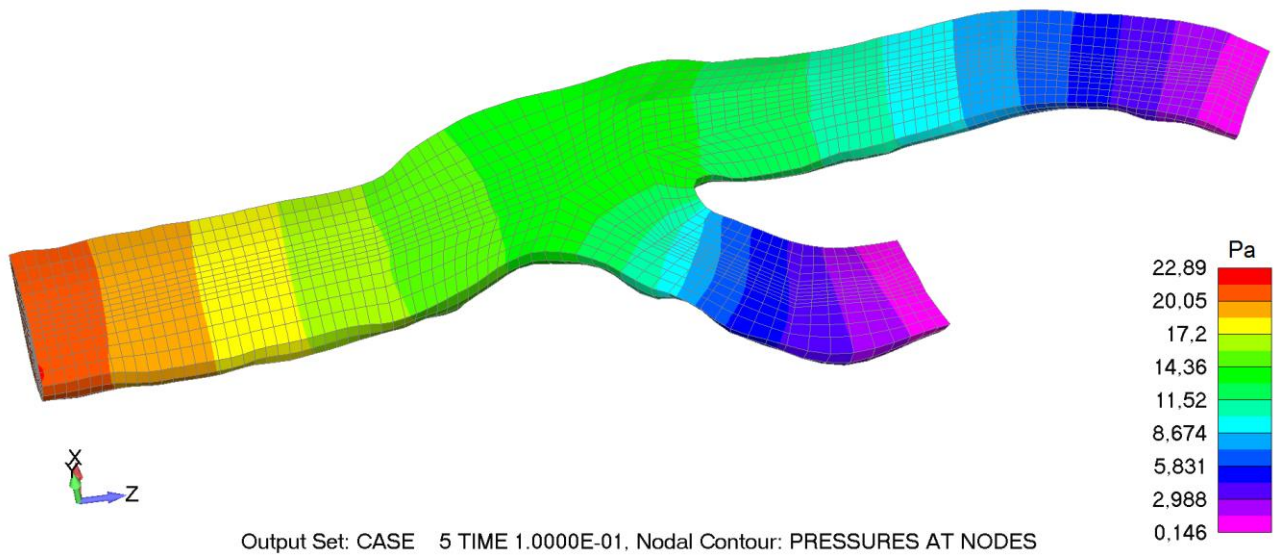
Слика 7.8 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 5



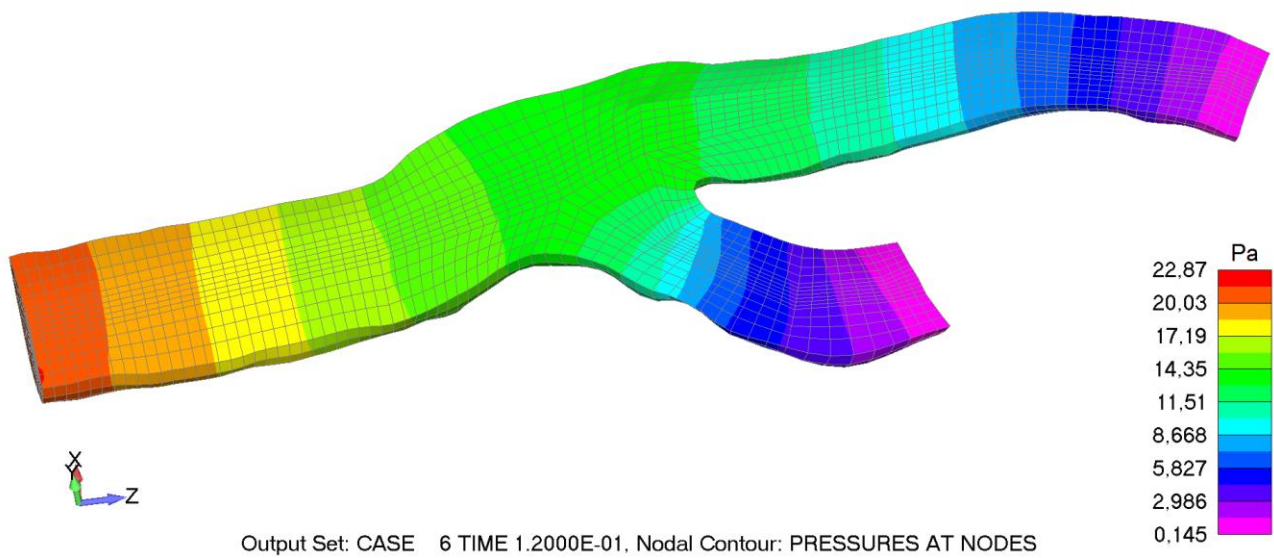
Слика 7.9 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 5



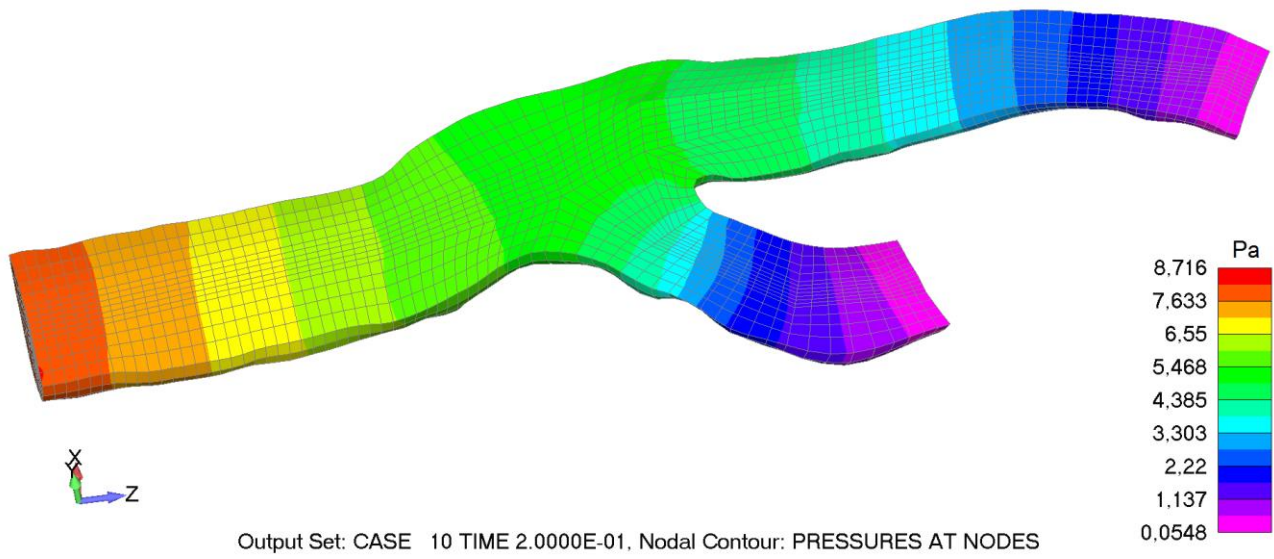
Слика 7.10 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5



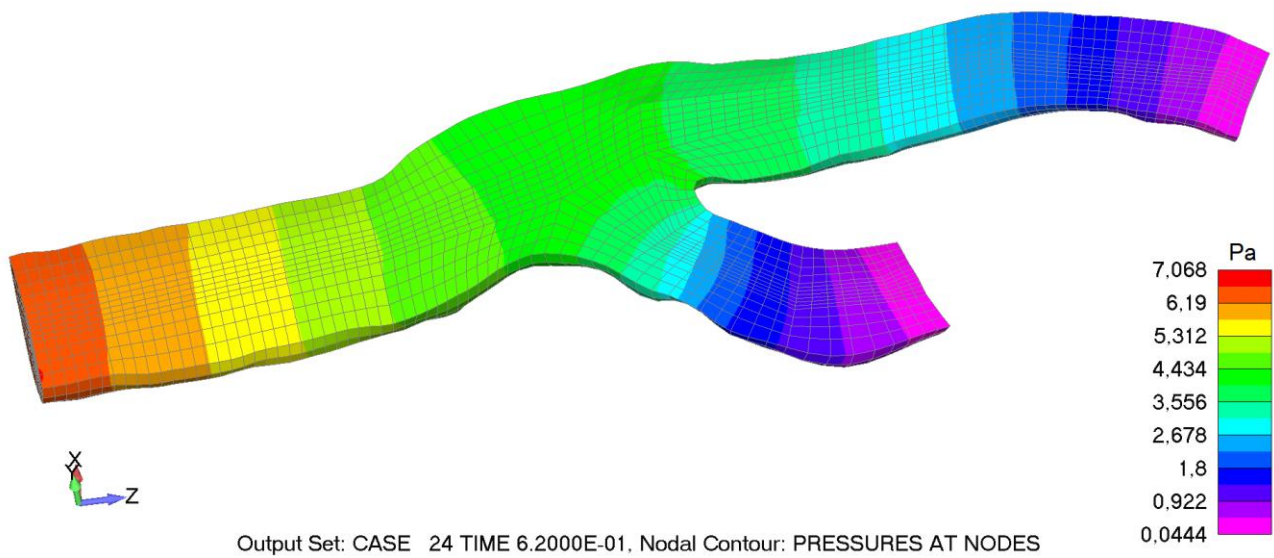
Слика 7.11 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 5



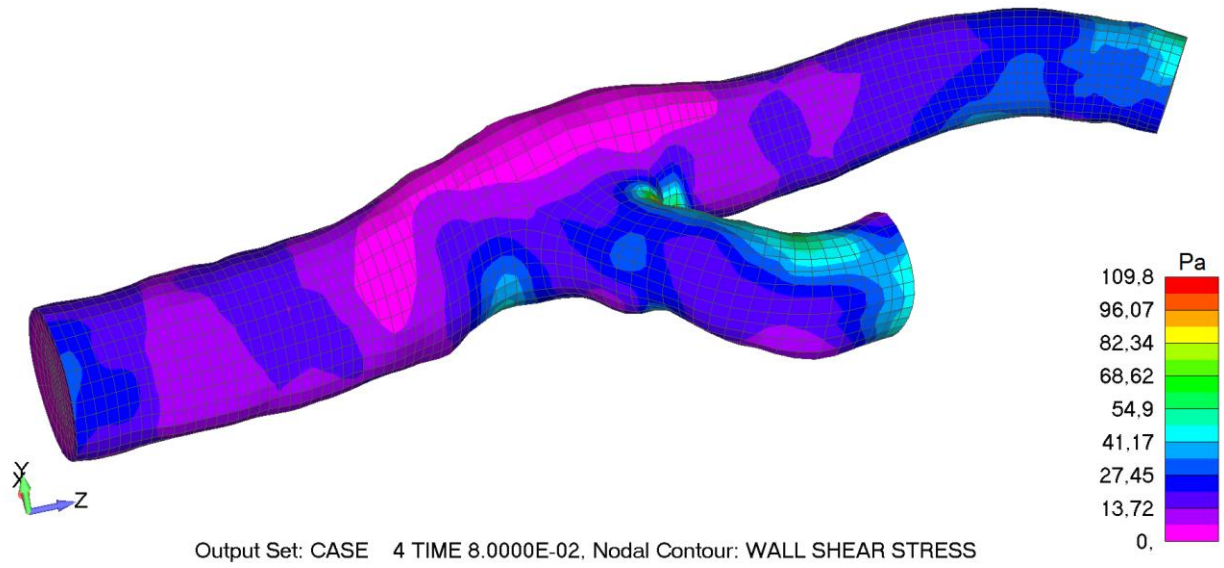
Слика 7.12 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 5



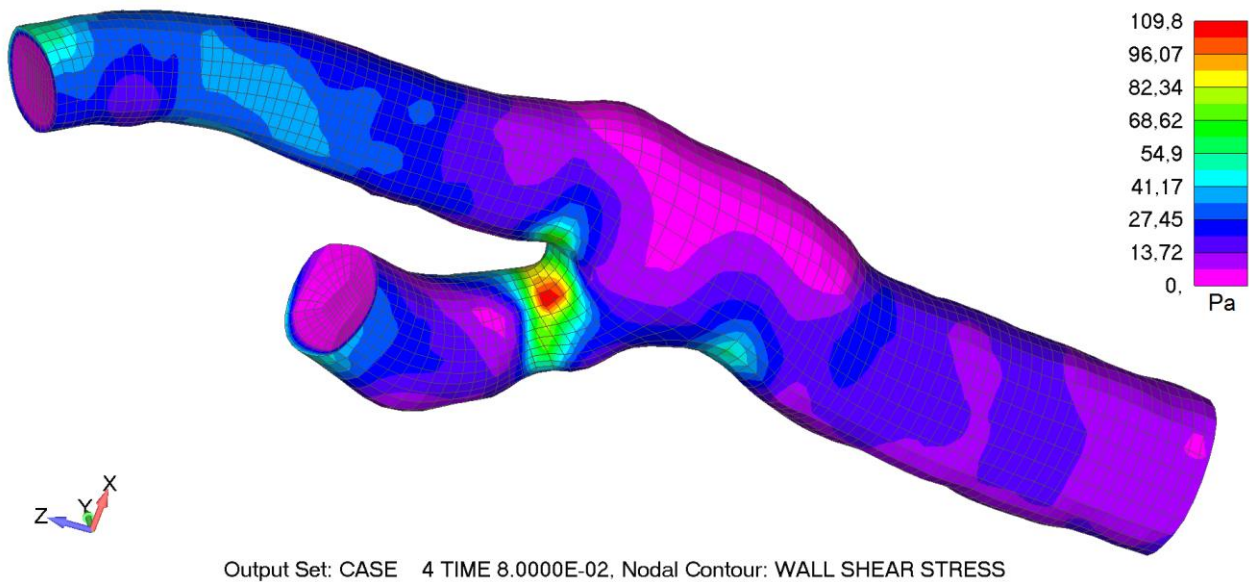
Слика 7.13 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 5



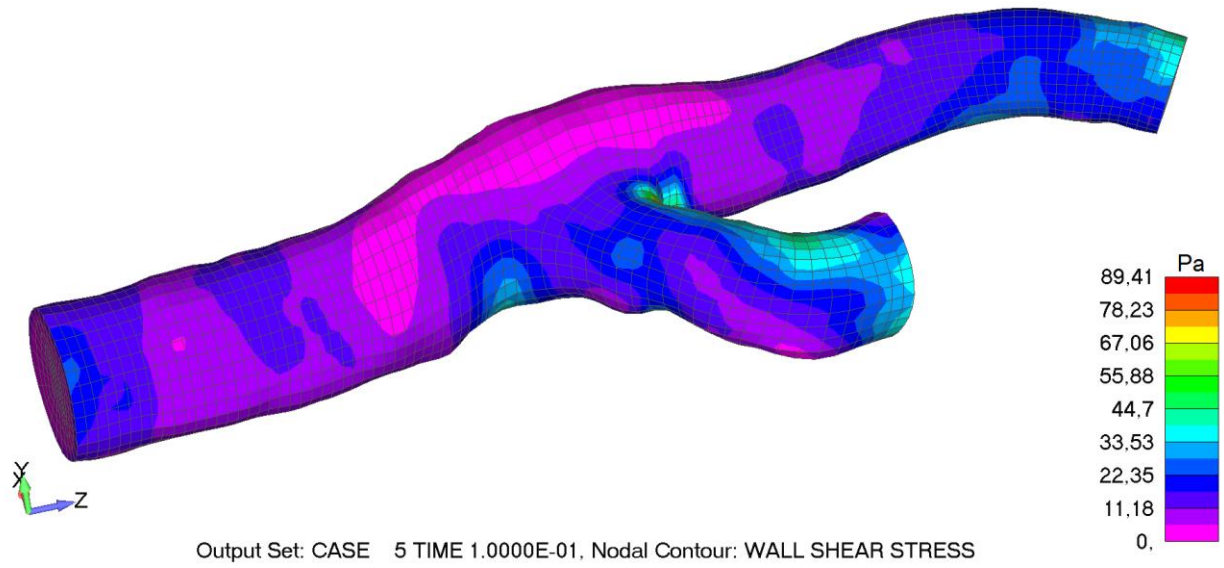
Слика 7.14 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5



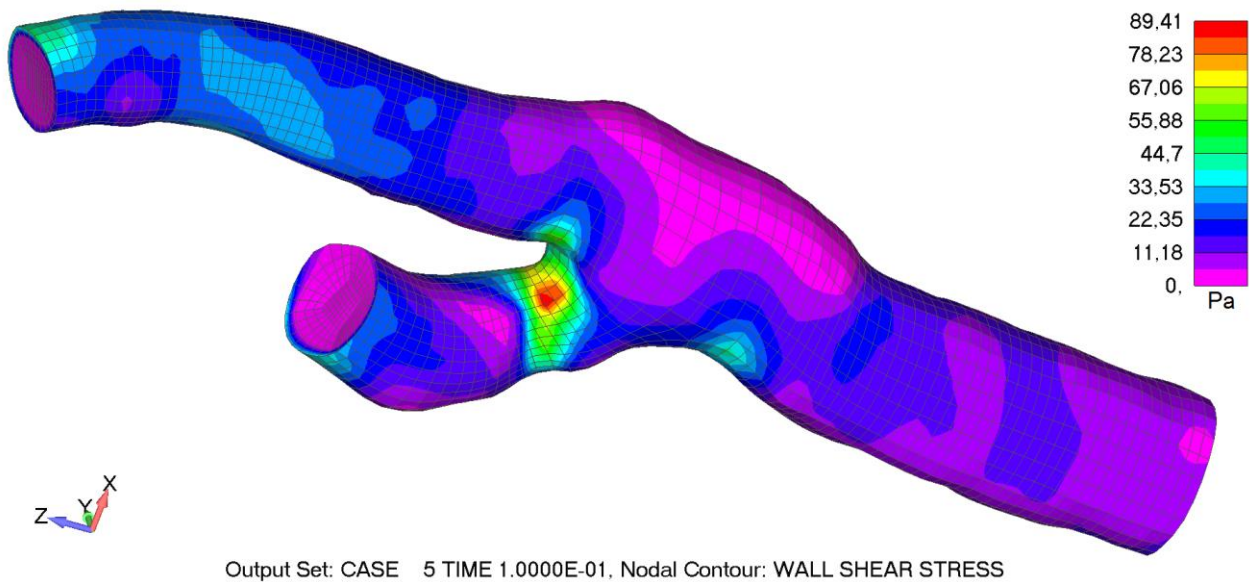
Слика 7.15 Расподела смицајног напона за корак 4, поглед 1, пацијент 5



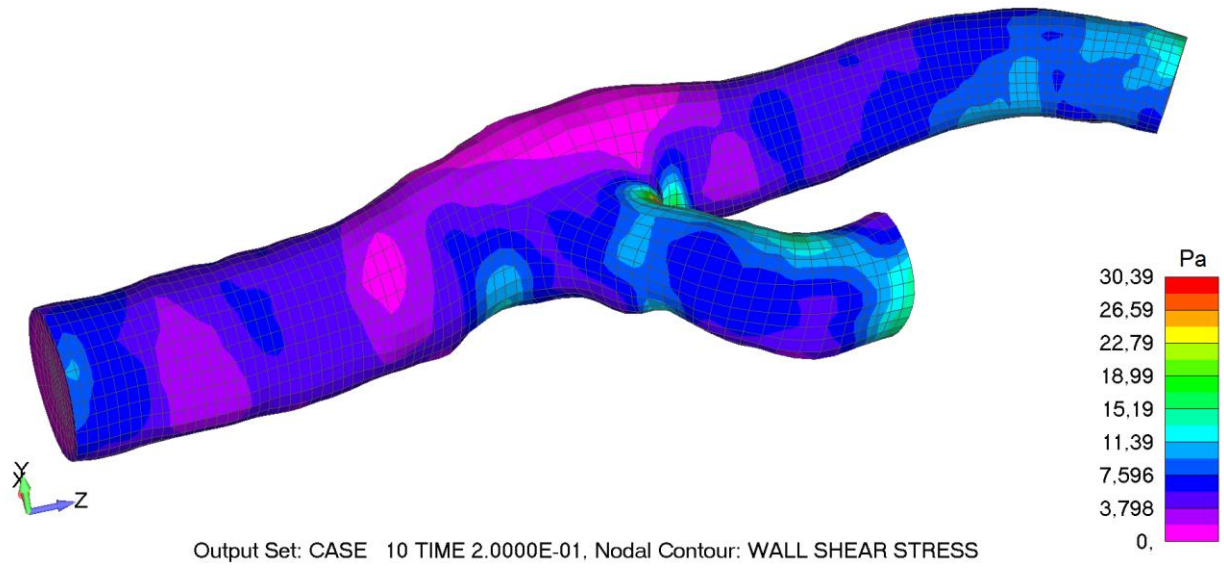
Слика 7.16 Расподела смицајног напона за корак 4, поглед 2, пацијент 5



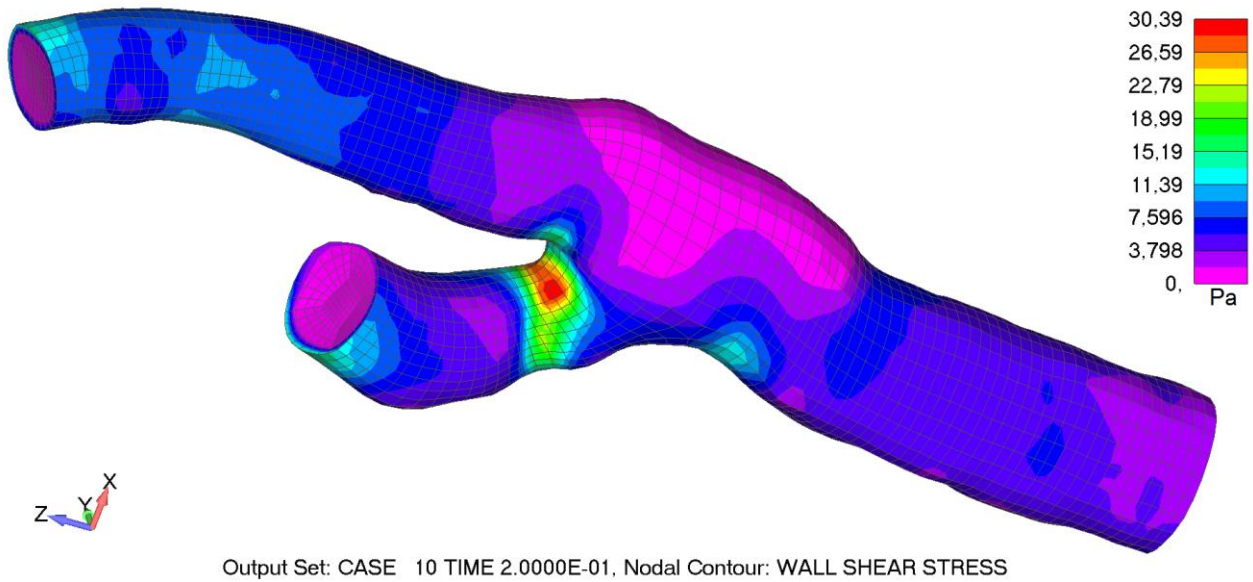
Слика 7.17 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 5



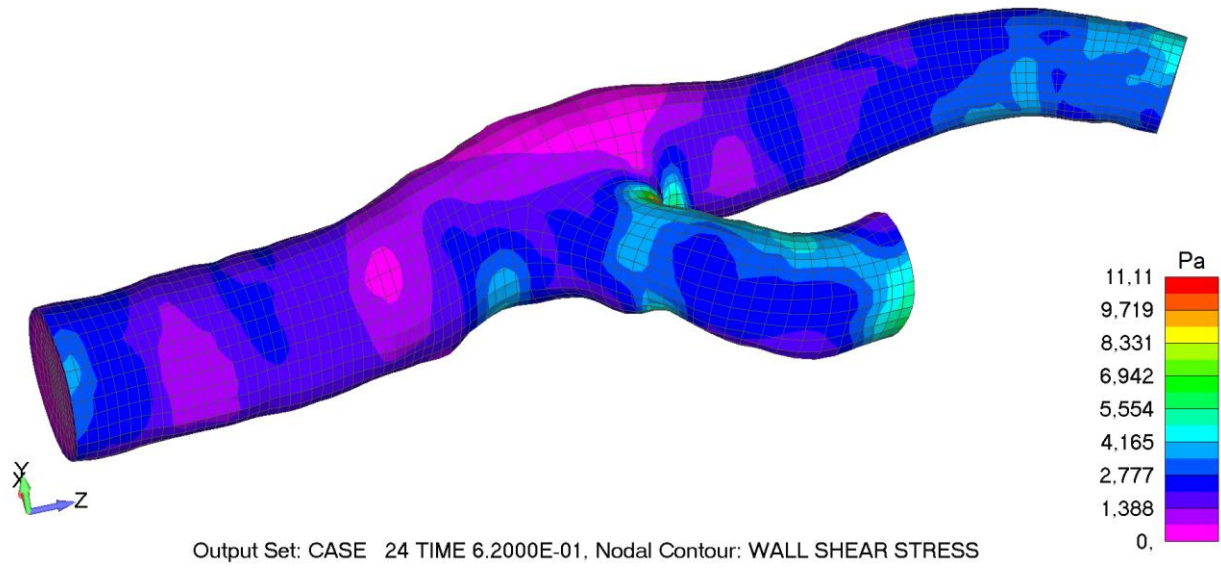
Слика 7.18 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 5



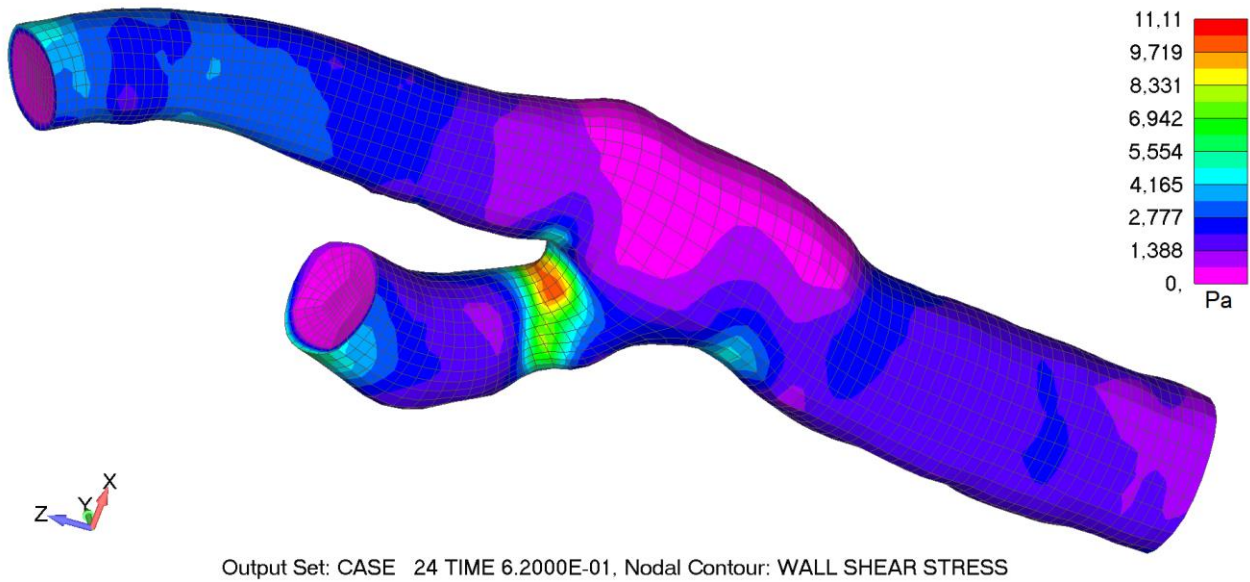
Слика 7.19 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 1, пацијент 5



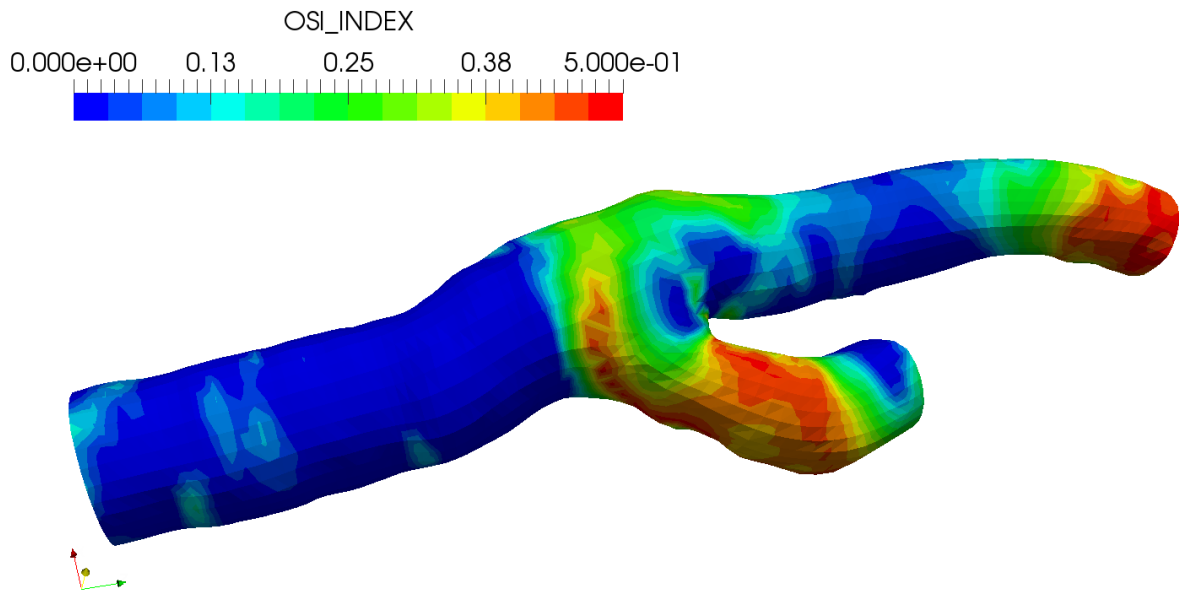
Слика 7.20 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 2, пацијент 5



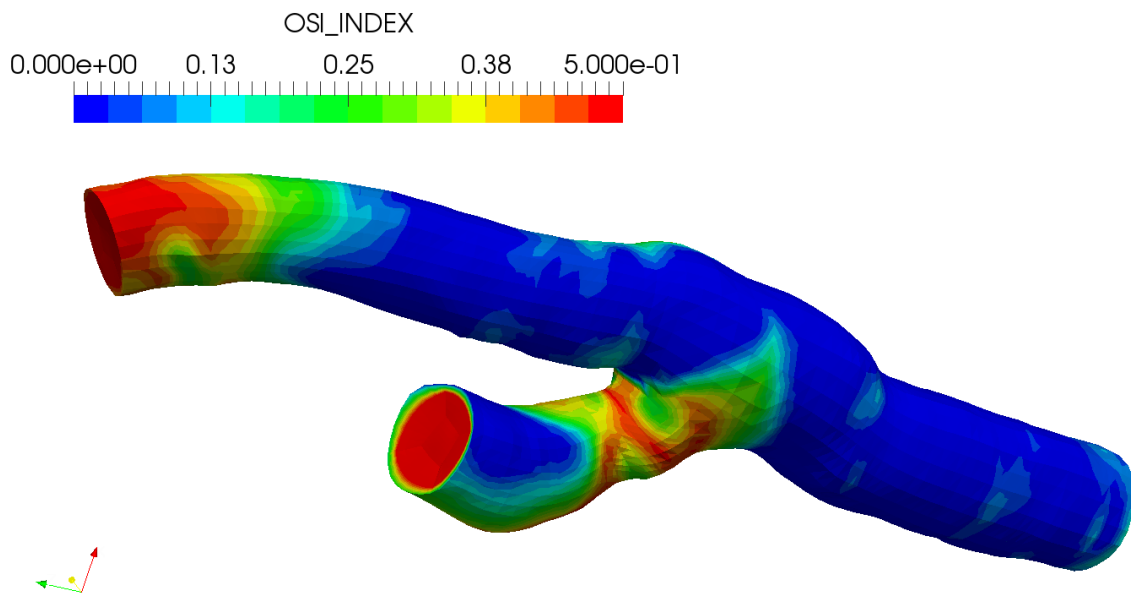
Слика 7.21 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 1, пацијент 5



Слика 7.22 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 2, пацијент 5



Слика 7.23 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 5



Слика 7.24 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 5

7.3 Нумеричка симулација интеракције ламинарног струјања флуида и солида на примеру каротидне бифуркације, пацијент 7

Симулација струјања крви кроз еластичан крвни суд извршена је на реалној бифуркацији каротидне артерије изабраног пацијента 7. За прорачун је коришћен софтвер *PAK-FS* [46]. Прорачун је извршен у 30 временских корака у интервалу од 0.8s. Од тога првих 10 корака по 0.02s, а осталих 20 корака по 0.03s.

МКЕ модел флуидног домена је моделиран са 20237 3Д елемената (слика 7.4а), док МКЕ модел солидног домена садржи 2303 елемената љуске (слика 7.4б).

Просечна брзина струјања крви на улазу у каротидну артерију је $v_{sr} = 16.9 \text{ cm/s}$. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.6).

Мреже коначних елемената флуида и солида су компатибилне на додиру граничних површина. Брзине чворова на контактної површини су једнаке.

За домен флуида примењени су следећи гранични услови:

- на улазу је задат параболични профил брзине,
- узета је у обзир деформабилност артеријских зидова, па су брзине на интерфејсу једнаке брзинама добијеним из прорачуна чврстоће, и
- на површинама на излазним гранама модела постоји отпор који се јавља због тога што се струјање крви наставља кроз друге крвне органе.

Уколико се као гранични услови не задају притисци на излазним површинама, као резултат добија се поље пада притиска у моделираном домену. За домен солида чворовима на улазу је ограничено померање у правцу струјања. Гранични услови су задати тако да је ограничено кретање тежишта пресека у равни улазног пресека.

Материјалне карактеристике за домен флуида и домен солида дати су у следећој табели:

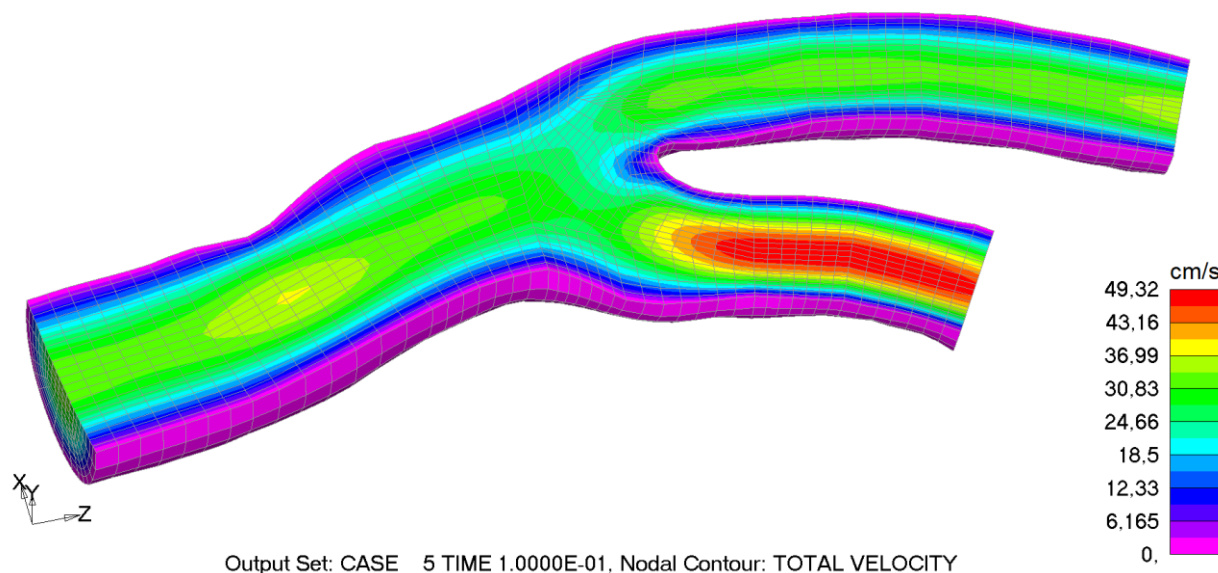
Материјалне карактеристике	Флуид (крв)	Солид (крвни суд)
Густина ρ (kg/m^3)	1050	1100
Динамичка вискозност μ ($kg/m \cdot s$)	$3.675 \cdot 10^{-3}$	/
Модул еластичности E (Pa)	/	$3.61 \cdot 10^5$
Поасонов коефицијент ν	/	0.49

Табела 7.2 Материјални подаци за домен флуида и домен солида

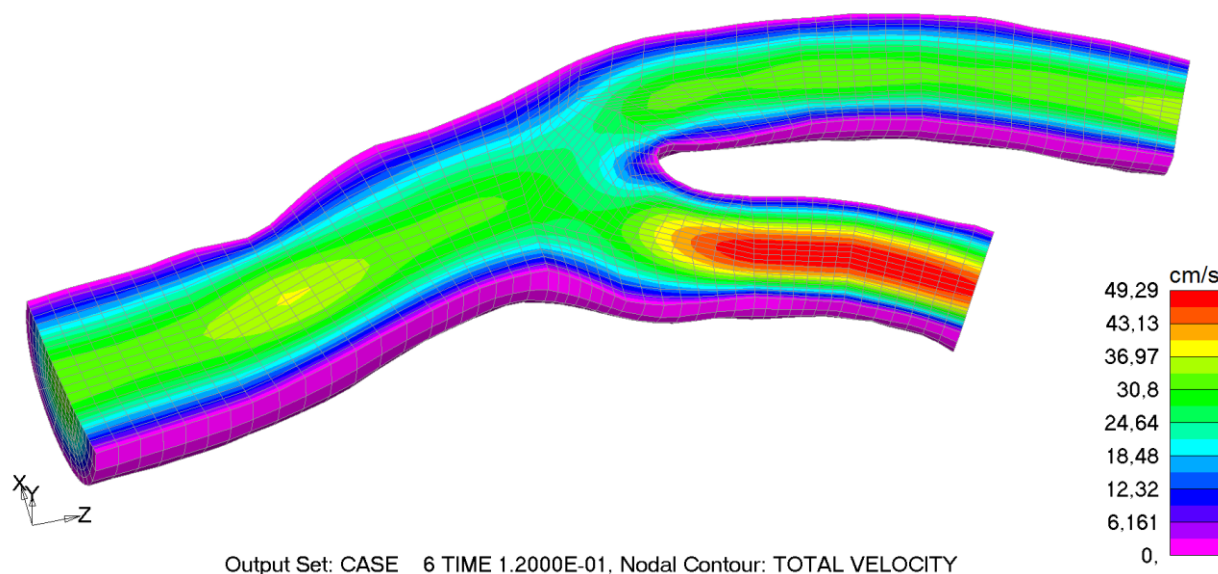
На сликама које следе приказани су резултати симулације интеракције флуида и структуре. Физичка поља која се добијају прорачуном за домен флуида су брзина, притисак, смицајни напон и ОСИ индекс, док за домен солида имамо резултате еквивалентног Вон Мизесовог напона на површини љуске.

Поље брзина струјања крви (слике од 7.25 до 7.28), поље пада притиска (слике од 7.29 до 7.32), расподела смицајног напона на зиду артерије (слике од 7.33 до 7.40), ОСИ индекс (слике 7.49 и 7.50) и расподела еквивалентног вон Мизесовог напона (слике од 7.41 до

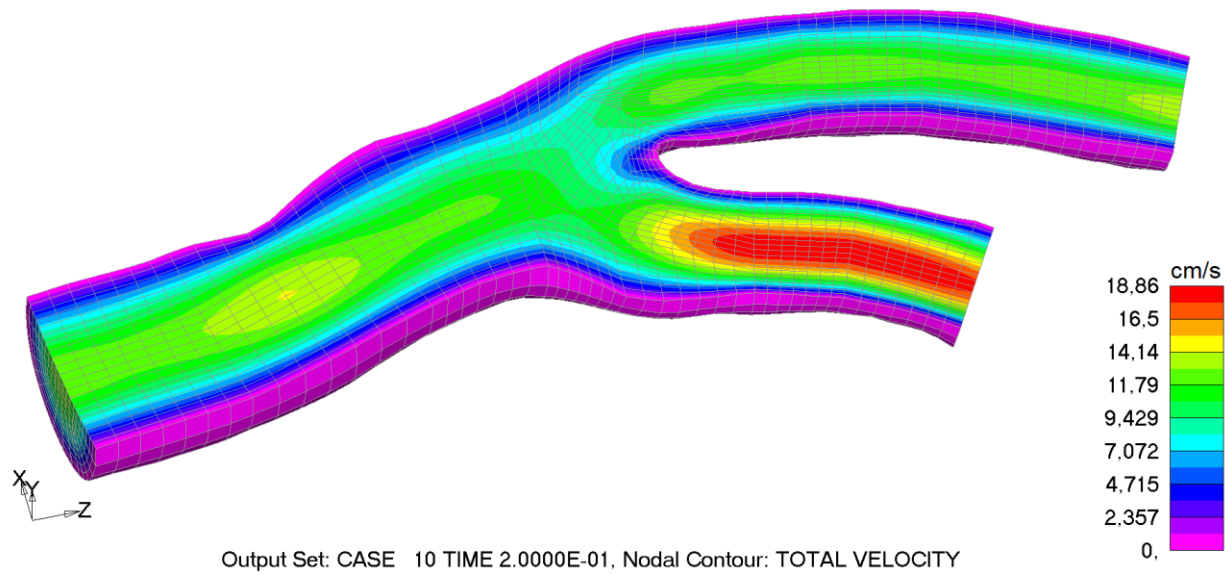
7.48) приказани су у више корака од којих су најзначајнији кораци када имамо максимум систоле (4. и 5. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 10. и 24. корака. Домен флуида је представљен у пресеку код приказивања резултата за брзину флуида и пад притиска.



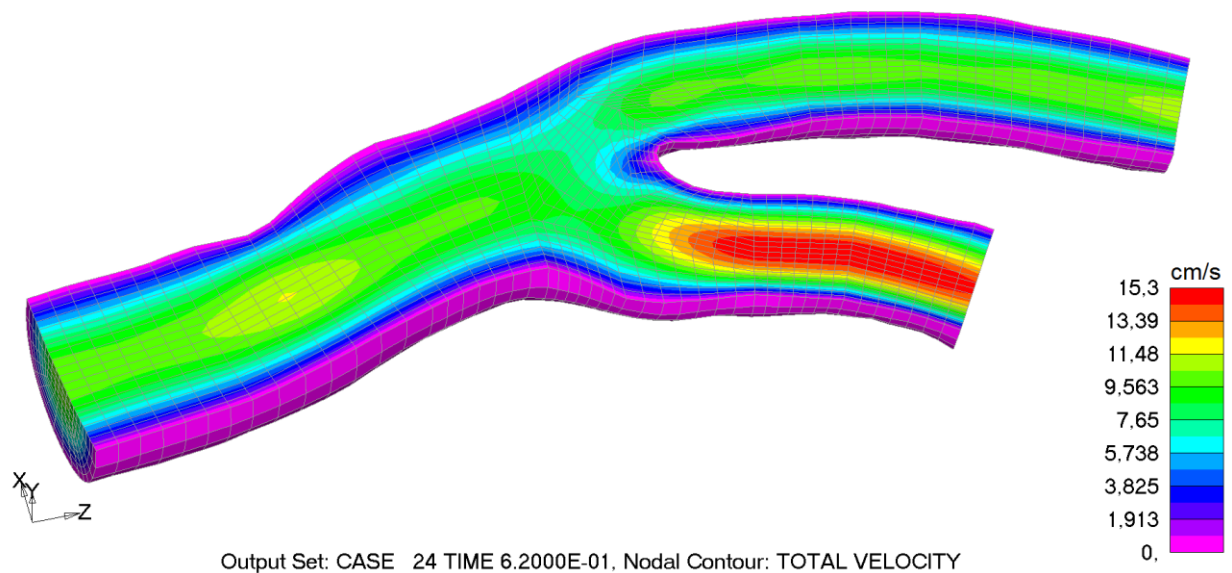
Слика 7.25 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 7



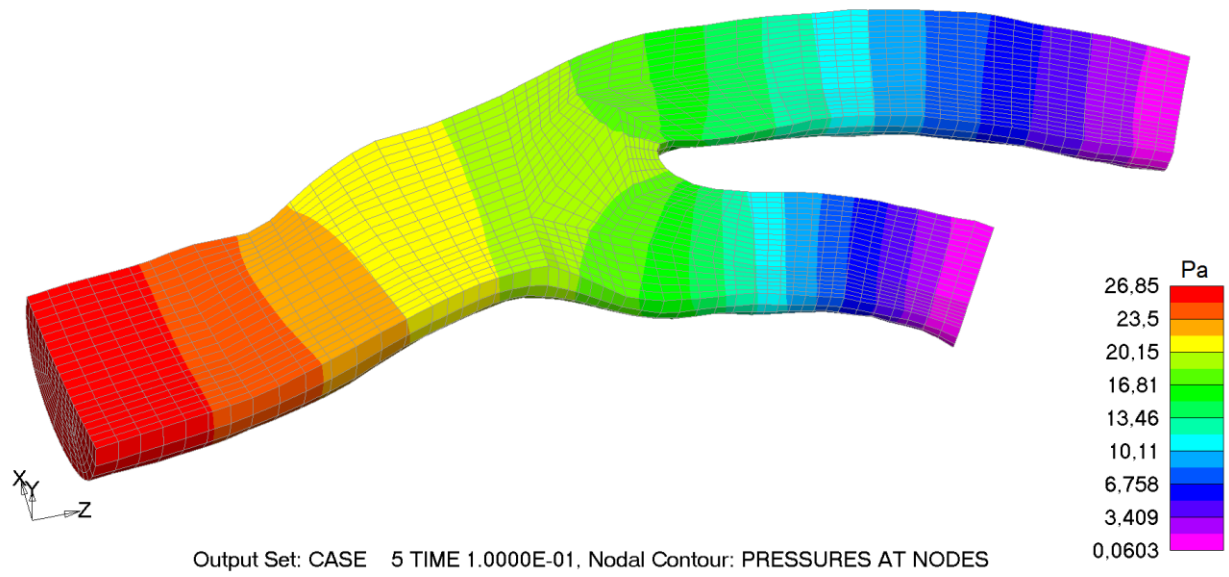
Слика 7.26 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 7



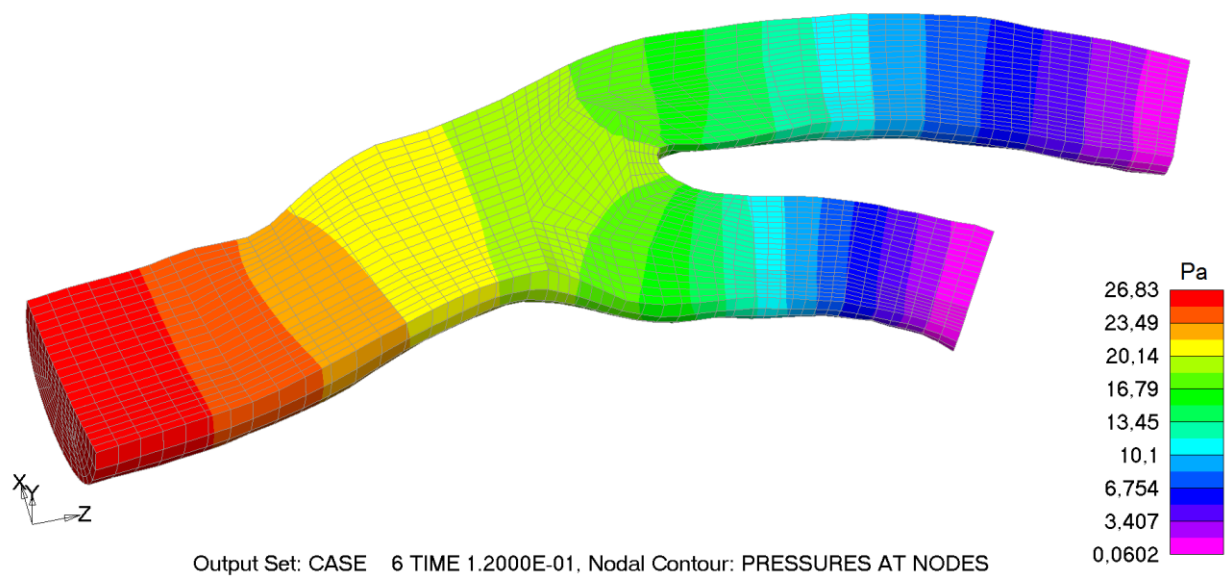
Слика 7.27 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 7



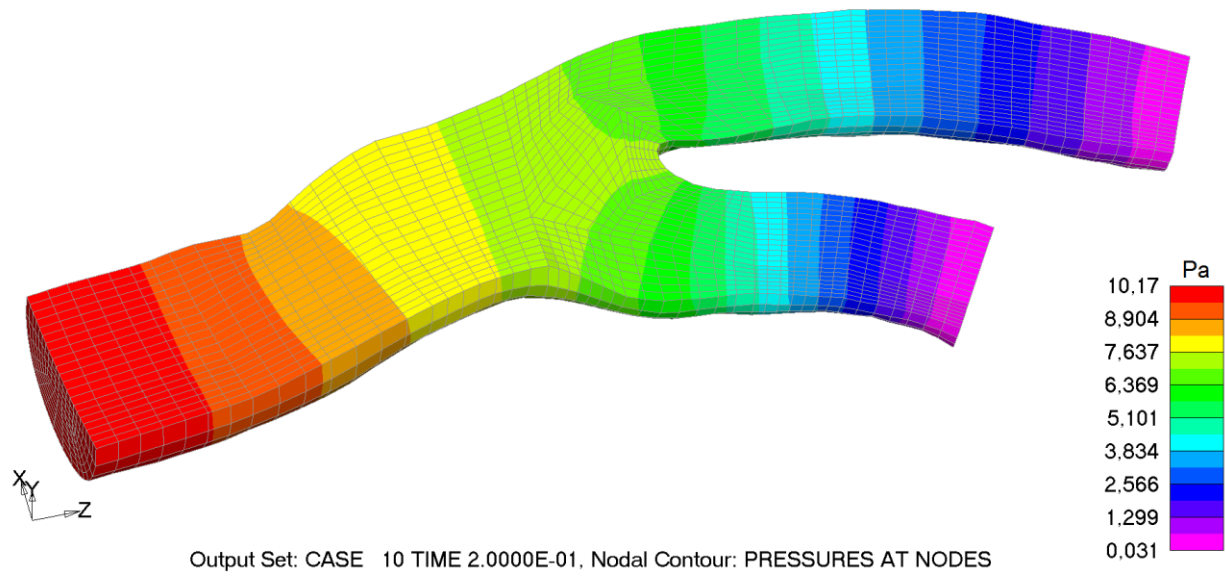
Слика 7.28 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7



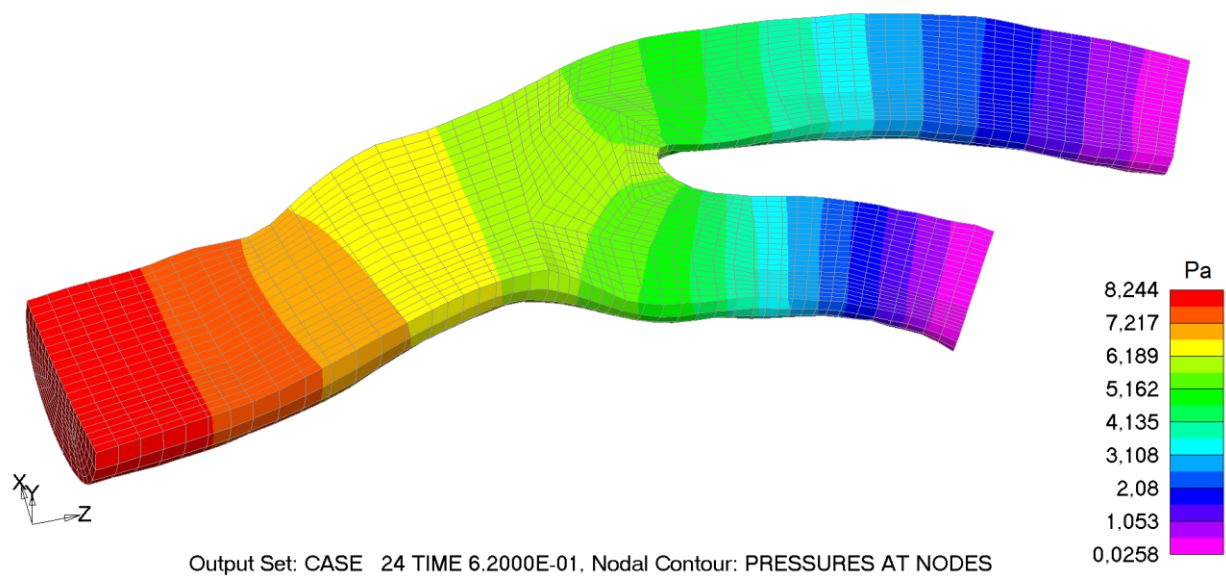
Слика 7.29 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 5, пацијент 7



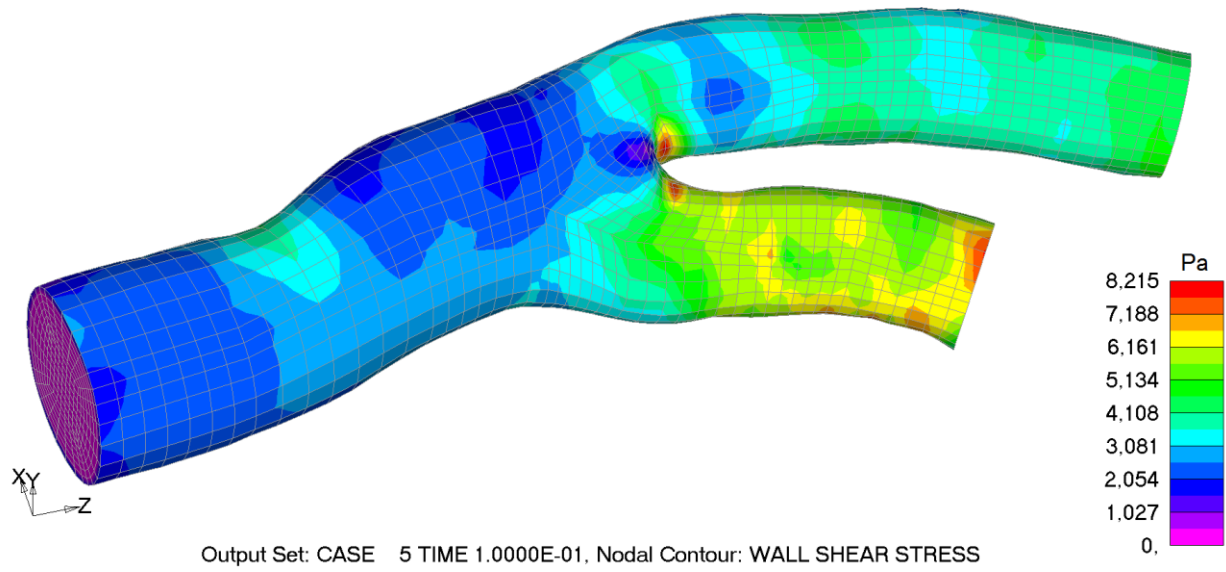
Слика 7.30 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 6, пацијент 7



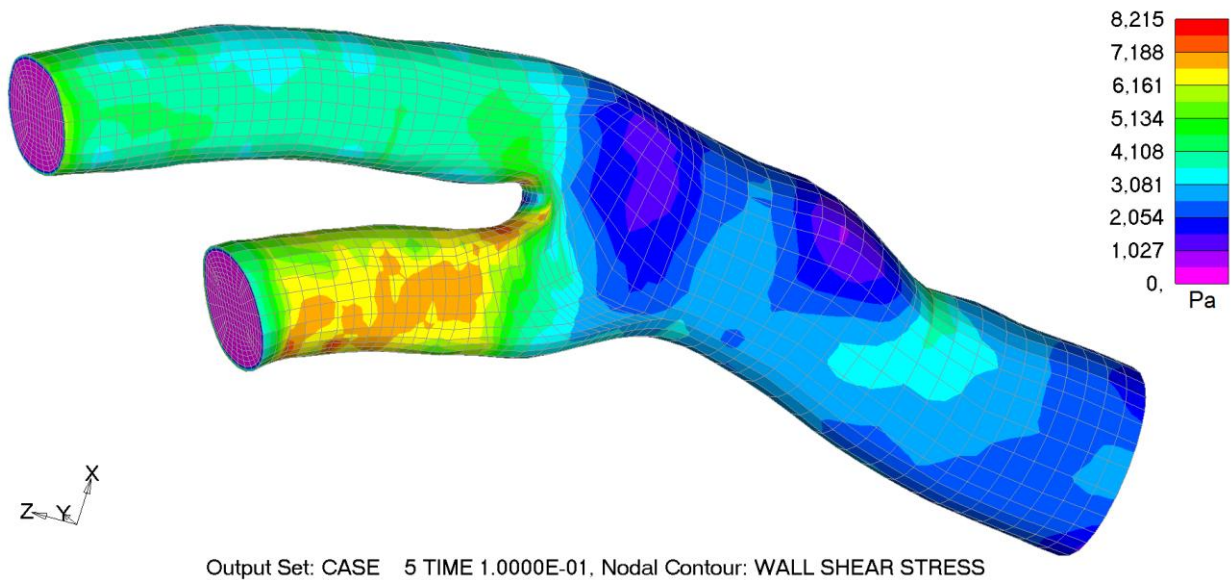
Слика 7.31 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 10, пацијент 7



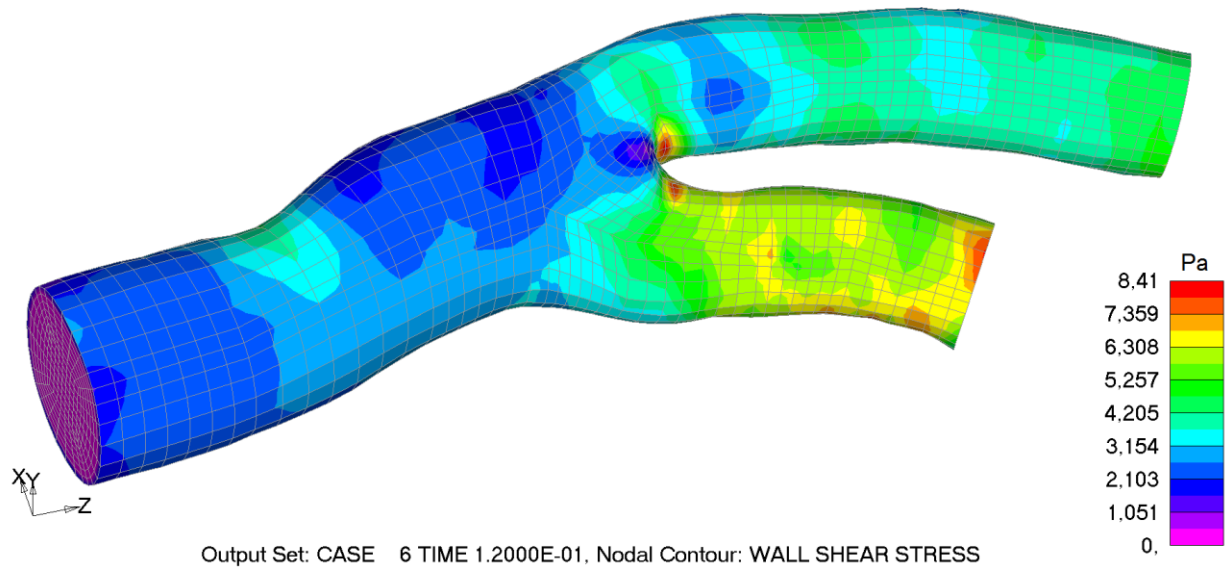
Слика 7.32 Пад притиска крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7



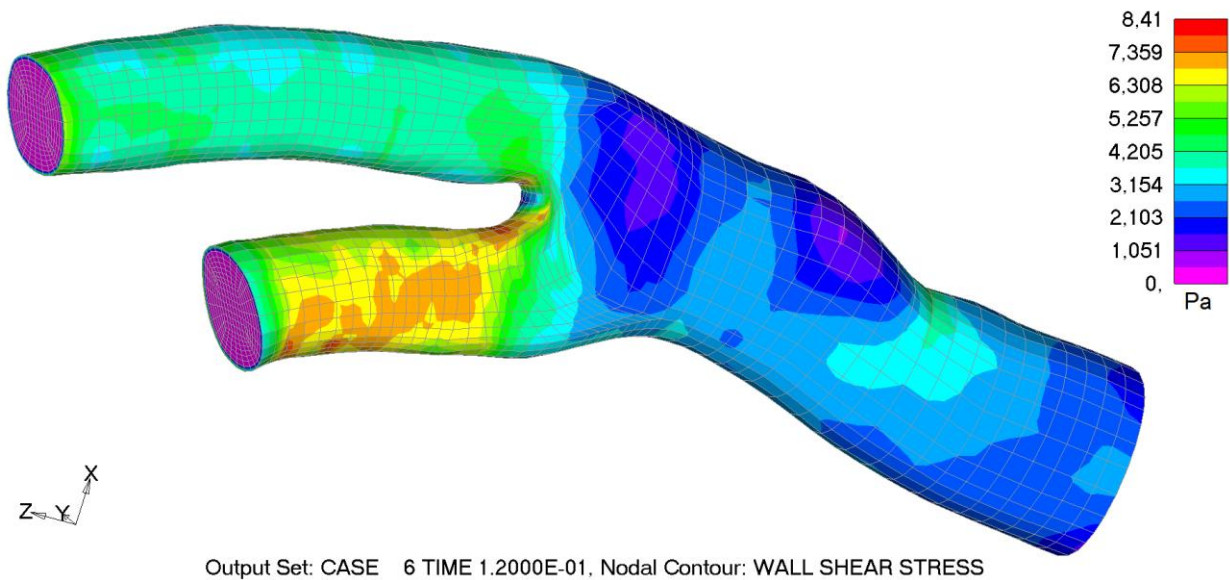
Слика 7.33 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 7



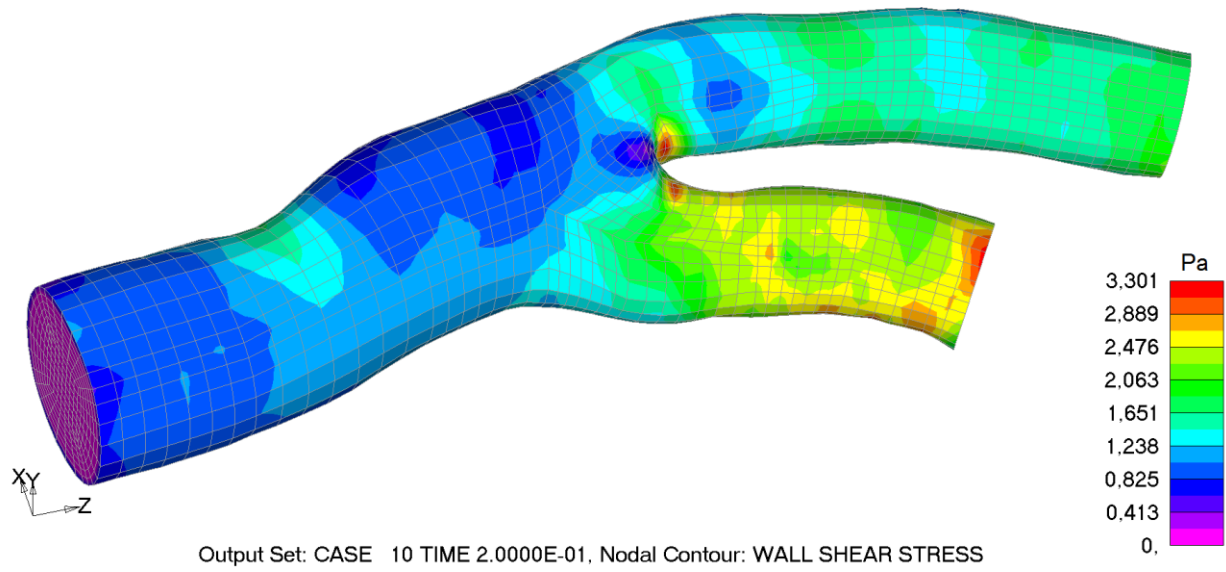
Слика 7.34 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7



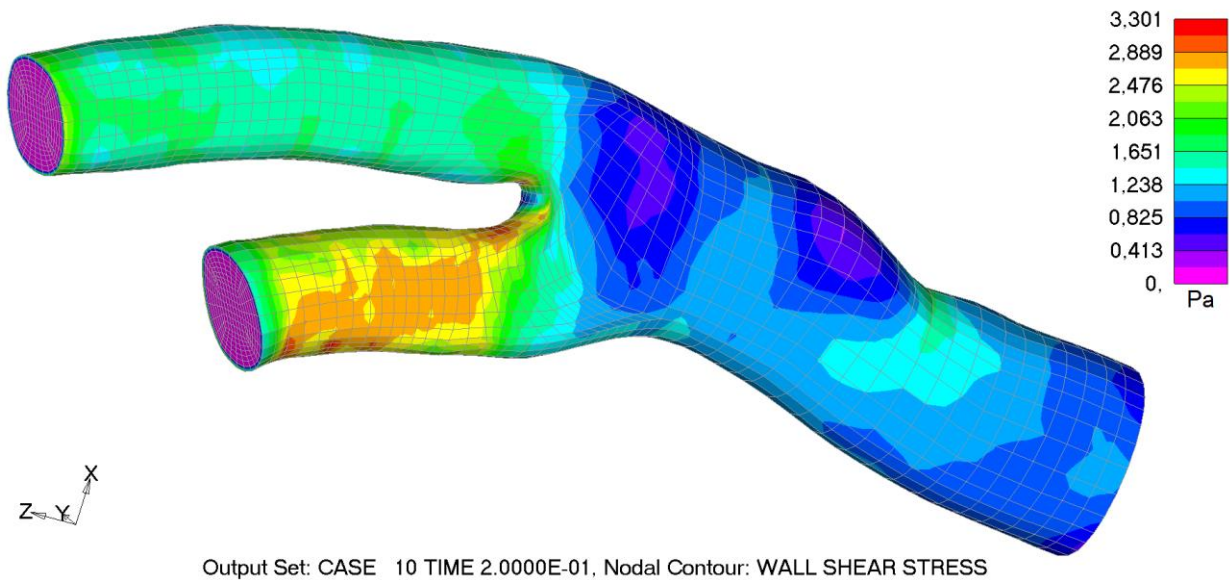
Слика 7.35 Расподела смицајног напона за корак 6, поглед 1, пацијент 7



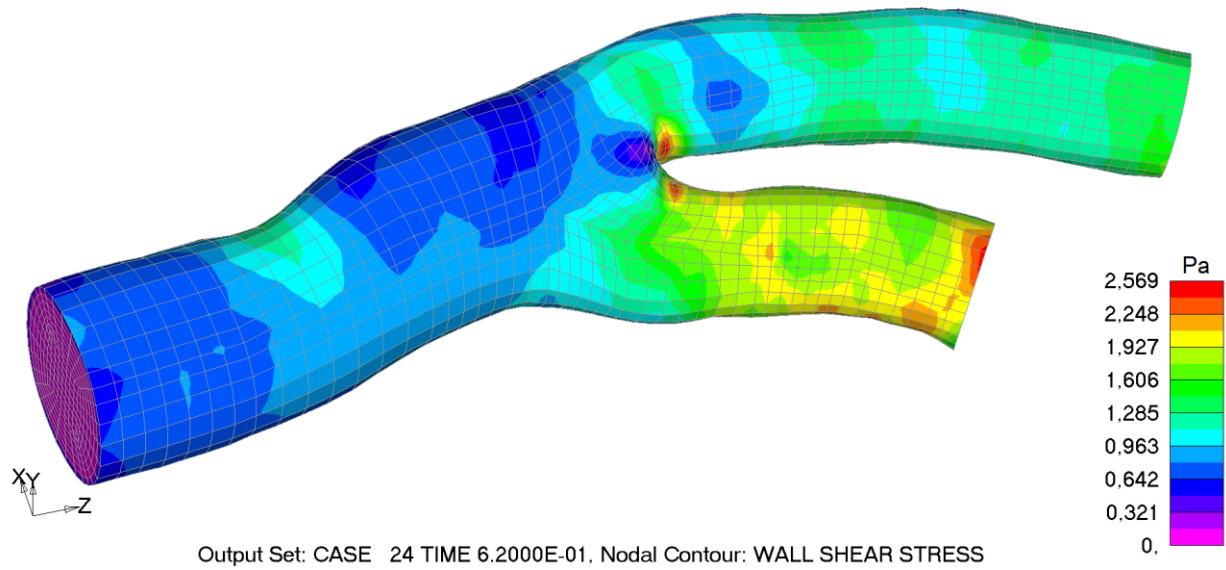
Слика 7.36 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7



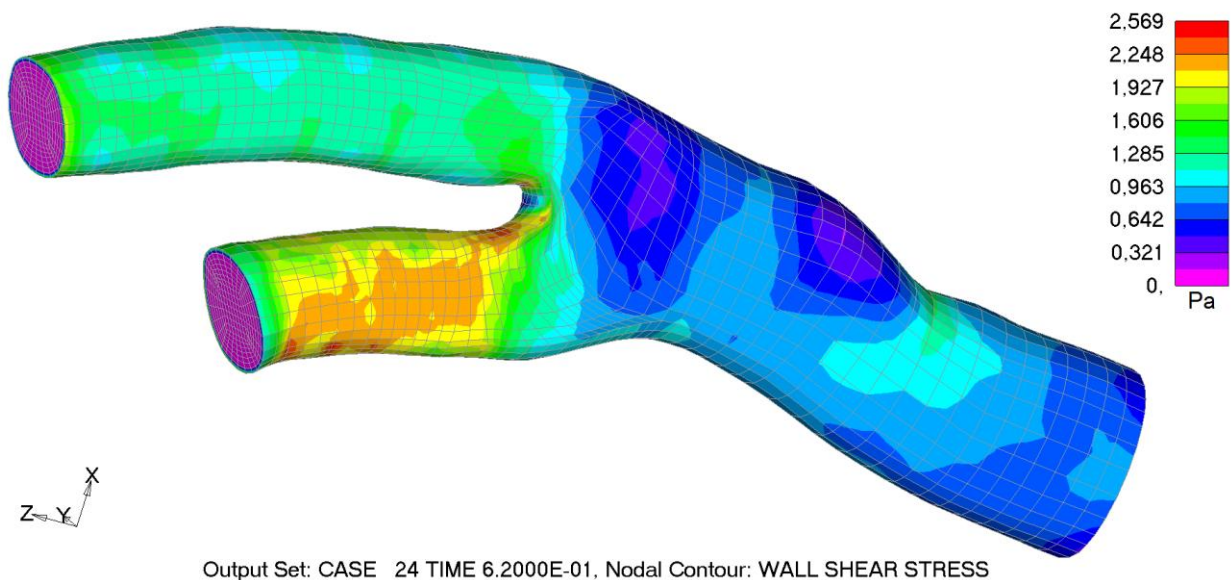
Слика 7.37 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 1, пацијент 7



Слика 7.38 Расподела смицајног напона за корак 10, поглед 2, пацијент 7

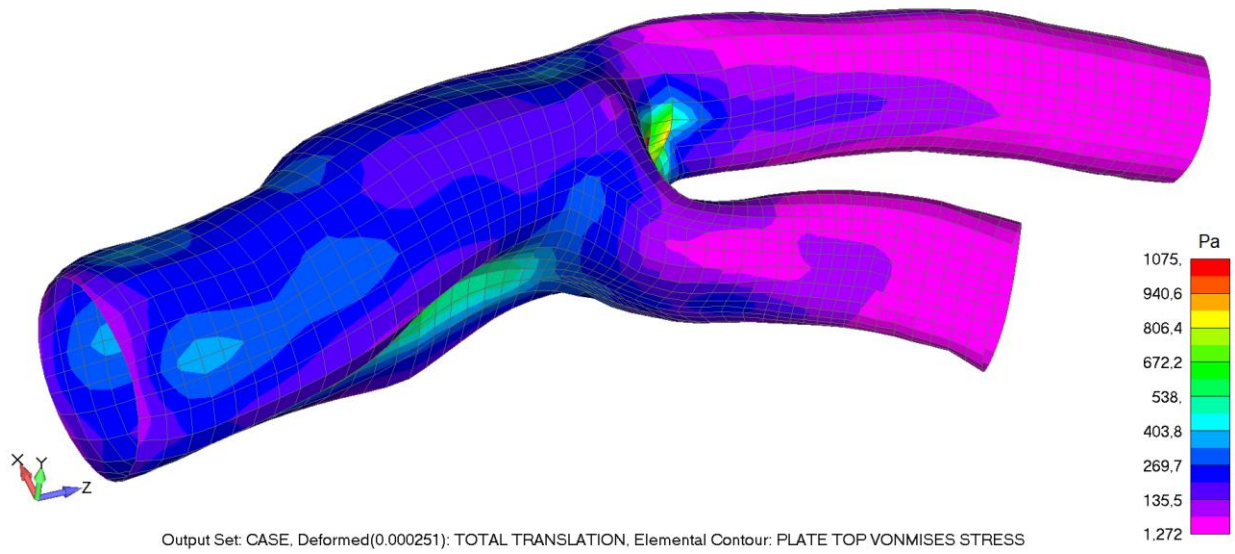


Слика 7.39 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 1, пацијент 7

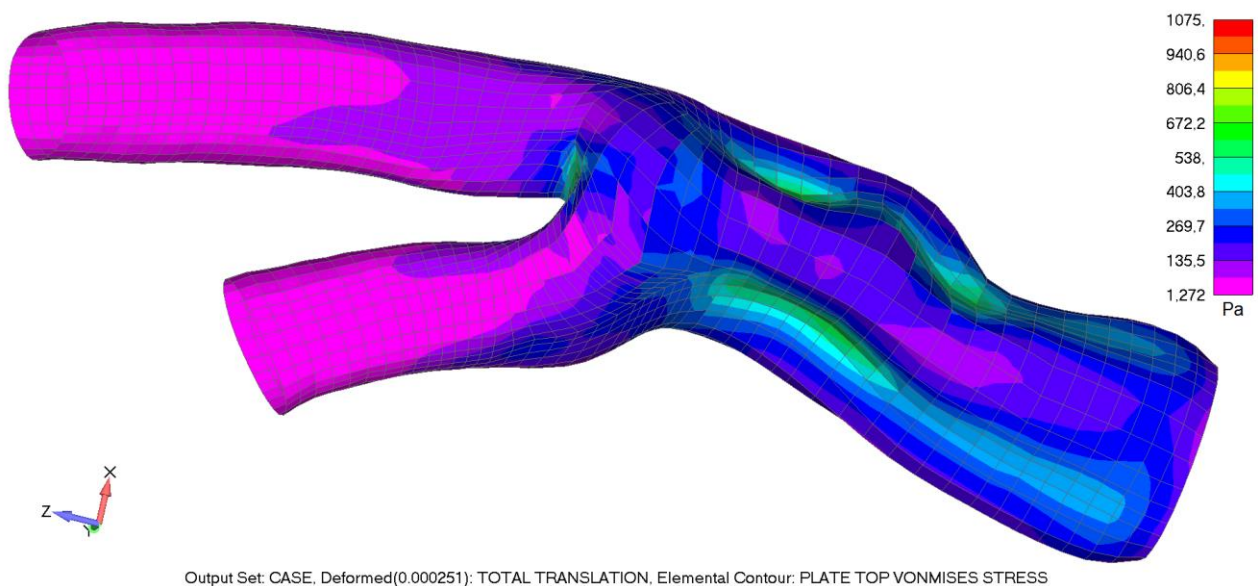


Слика 7.40 Расподела смицајног напона за корак 24, поглед 2, пацијент 7

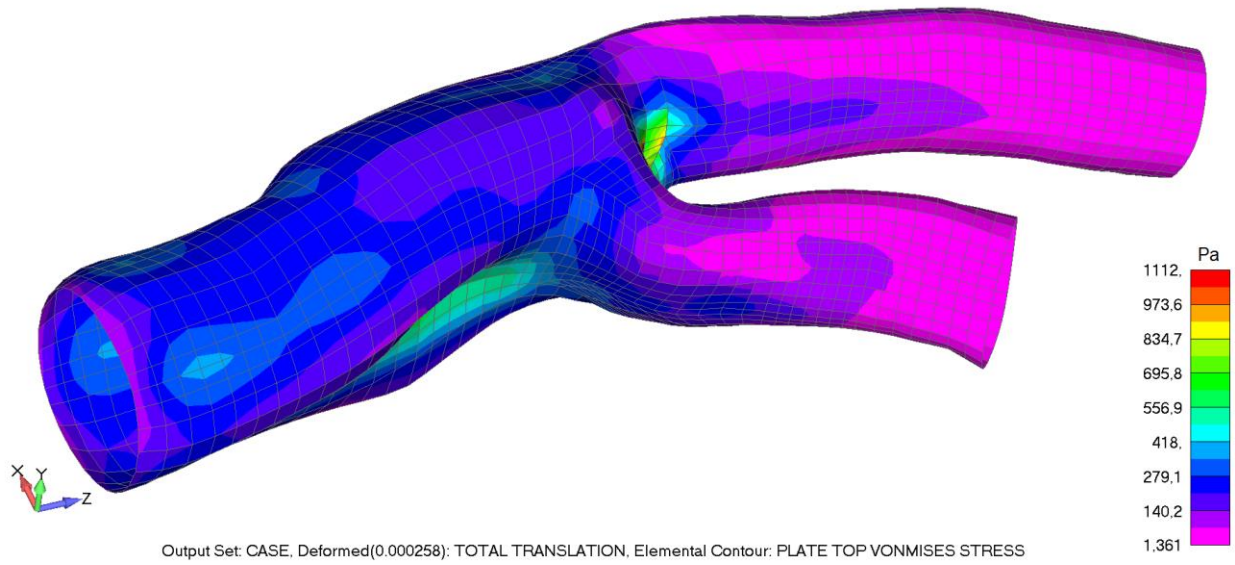
Места са мањом вредношћу смицајног напона подложнија су настајању плака, па је овај резултат од изузетне важности у дијагностиковању и лечењу атеросклерозе.



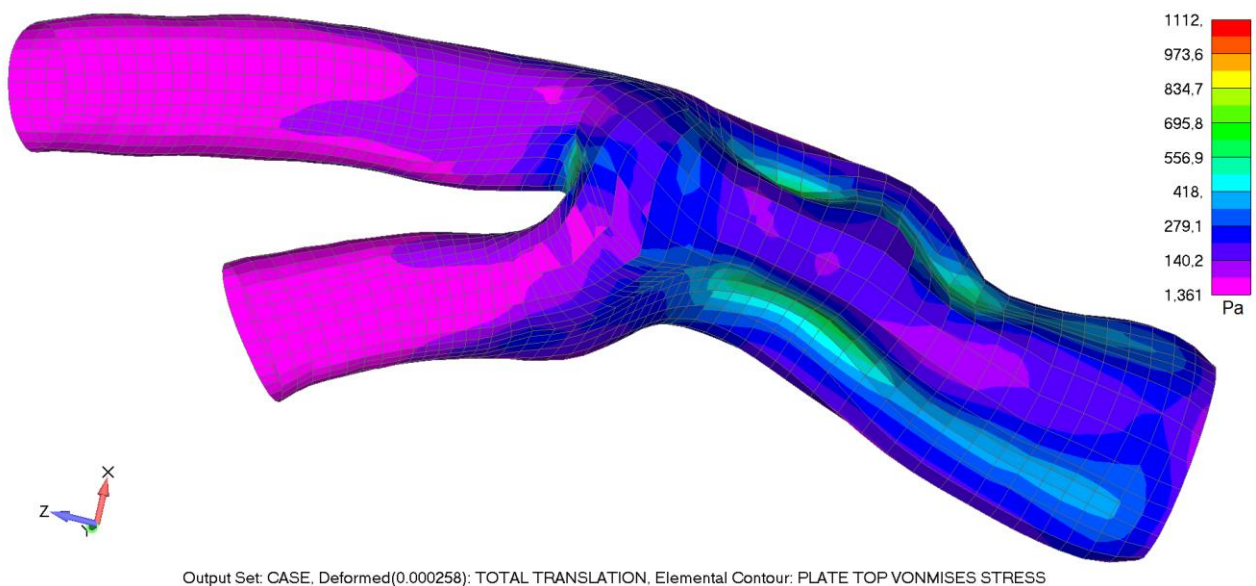
Слика 7.41 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 1, пацијент 7



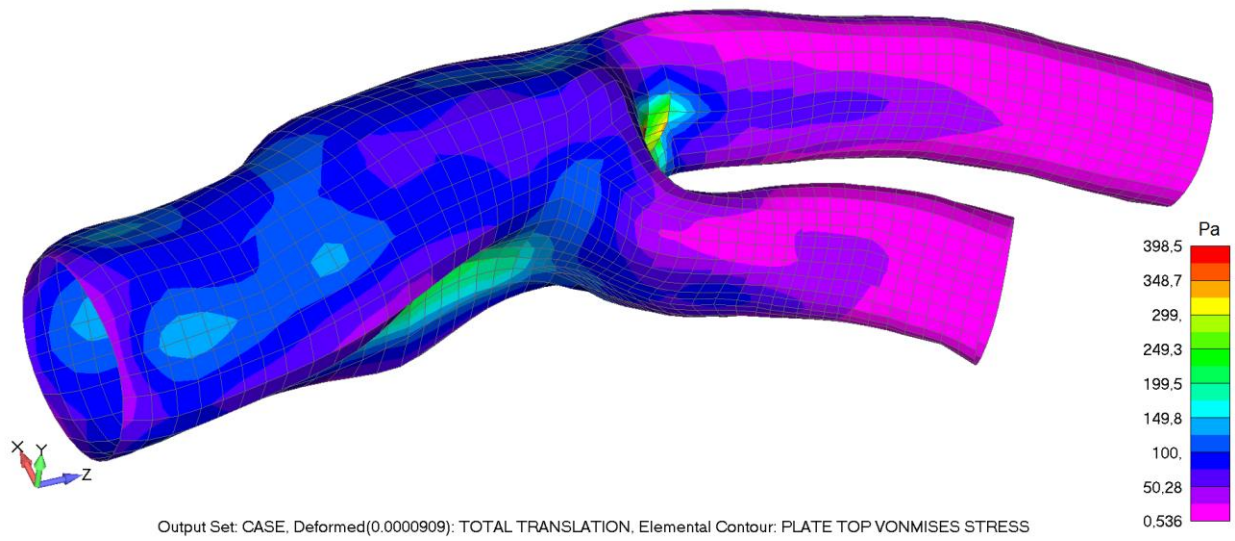
Слика 7.42 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 2, пацијент 7



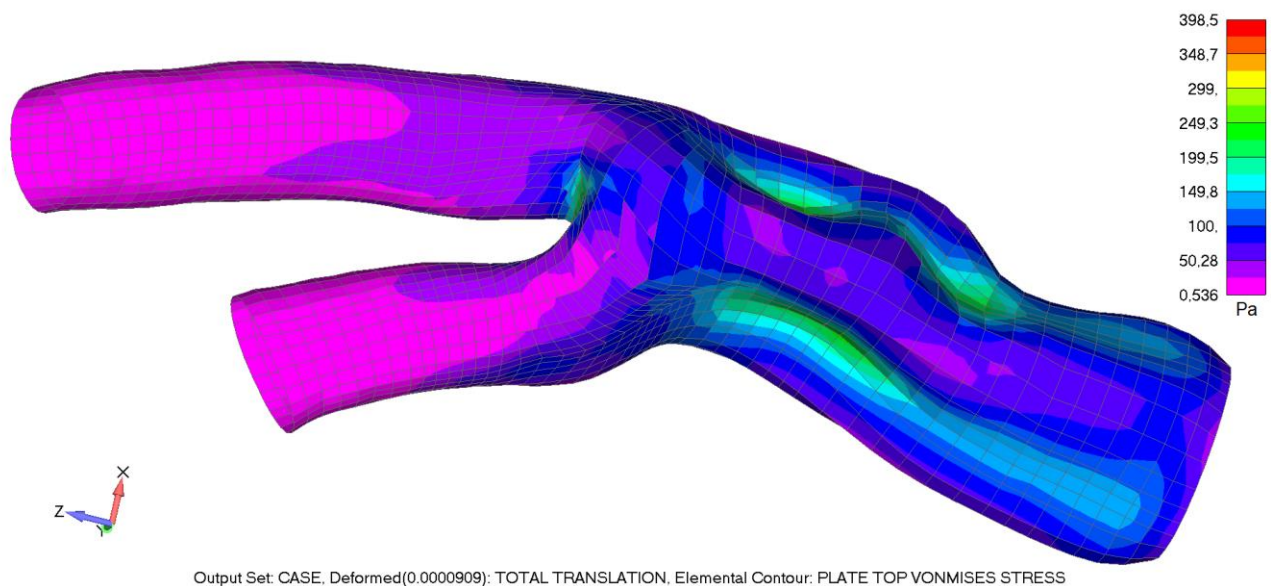
Слика 7.43 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 6, поглед 1, пацијент 7



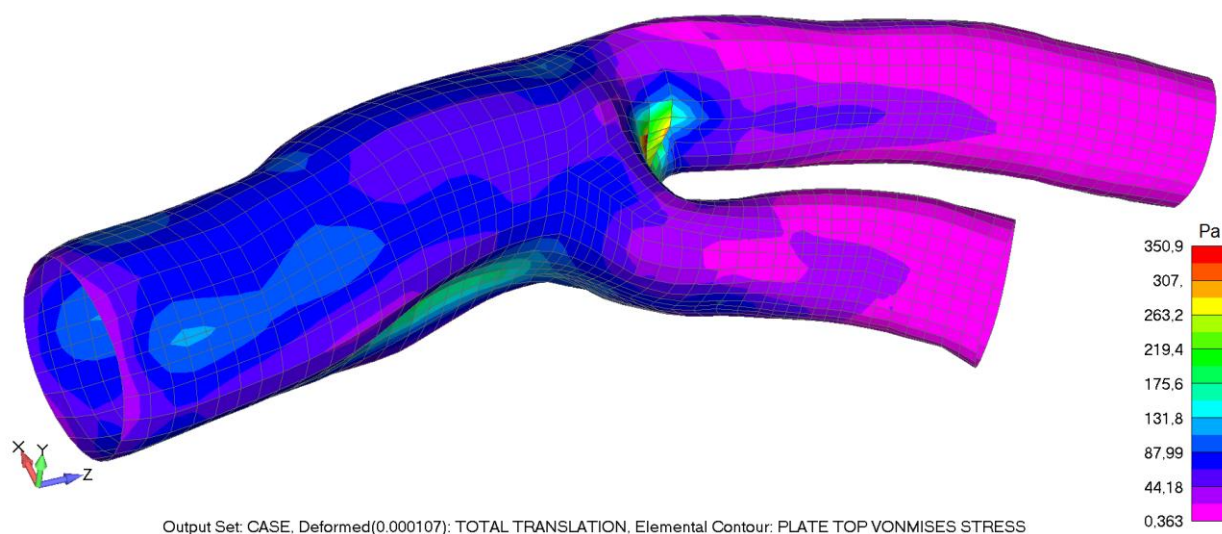
Слика 7.44 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 6, поглед 2, пацијент 7



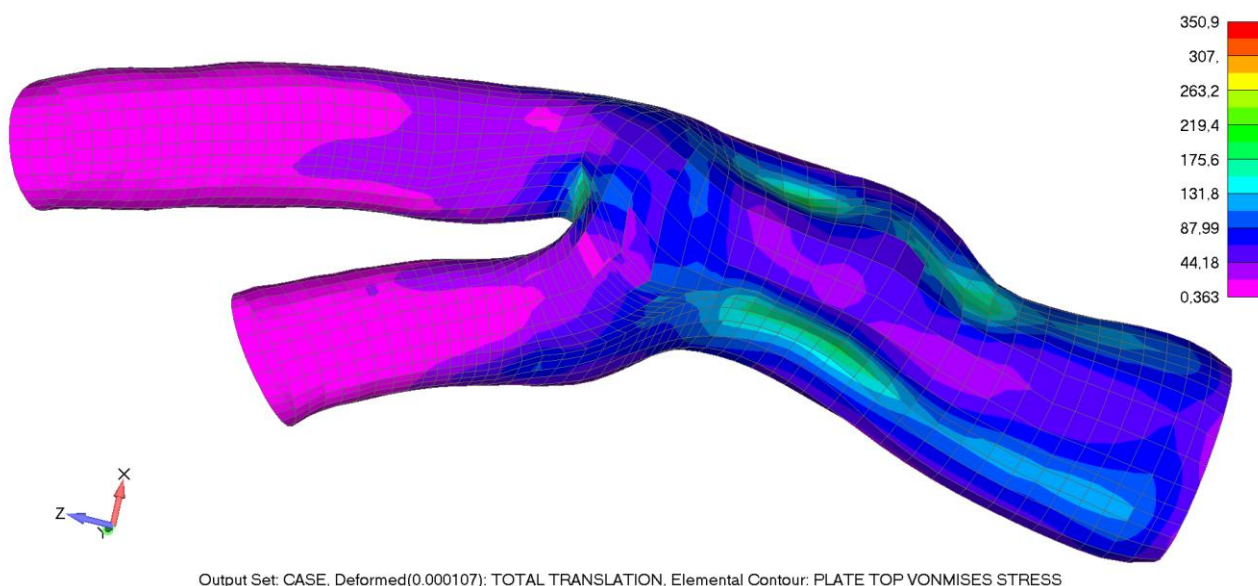
Слика 7.45 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 10, поглед 1, пацијент 7



Слика 7.46 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 10, поглед 2, пацијент 7



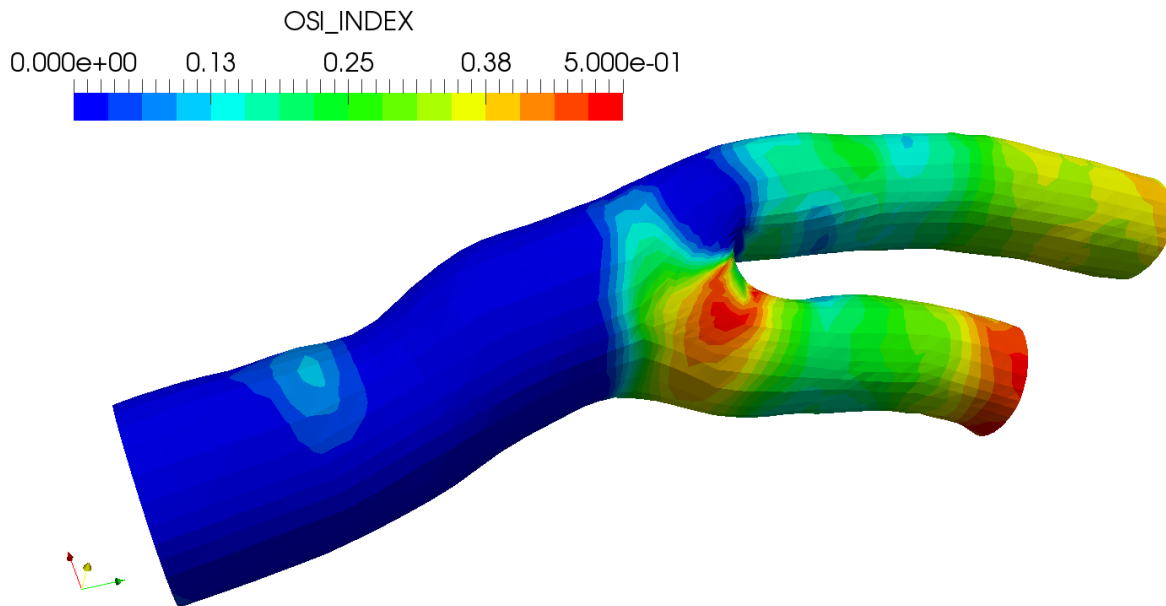
Слика 7.47 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 24, поглед 1, пацијент 7



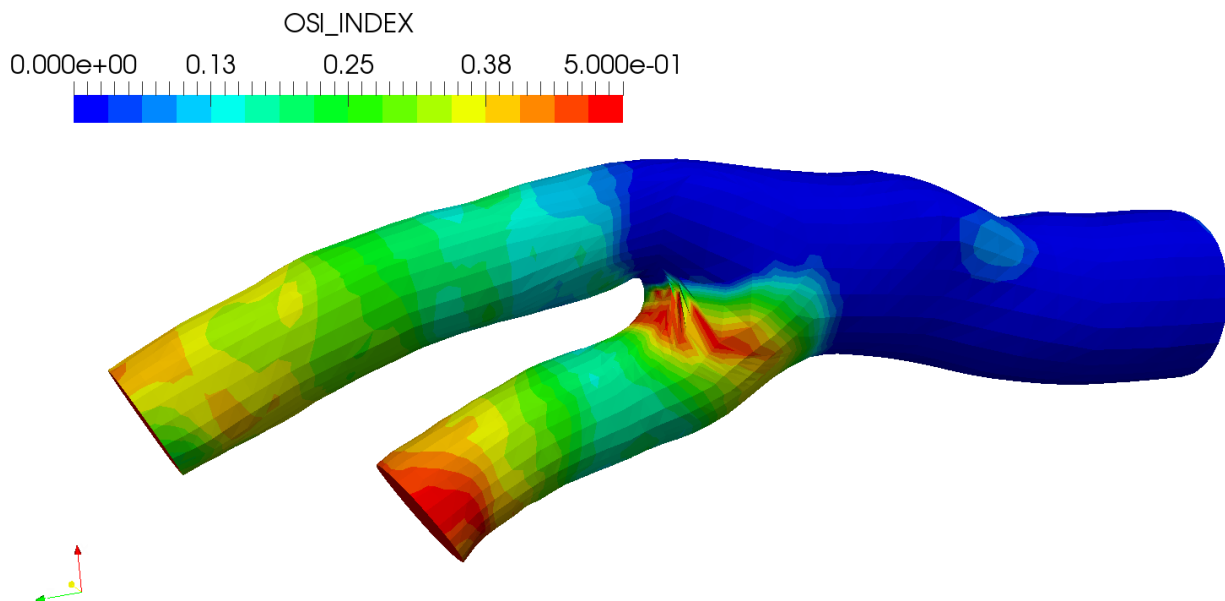
Слика 7.48 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 24, поглед 2, пацијент 7

Приказани резултати показују да деформација која се јавља при интеракцији између крви и артеријског зида значајно утиче на вредности хемодинамичких сила које делују на артеријски зид, у односу на случај када се посматра крут зид. Поређењем са резултатима ранијих истраживања [63], уочено је да симулације које су вршене са занемаривањем еластичности артеријског зида прецењују максималне вредности напона смицања на зиду, као и поља његове расподеле по артеријском зиду.

Расподела ОСИ индекса за модел пацијента бр. 7 дата је на сликама 7.49 и 7.50.



Слика 7.49 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 7

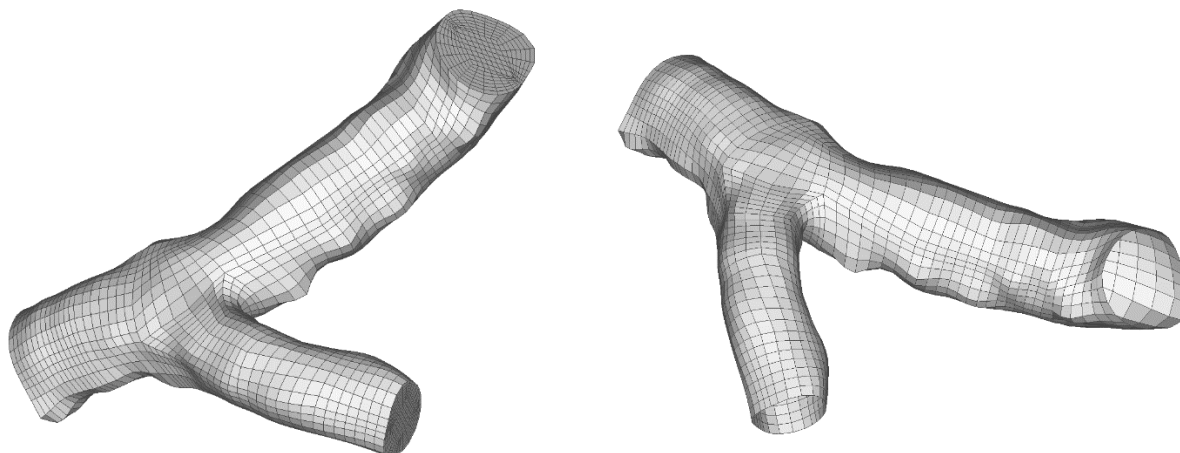


Слика 7.50 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 7

7.4 Нумеричка симулација интеракције флуида и солида на примеру коронарне бифуркације, пацијент 9

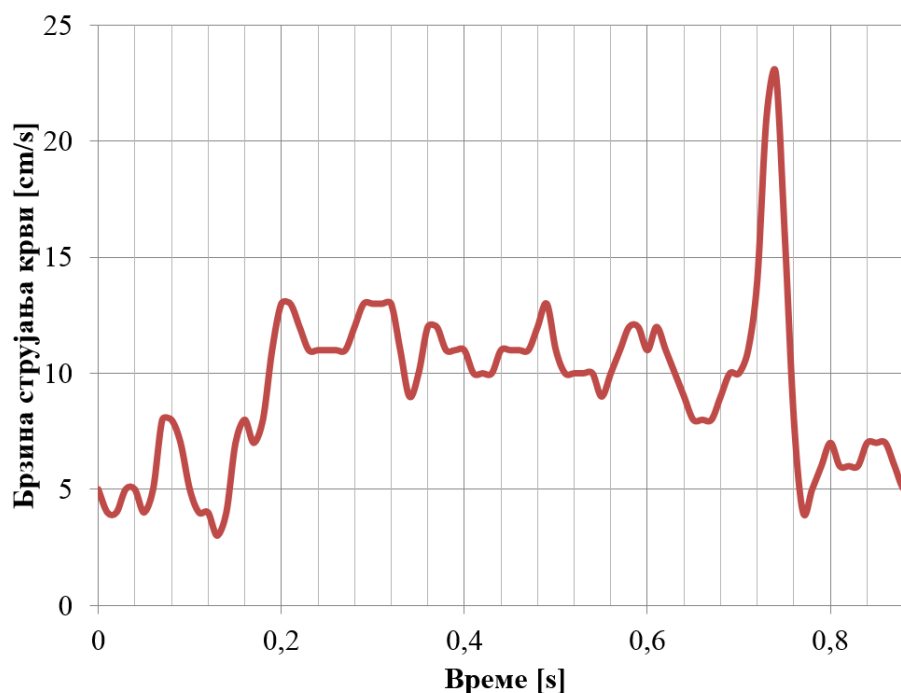
Симулација струјања крви кроз еластичан модел коронарне бифуркације изведена је на примеру реалне геометрије изабраног пацијента 9. За прорачун је коришћен софтвер *PAK-FS* [46]. Прорачун је извршен у 21 временских корака у интервалу од укупно 0.9s.

МКЕ модел флуидног домена је моделиран са 20237 3Д елемената, док МКЕ модел солидног домена садржи 2303 елемената љуске (Слика 7.51).



Слика 7.51 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 9

Просечна максимална брзина струјања крви у коронарној артерији је $v_{sr} = 23 \text{ cm/s}$. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.52).

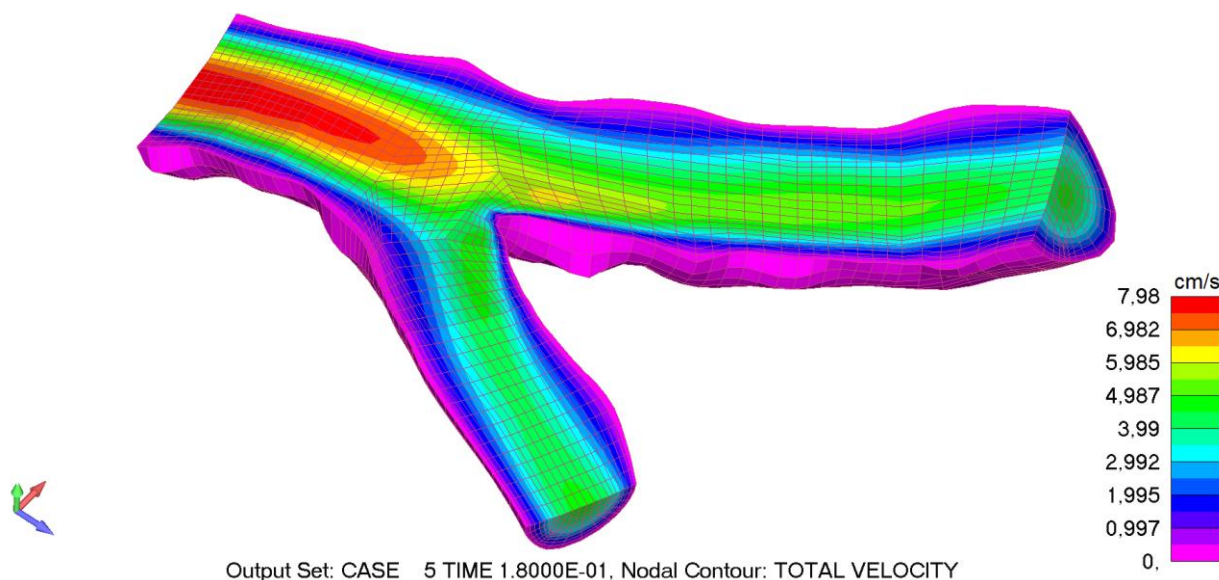


Слика 7.52 Временска функција коришћена за прорачун коронарне бифуркације

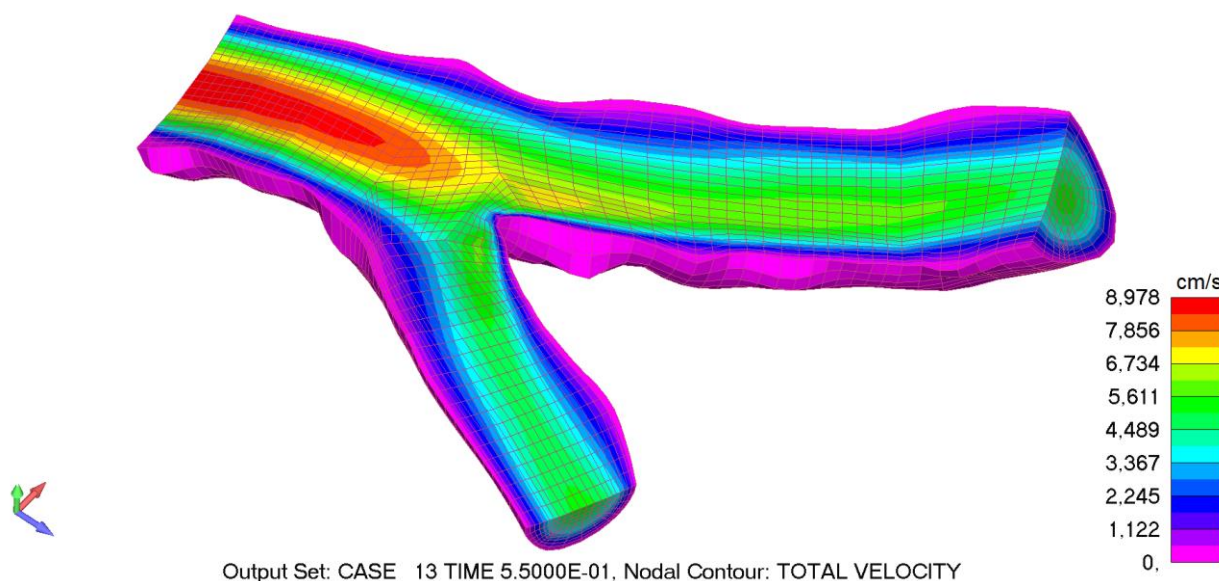
Гранични услови за симулацију су исти као и у поглављу 7.2, док су материјалне карактеристике за домен флуида и домен солида узете као у табели 7.2.

Поље брзина струјања крви (слике од 7.53 до 7.55), поље пада притиска (слике од 7.56 до 7.58), расподела смицајног напона на зиду артерије (слике од 7.59 до 7.64), ОСИ индекс

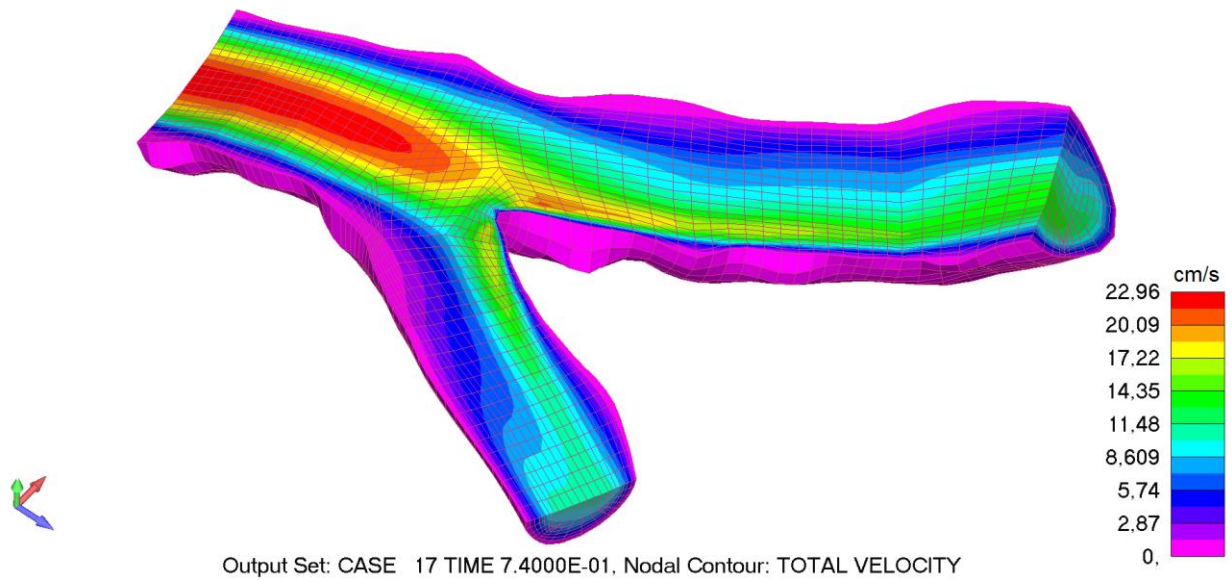
(слике 7.71 и 7.72) и расподела еквивалентног вон Мизесовог напона (слике од 7.65 до 7.70) приказани су у више корака од којих су најзначајнији кораци када имамо фазу дијастоле где су узете вредности из 5. и 13. корака и максимум систоле (17. корак). Домен флуида је представљен у пресеку код приказивања резултата за брзину флуида.



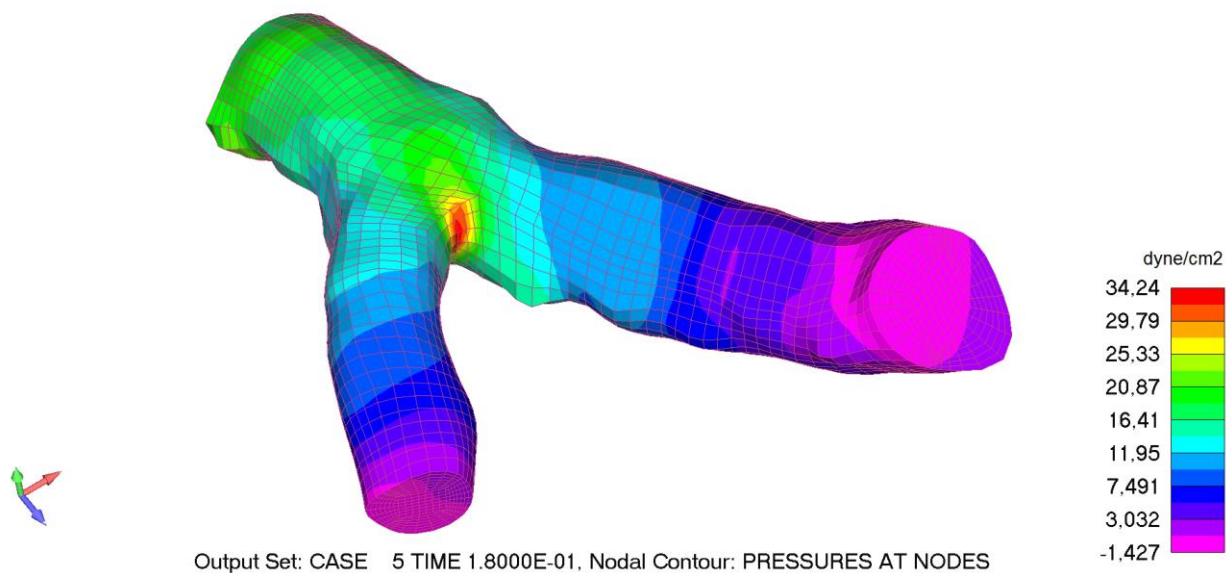
Слика 7.53 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 5, пацијент 9



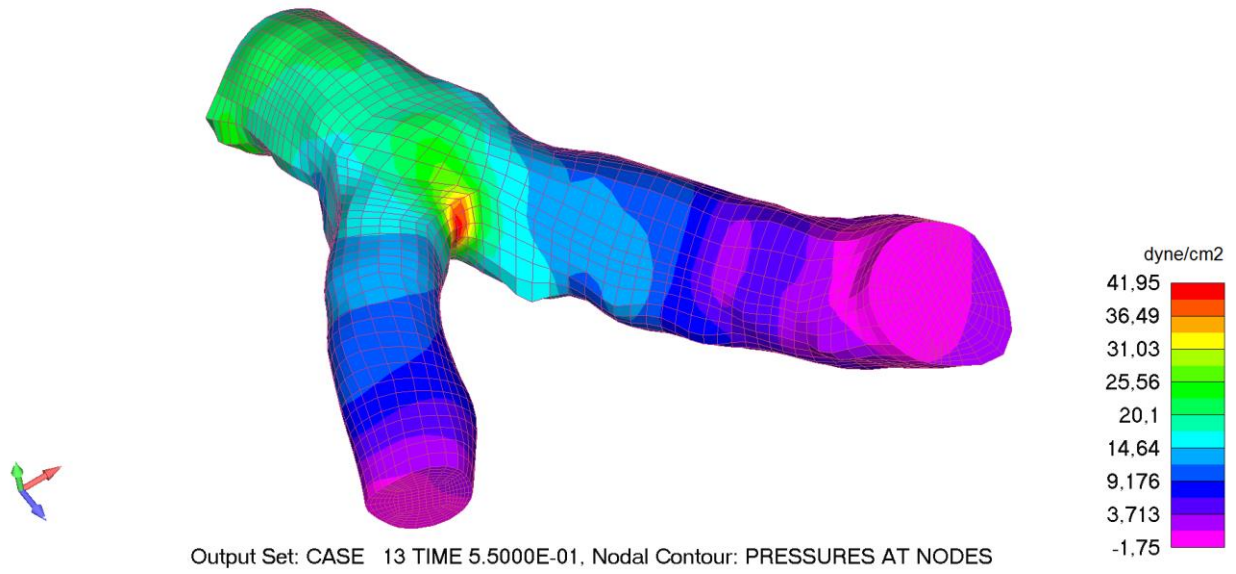
Слика 7.54 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 13, пацијент 9



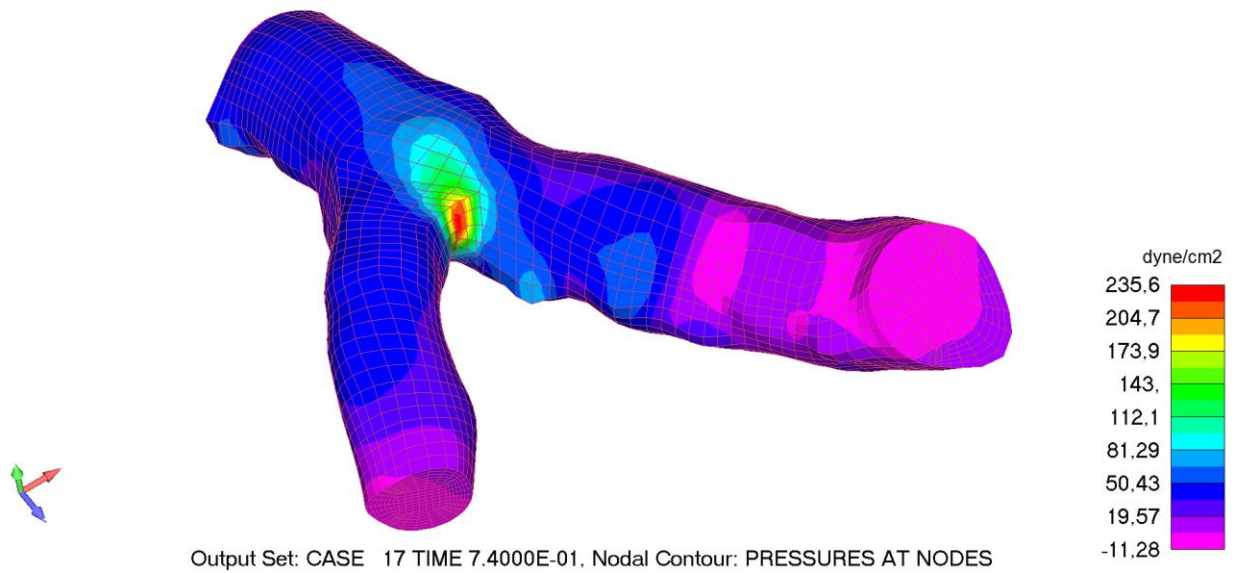
Слика 7.55 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 17, пацијент 9



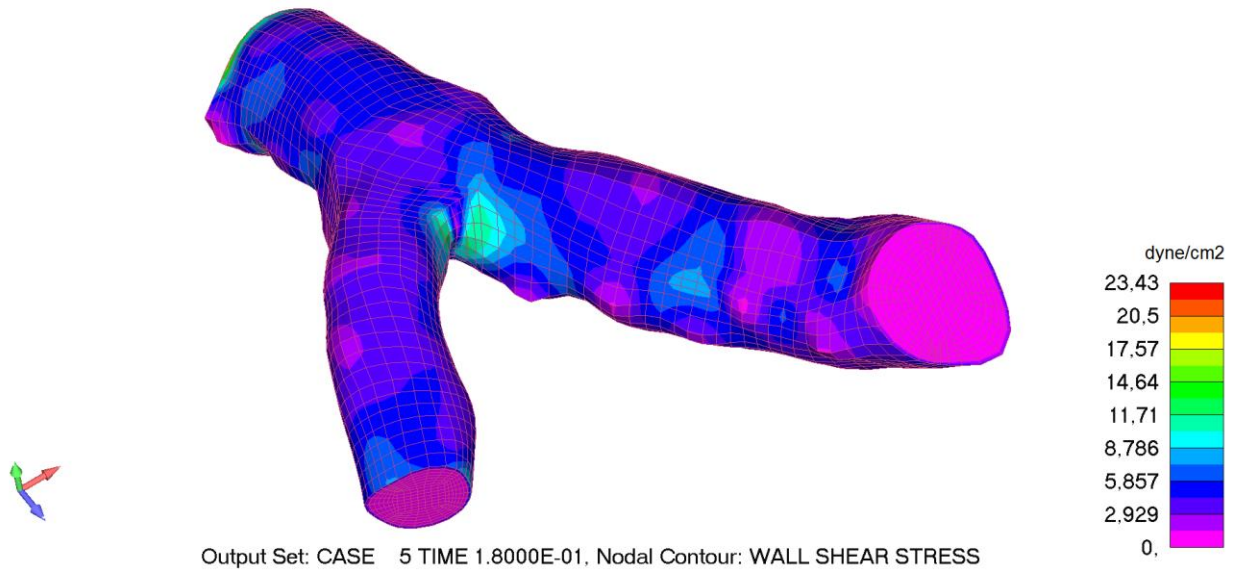
Слика 7.56 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 5, пацијент 9



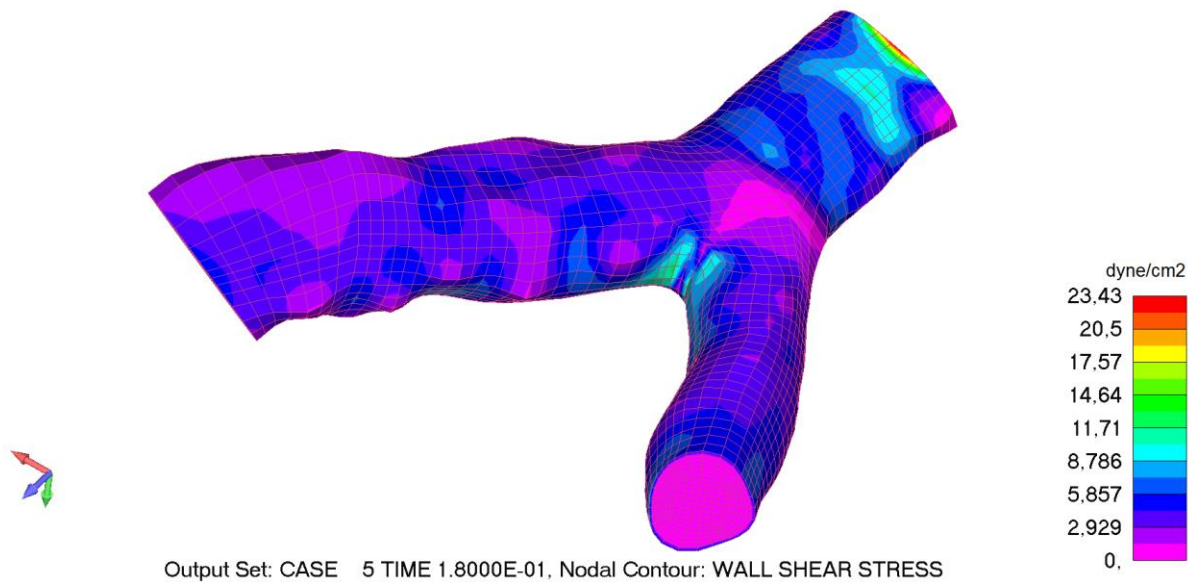
Слика 7.57 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 13, пацијент 9



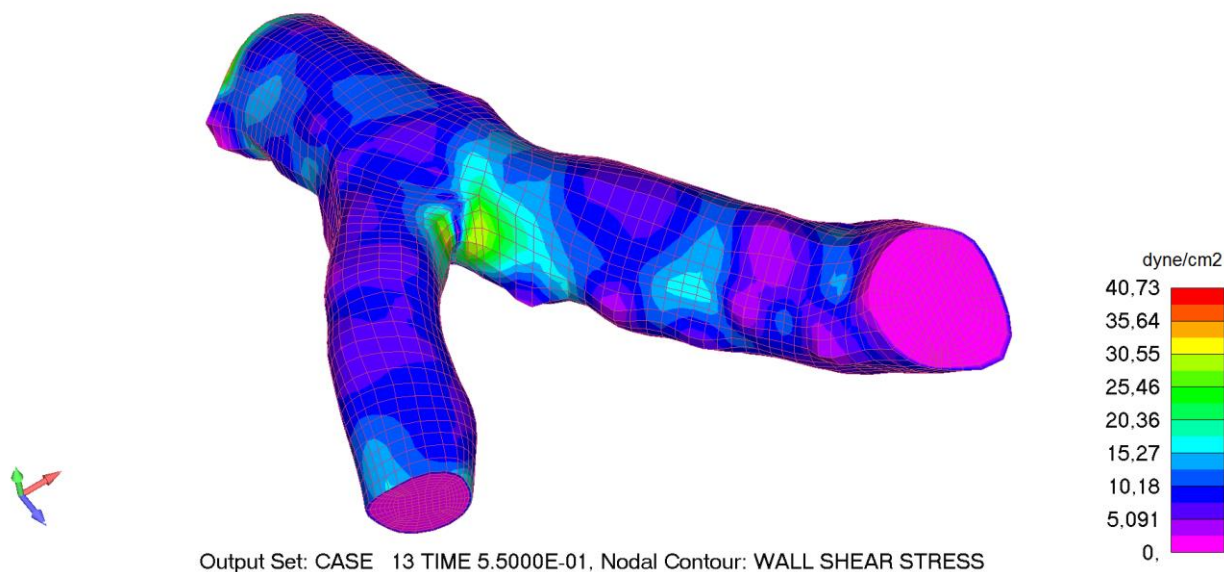
Слика 7.58 Пад притиска крви у коронарној бифуркацији за корак 17, пацијент 9



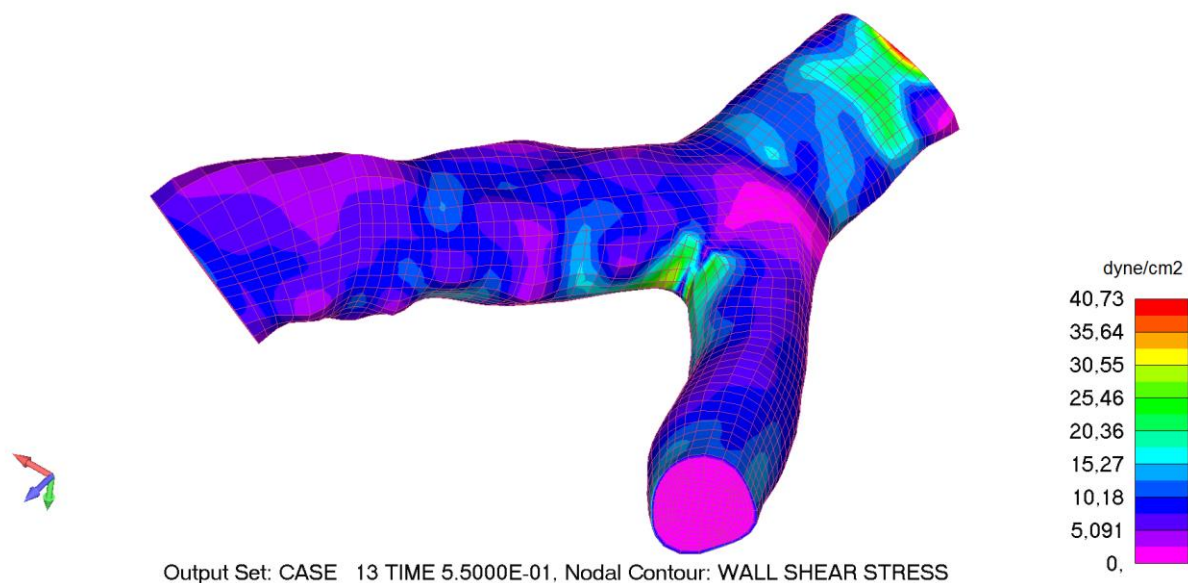
Слика 7.59 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 1, пацијент 9



Слика 7.60 Расподела смицајног напона за корак 5, поглед 2, пацијент 9

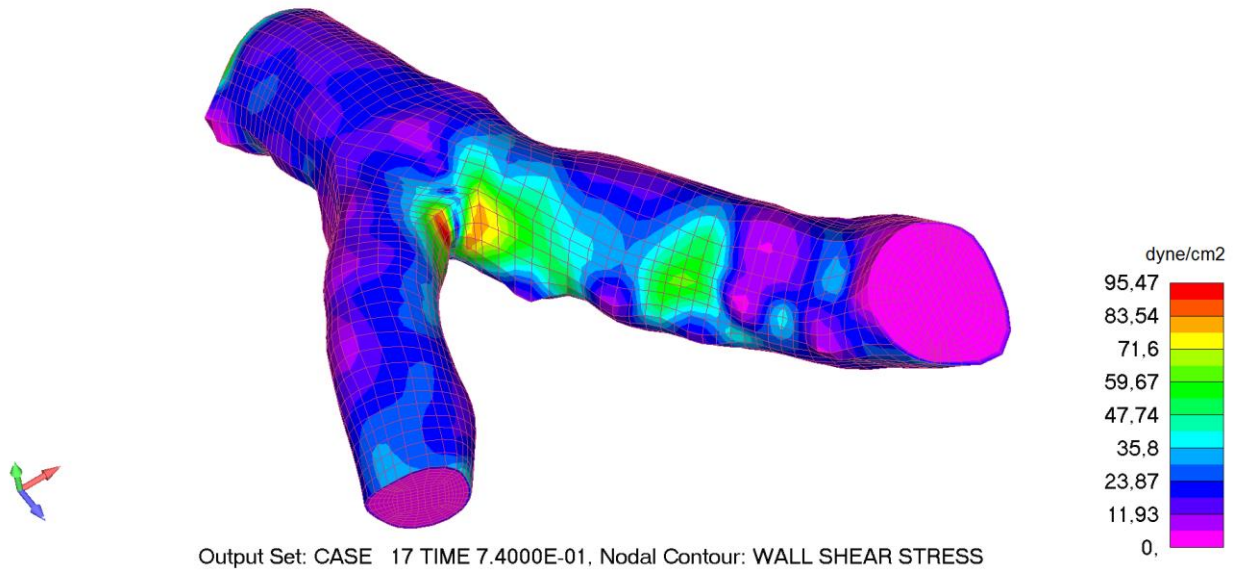


Слика 7.61 Расподела смицајног напона за корак 13, поглед 1, пацијент 9

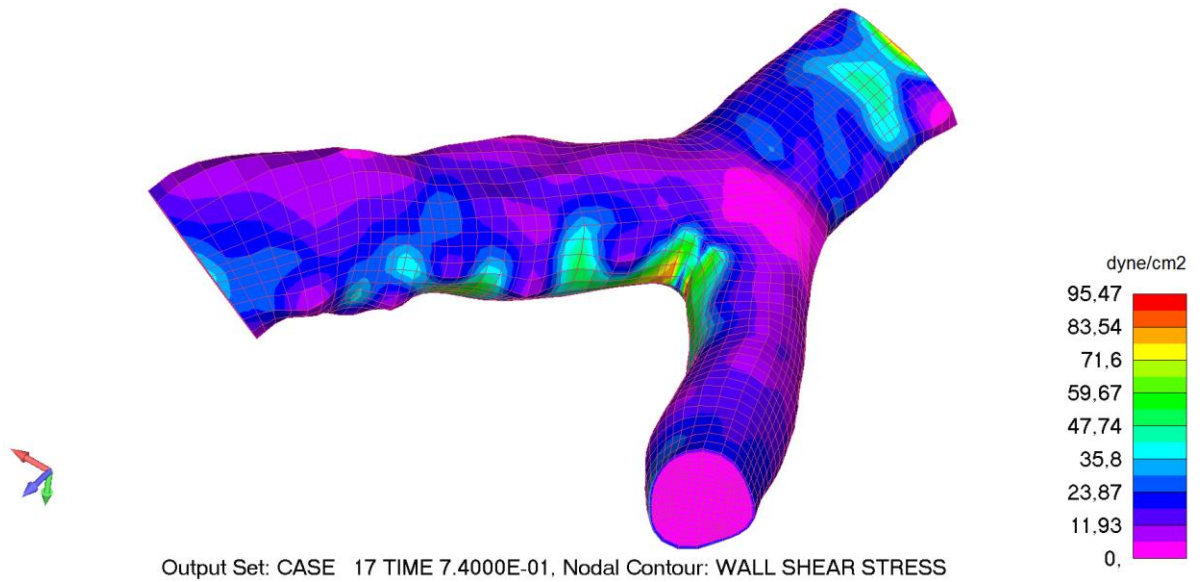


Слика 7.62 Расподела смицајног напона за корак 13, поглед 2, пацијент 9

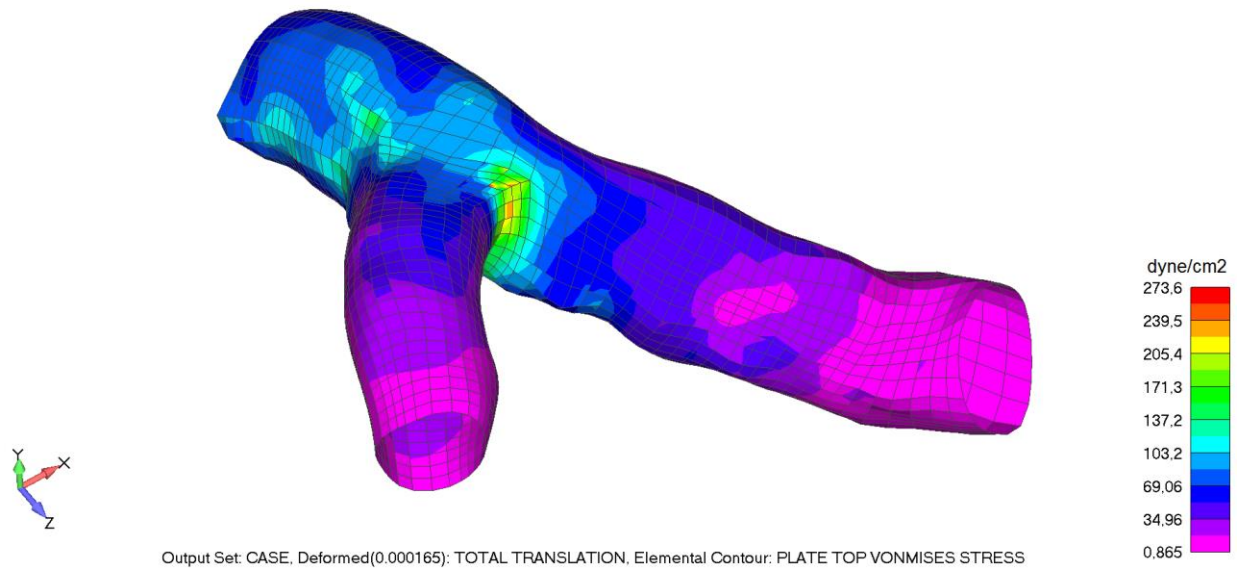
Смицајни напон је један од најбитнијих фактора који утиче на структуру и функцију ендотела коронарне артерије. Смицајни напон је одговоран за дистрибуцију, формирање и прогресију атеросклеротичног плака. Може се приметити са претходних резултат за смицајне напоне на зиду (слике од 7.59 до 7.64) да је на спољашњим зидовима артерије дистално од бифуркације мала вредност смицајног напона, између 5 dyne/cm^2 и 10 dyne/cm^2 . Ови делови артерије су веома подложни развоју плака. Супротно томе, зидови артерије који се налазе на бифуркацији скоро да немају могућности за развој плака јер је вредност смицајног напона висока, између 80 dyne/cm^2 и 95 dyne/cm^2 .



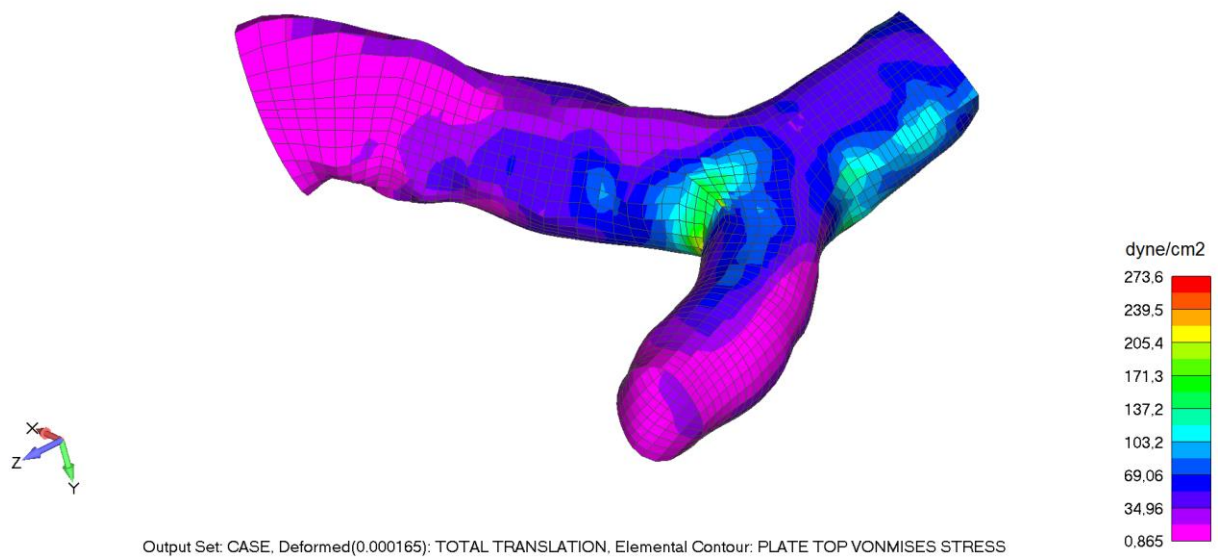
Слика 7.63 Расподела смицајног напона за корак 17, поглед 1, пацијент 9



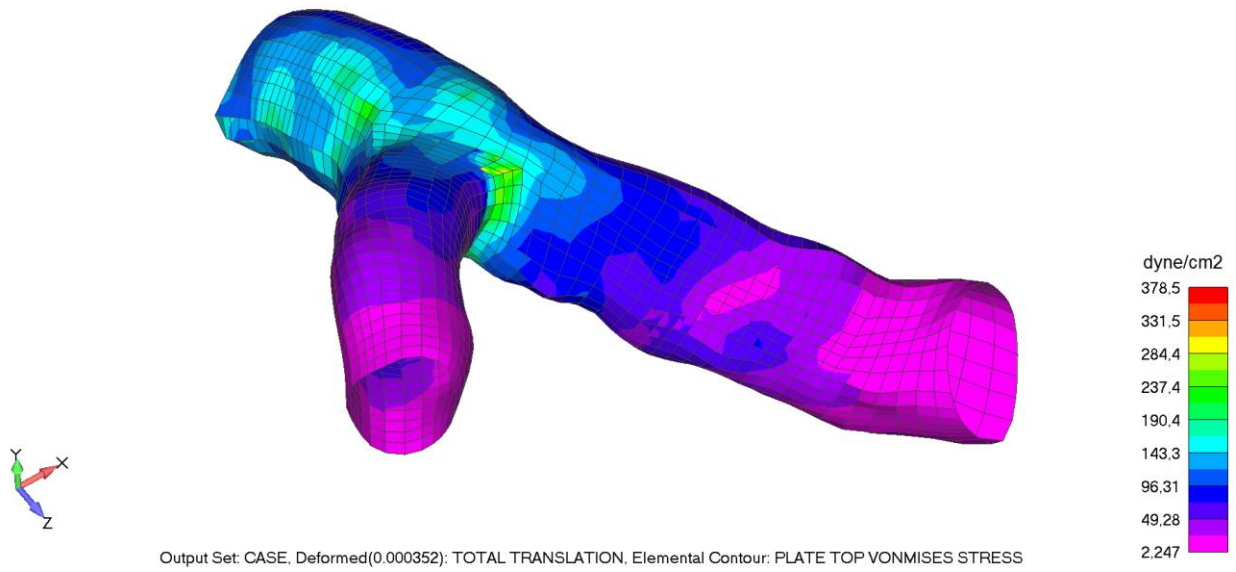
Слика 7.64 Расподела смицајног напона за корак 17, поглед 2, пацијент 9



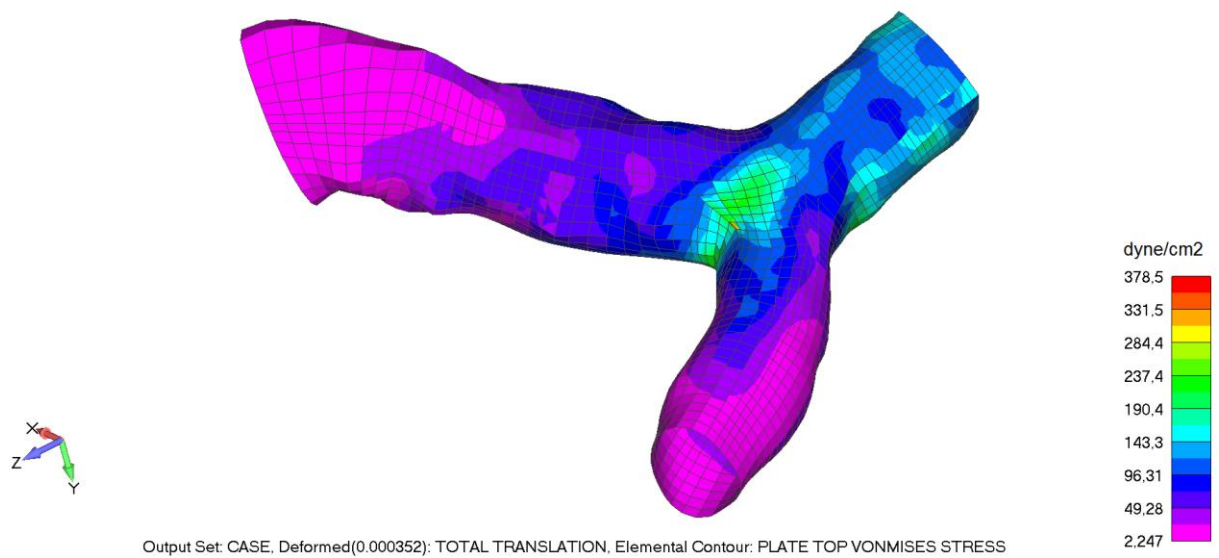
Слика 7.65 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 1, пацијент
9



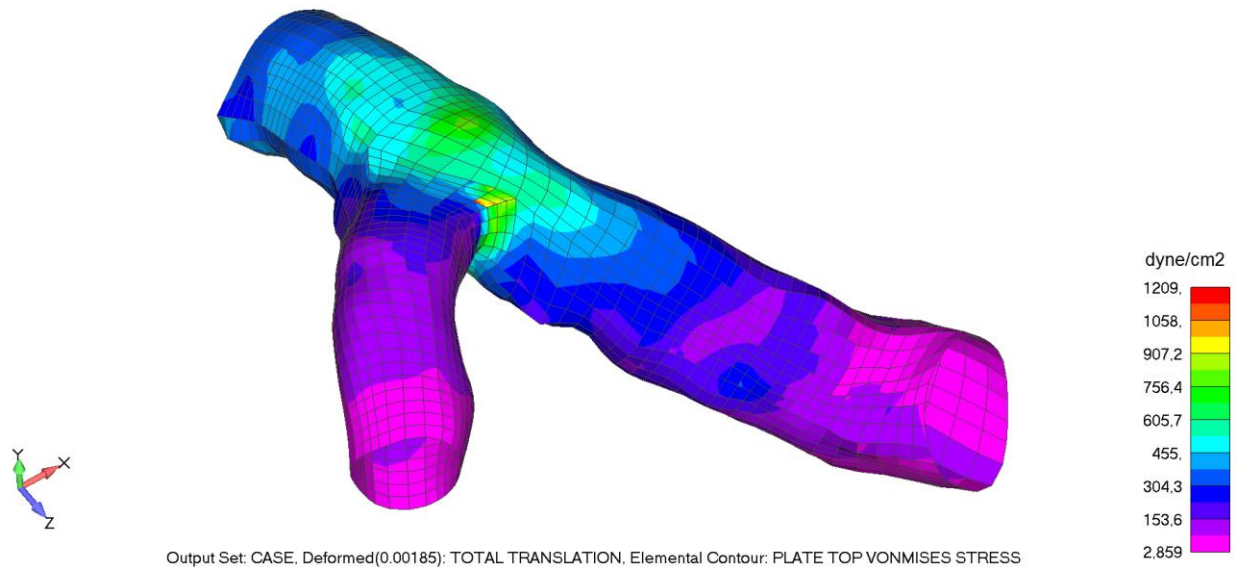
Слика 7.66 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 5, поглед 2, пацијент
9



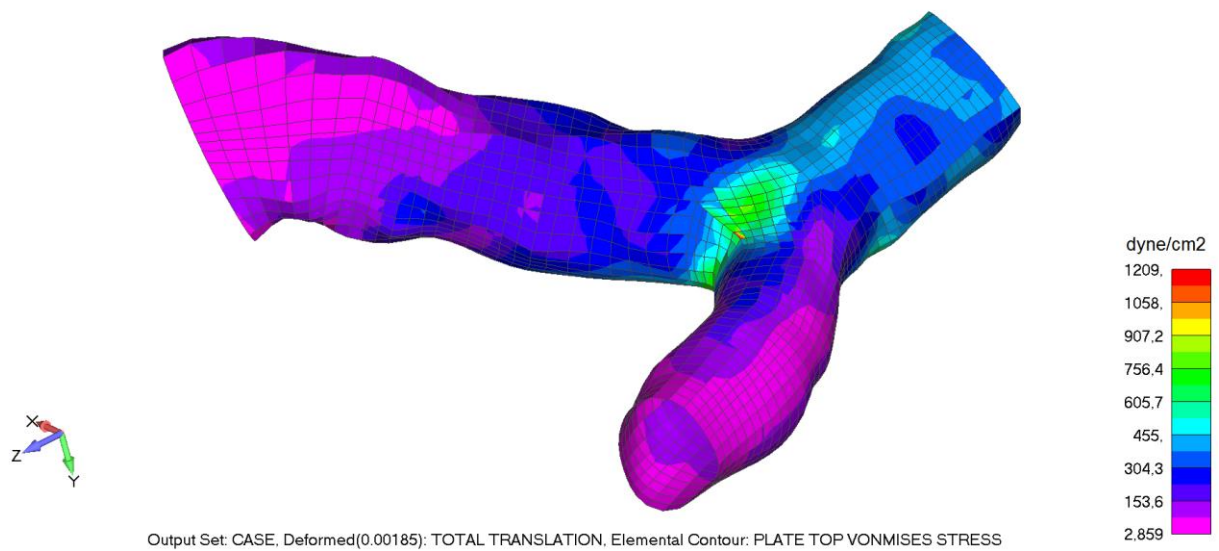
Слика 7.67 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 13, поглед 1, пацијент 9



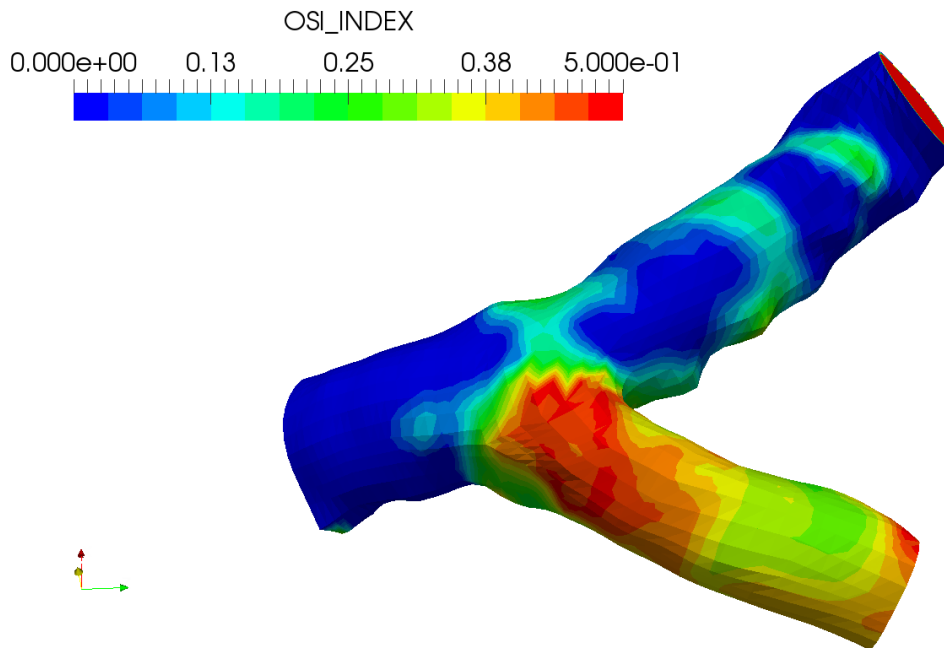
Слика 7.68 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 13, поглед 2, пацијент 9



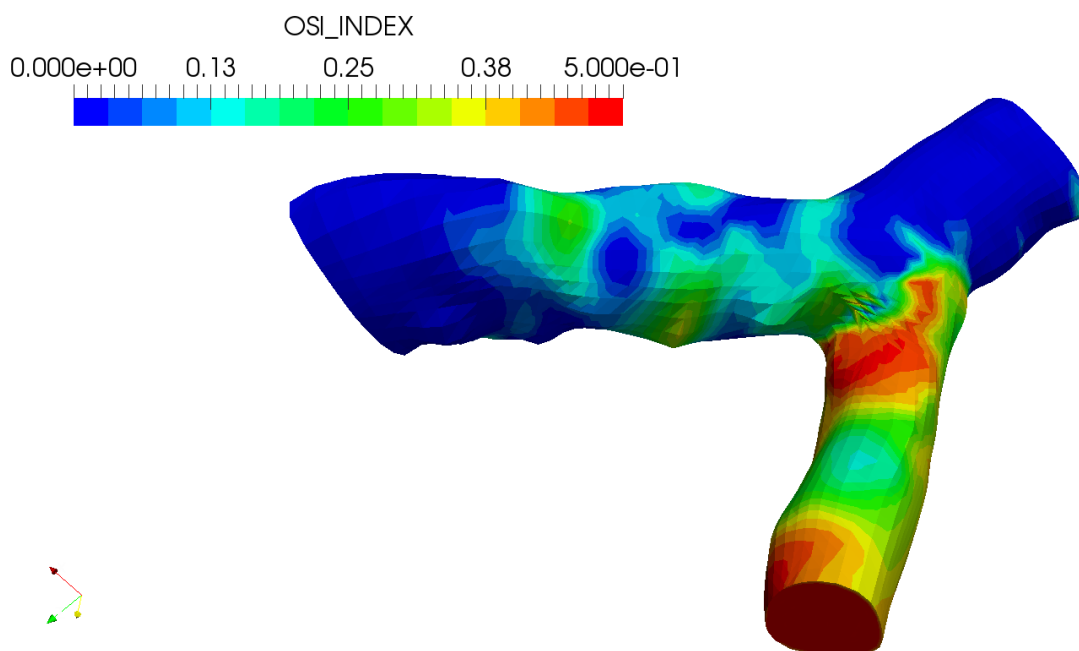
Слика 7.69 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 17, поглед 1, пацијент 9



Слика 7.70 Расподела еквивалентног вон Мизесовог напона за корак 17, поглед 2, пацијент 9



Слика 7.71 ОСИ индекс, поглед 1, пацијент 9

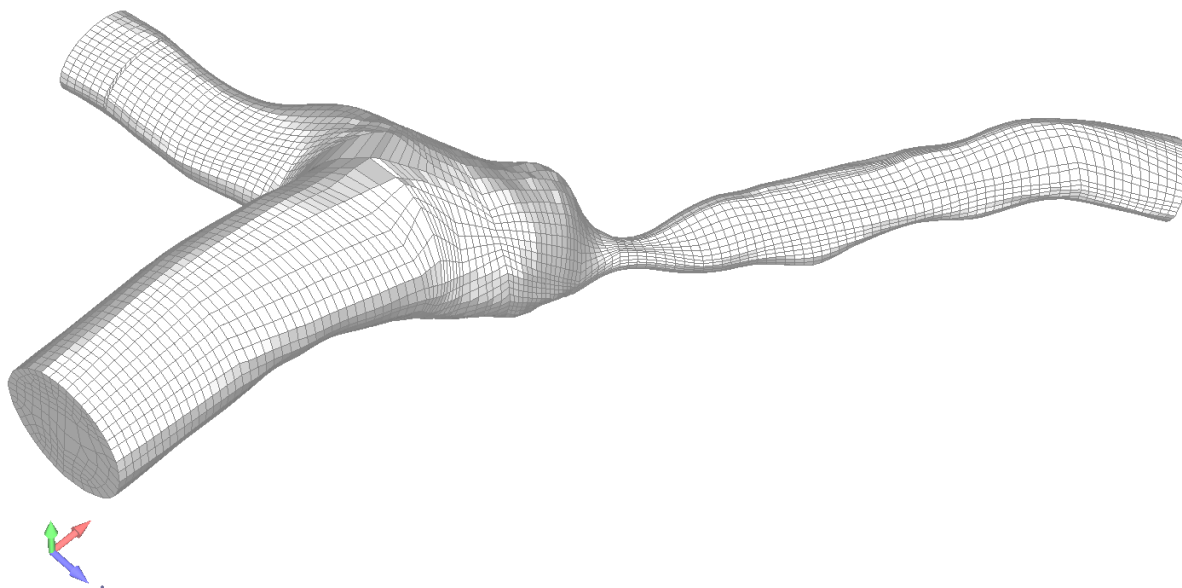


Слика 7.72 ОСИ индекс, поглед 2, пацијент 9

ОСИ индекс даје још ширу слику о хемодинамским параметрима унутар артерије. На местима где ОСИ индекс тежи вредности 0.5 примећују се велике промене смера смицајног напона. Са друге стране места на којима ОСИ индекс тежи нули или је једнак нули су места подложна за развој плака.

7.5 Нумеричка симулација ламинарног струјања на примеру коронарне бифуркације са великом стенозом, пацијент 10

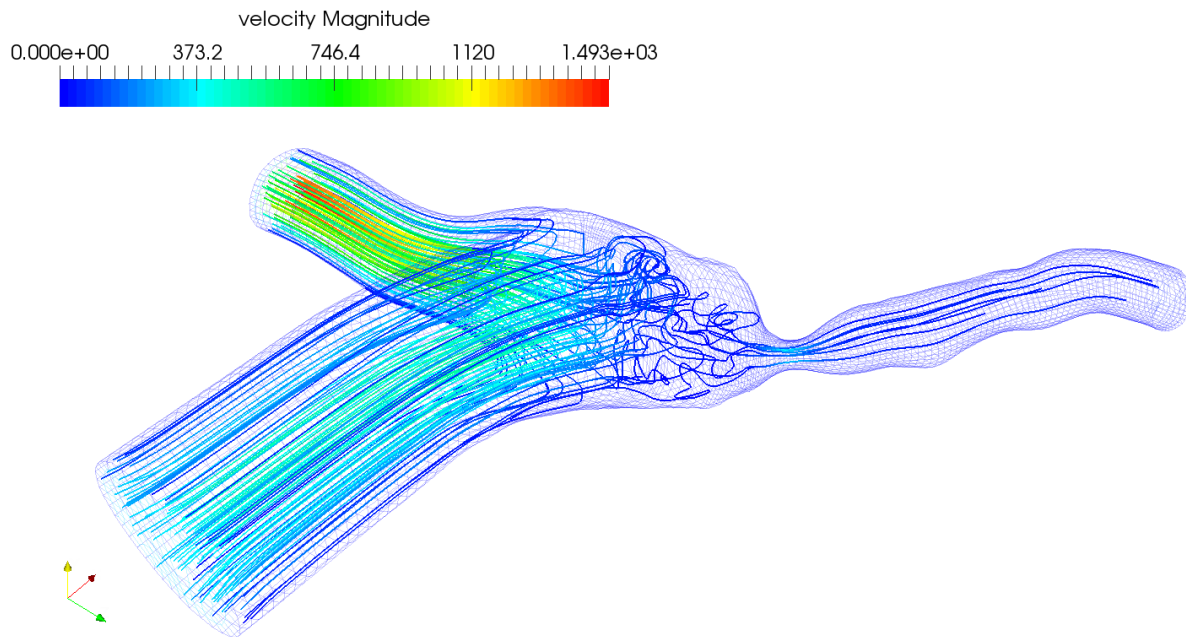
Симулација струјања крви кроз модел коронарне бифуркације са великом стенозом од преко 70% лумена изведена је на примеру реалне геометрије изабраног пацијента 10. За прорачун је коришћен софтвер *РАК-F* [46]. Прорачун је извршен у 100 временских корака по 0.01s. Модел коначних елемената флуидног домена је моделиран са 22674 3Д елемената, (Слика 7.73).



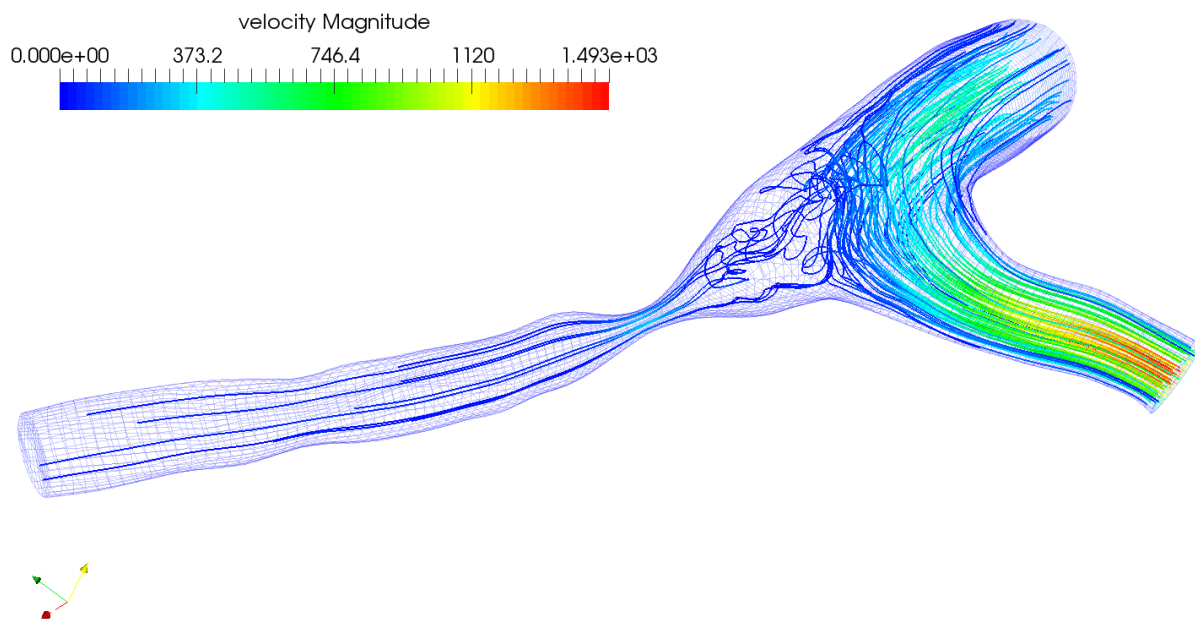
Слика 7.73 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 10

Просечна максимална улазна брзина струјања крви у коронарној артерији је $v_{sr} = 300 \text{ mm/s}$. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.6). Гранични услови за симулацију су исти као у поглављу 7.2, док су материјалне карактеристике за домен флуида као у табели 7.1. Прорачун је изведен као нестационаран у 100 корака по 0.01s.

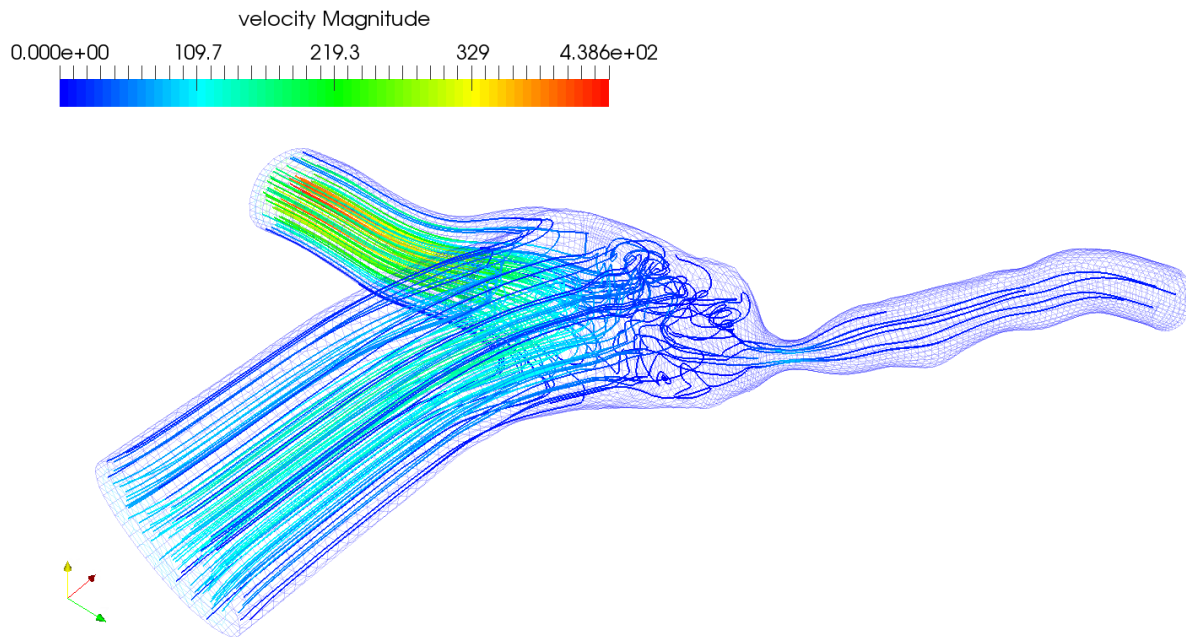
Поље брзина струјања крви (слике од 7.74 до 7.77), расподела смицајног напона на зиду артерије (слике од 7.78 до 7.81) и расподела притиска (слике 7.82 и 7.83) приказани су у више корака од којих су најзначајнији кораци када имамо максимум систоле (10. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 80. корака. Расподела брзине струјања флуида је приказана преко струјница ради лакшег уочавања проблема који настају при струјању.



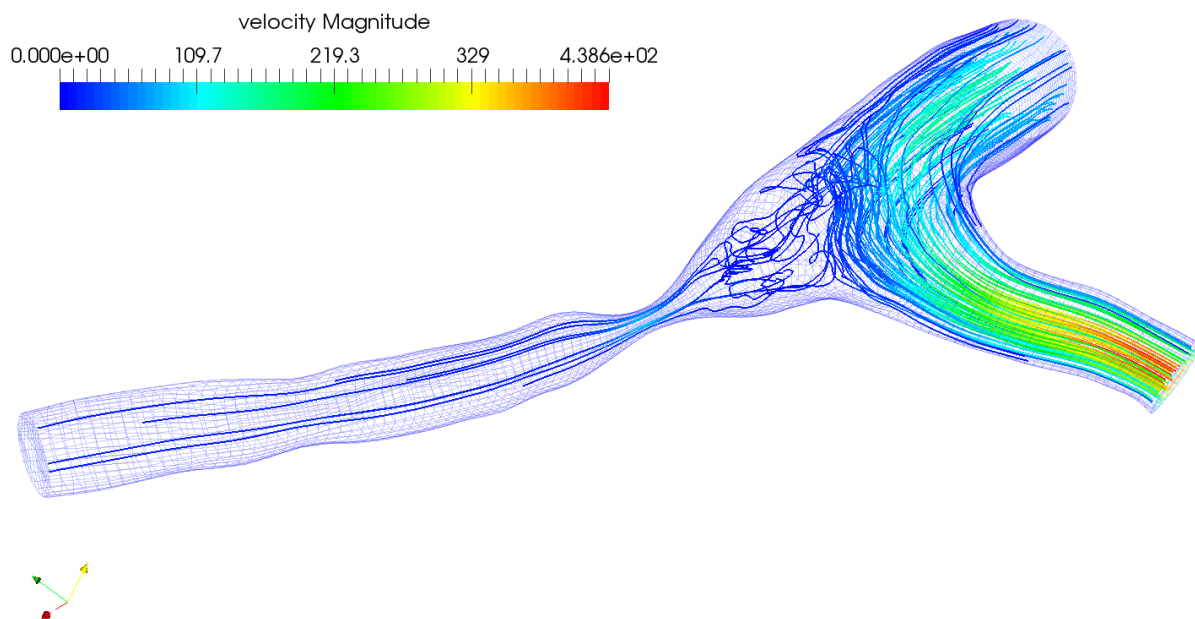
Слика 7.74 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 1



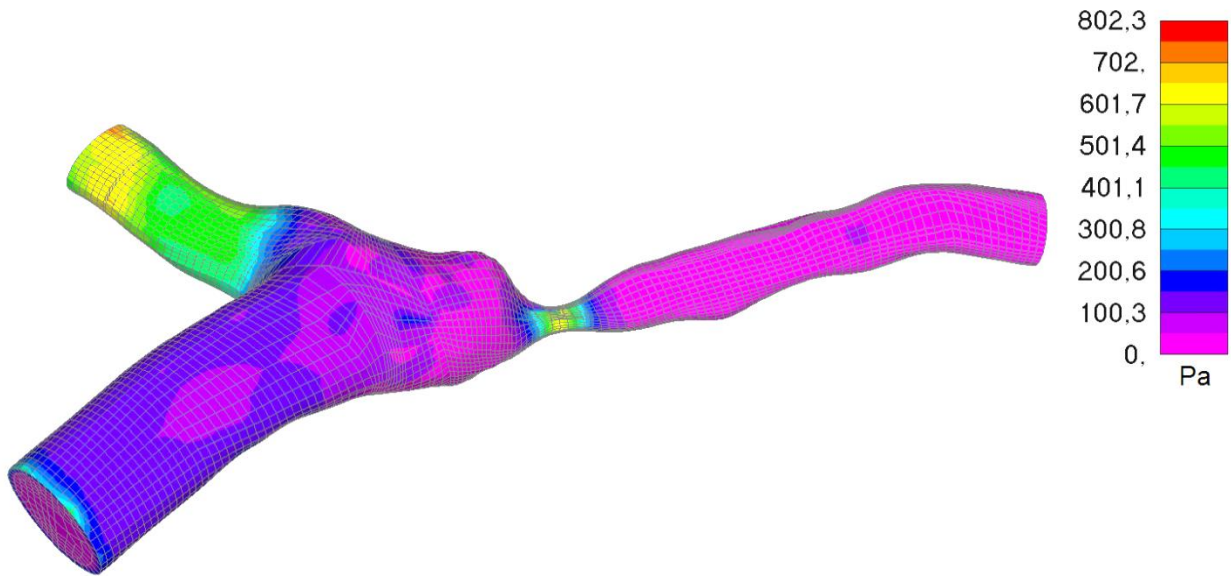
Слика 7.75 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 2



Слика 7.76 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 1

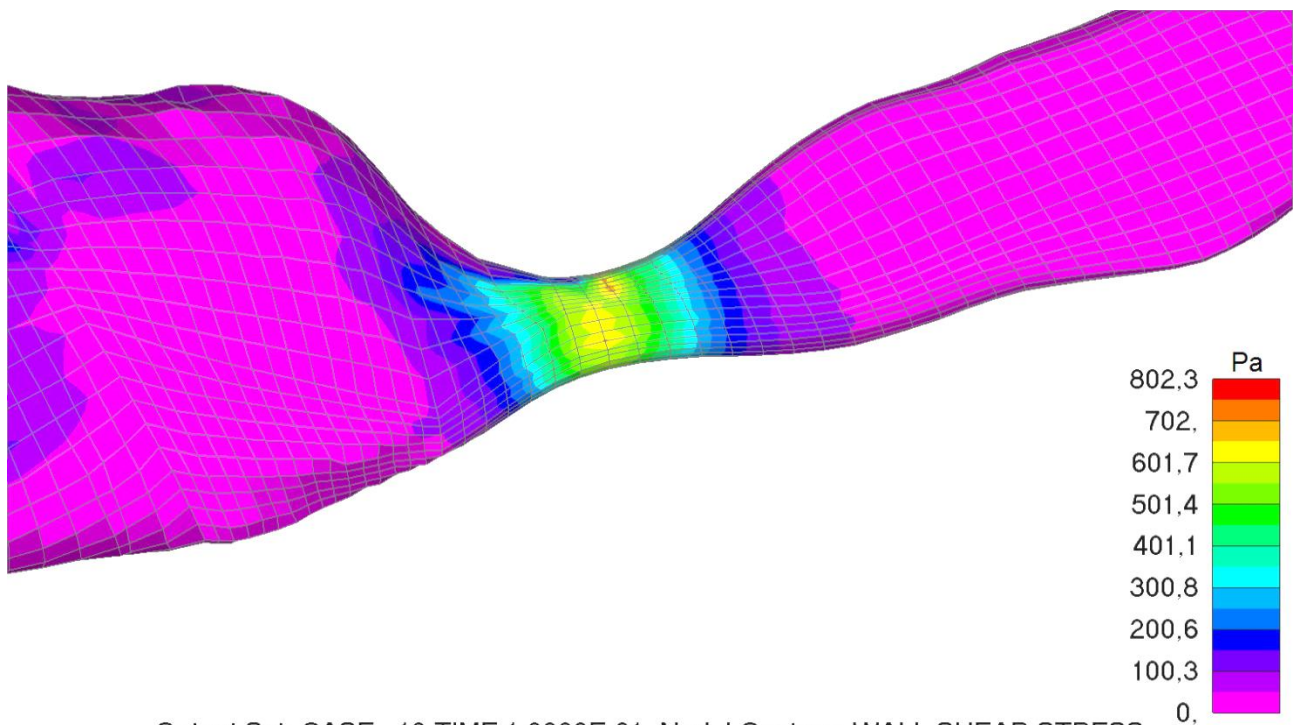


Слика 7.77 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 2



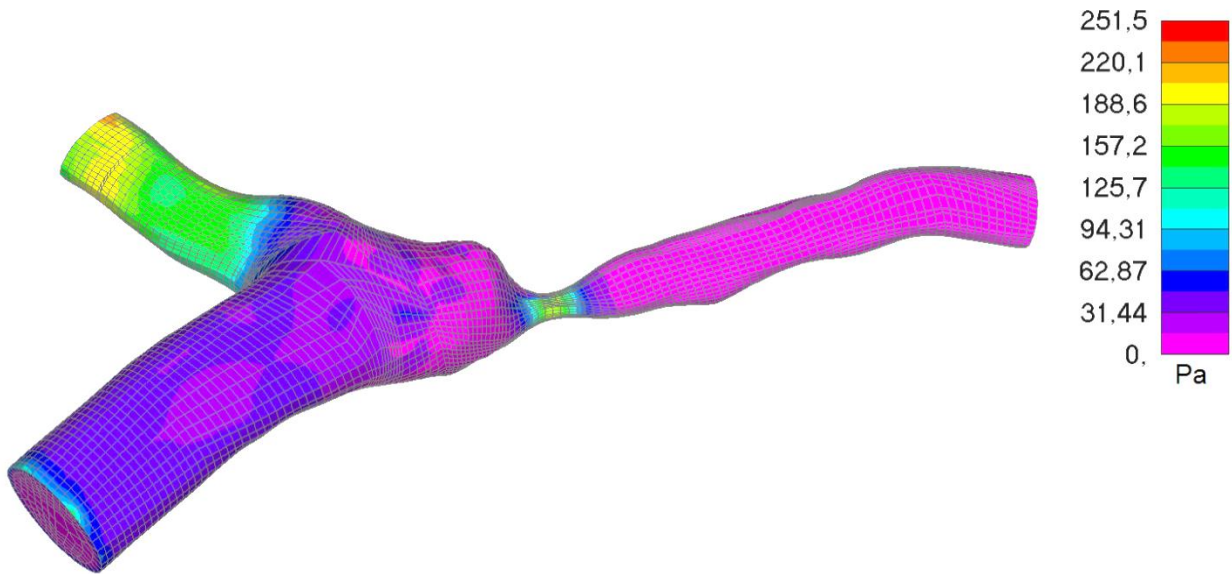
Output Set: CASE 10 TIME 1.0000E-01, Nodal Contour: WALL SHEAR STRESS

Слика 7.78 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 1



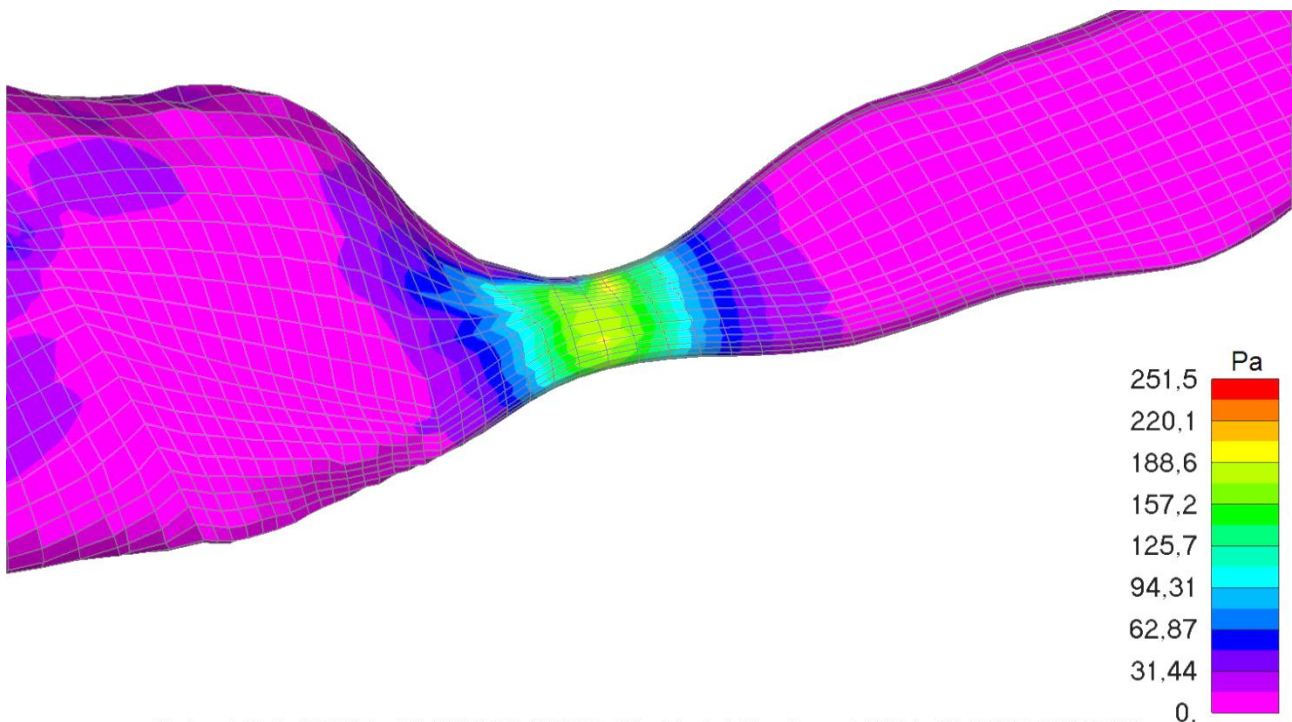
Output Set: CASE 10 TIME 1.0000E-01, Nodal Contour: WALL SHEAR STRESS

Слика 7.79 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10, поглед 2



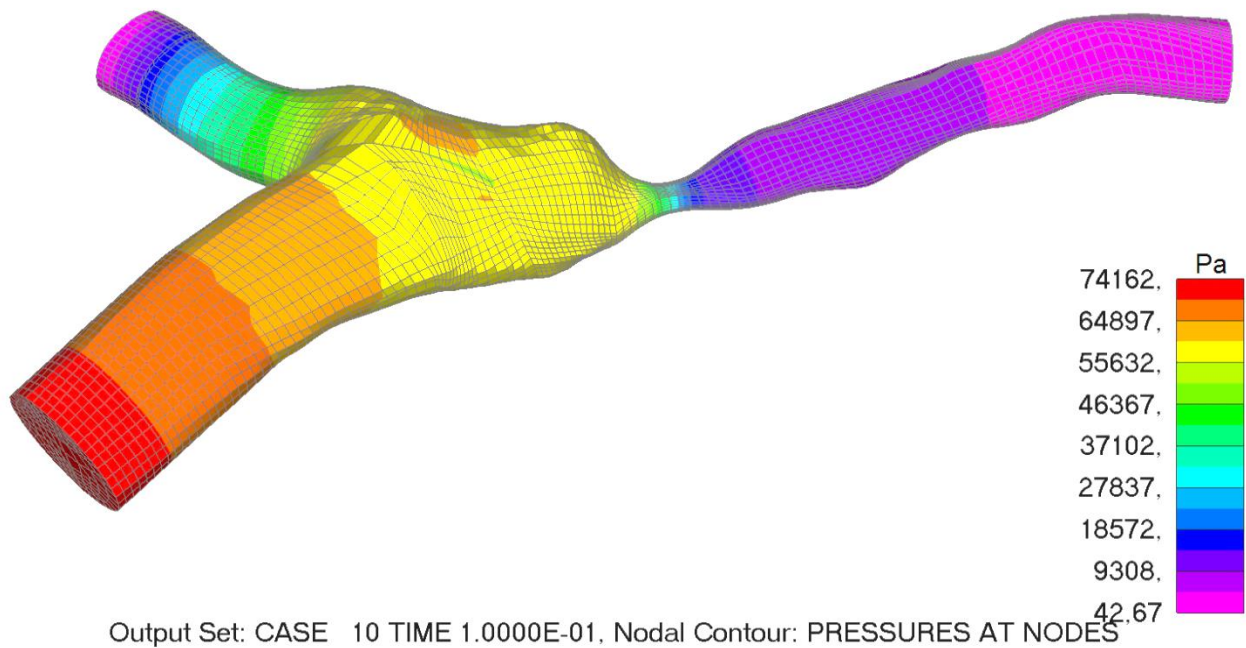
Output Set: CASE 80 TIME 8.0000E-01, Nodal Contour: WALL SHEAR STRESS

Слика 7.80 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10, поглед 1

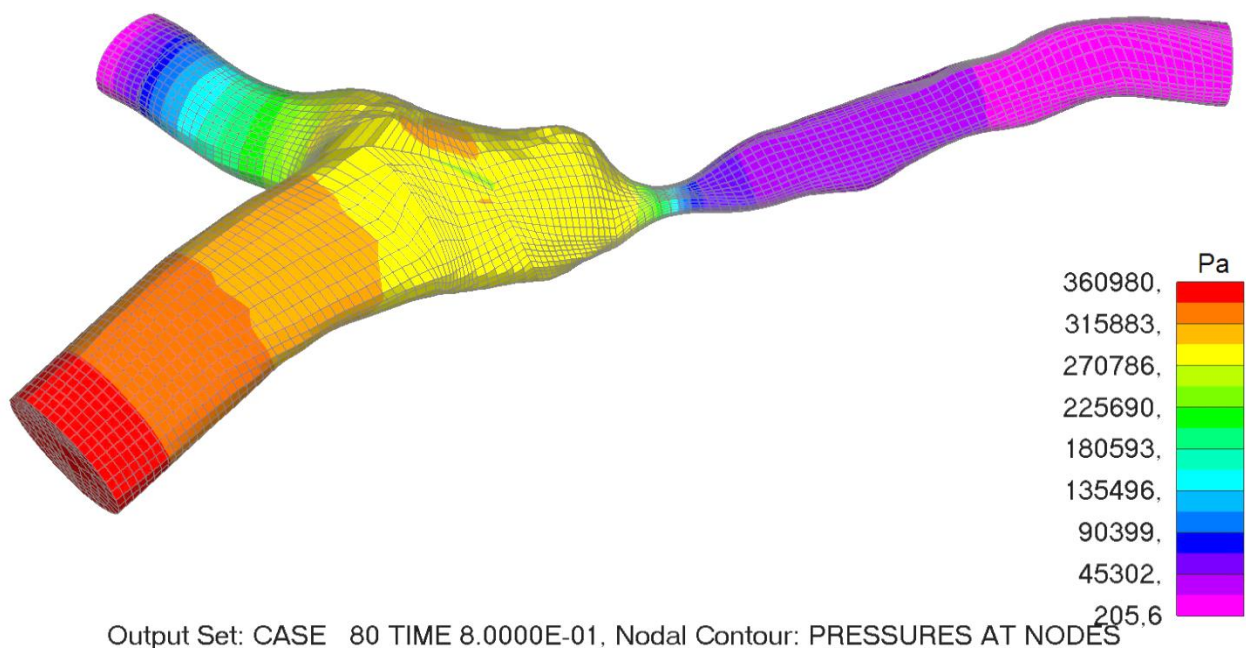


Output Set: CASE 80 TIME 8.0000E-01, Nodal Contour: WALL SHEAR STRESS

Слика 7.81 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 70, пацијент 10, поглед 2



Слика 7.82 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 10, пацијент 10



Слика 7.83 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 80, пацијент 10

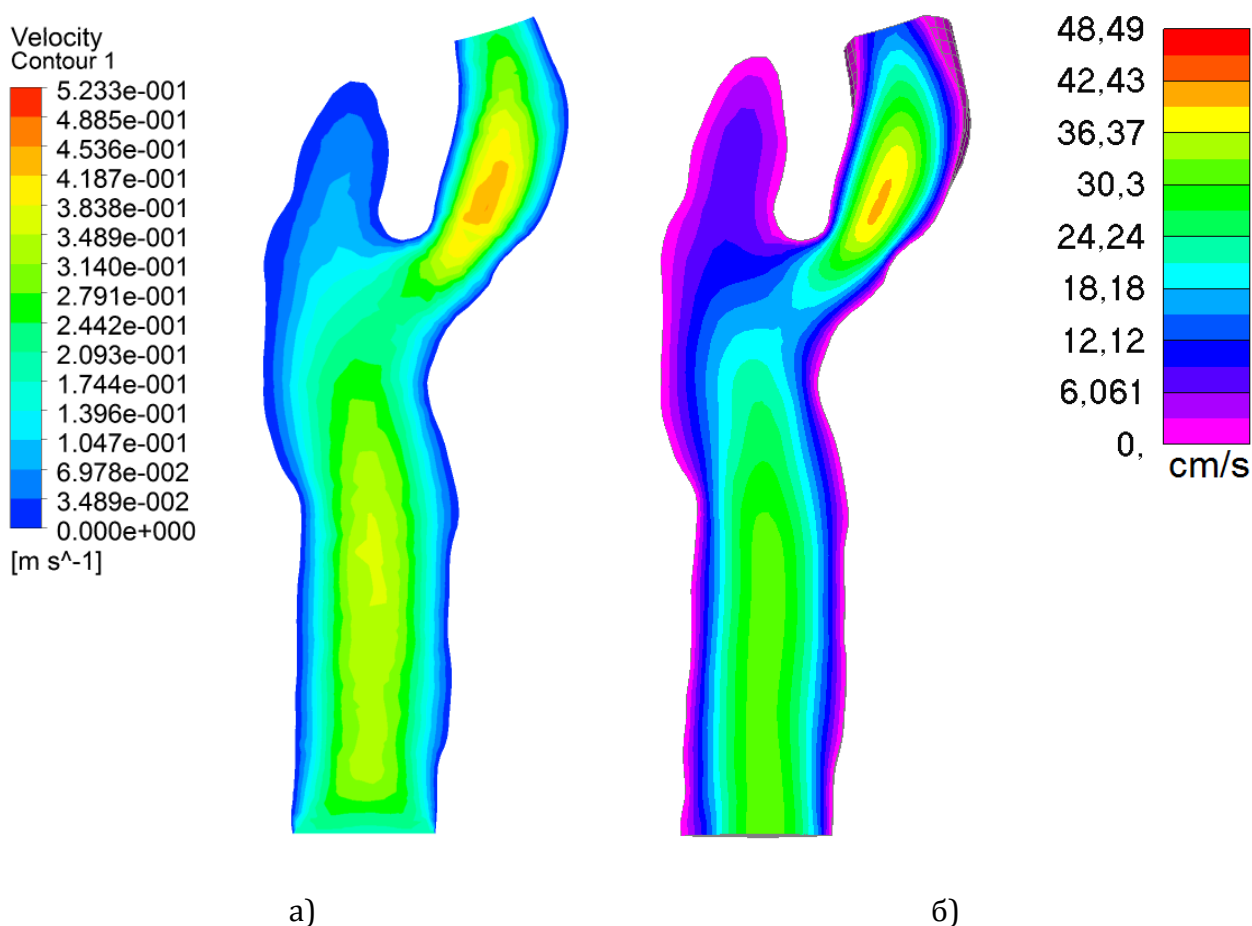
На основу приказаних резултата може се видети да брзина струјања крви у бифуркацији има велики пад услед велике стенозе која се налази на главној грани десне коронарне бифуркације. Брзина крви на том делу спада испод $v = 100 \text{ mm/s}$. Резултати смицајног

напона на зиду то управо потврђују јер је напон на том делу артерије са вредностима између $200Pa$ и $250Pa$. Напон је 10 пута већи него на делу где нема стенозе.

Стеноза у овом обиму пре свега непосредно угрожава здравље пацијента и потребно је хитна интервенција у виду васкуларног стента како не би дошло до инфаркта пацијента.

7.6 Поређење нумеричких резултата за ламинарно струјање флуида у каротидној артерији, пацијент 5

У овом поглављу изведено је поређење нумеричких резултата у софтверу *ANSYS Fluent R15.0* (слика 7.84а) и *PAK-F* (слика 7.84б). У оба случаја приказана је каротидна артерија (слика 7.84) у равни ZX, поглед са врха осе Y, која је постављена на истом месту у оба софтвера.

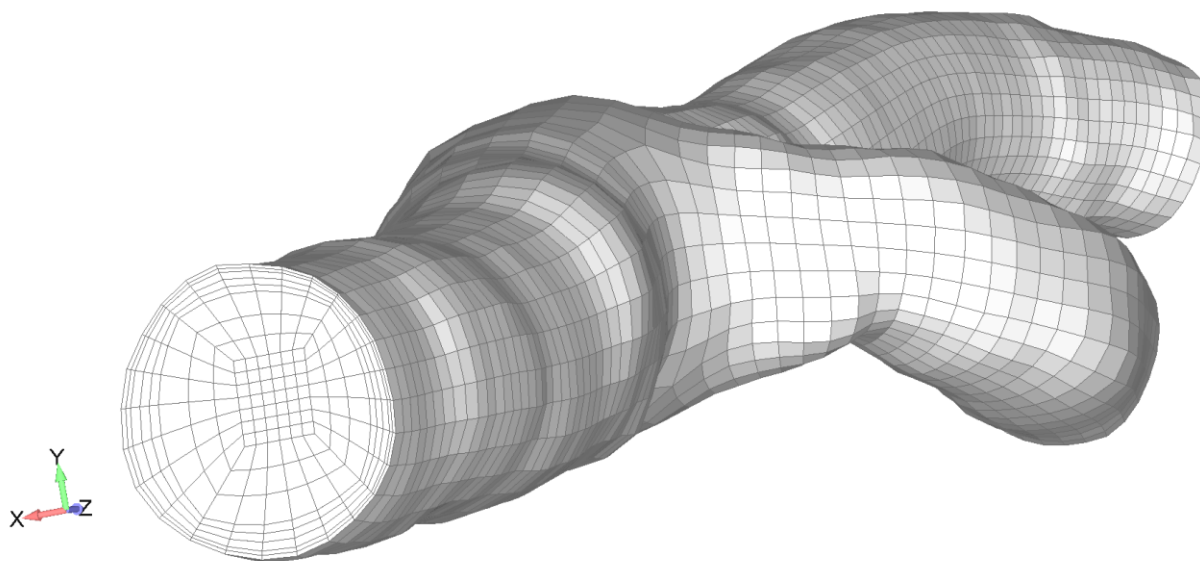


Слика 7.84 Поређење нумеричких резултата за ламинарно струјање флуида у каротидној бифуркацији, пацијент 5, а) софтвер *ANSYS Fluent R15.0*, б) софтвер *PAK-F*

Интензитет брзине у оба случаја се разликује врло мало (мање од 5%) при максималном интензитету. Један од разлога може да буде зато што се у софтверу *ANSYS Fluent R15.0* користи метод коначних запремина, док се у *PAK-F* користи метод коначних елемената. За оба проблема коришћен је ламинарни солвер за струјање.

7.7 Нумеричка симулација турбулентног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 5

Симулација турбулентног струјања крви кроз крвни суд извршена је на реалној бифуркацији каротидне артерије изабраног пацијента 5 описаног у поглављу 7.2. За прорачун је коришћен софтвер *PAK-F*. Прорачун је извршен у 200 временских корака по 0.005s. МКЕ модел флуидног домена је моделиран са 31910 3Д елемената. На слици 7.85 приказан је флуидни домен који је коришћен у прорачуну. Може се видети са слике да је мрежа близу зидова веће густине због прорачуна турбулентног струјања.

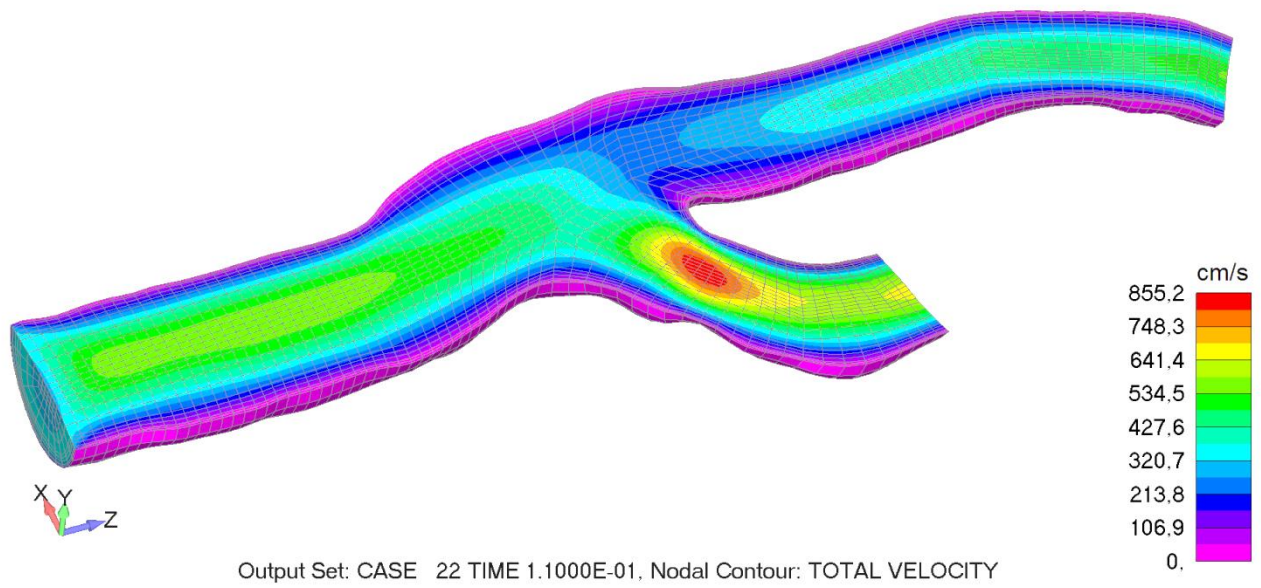


Слика 7.85 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије, пацијент 5

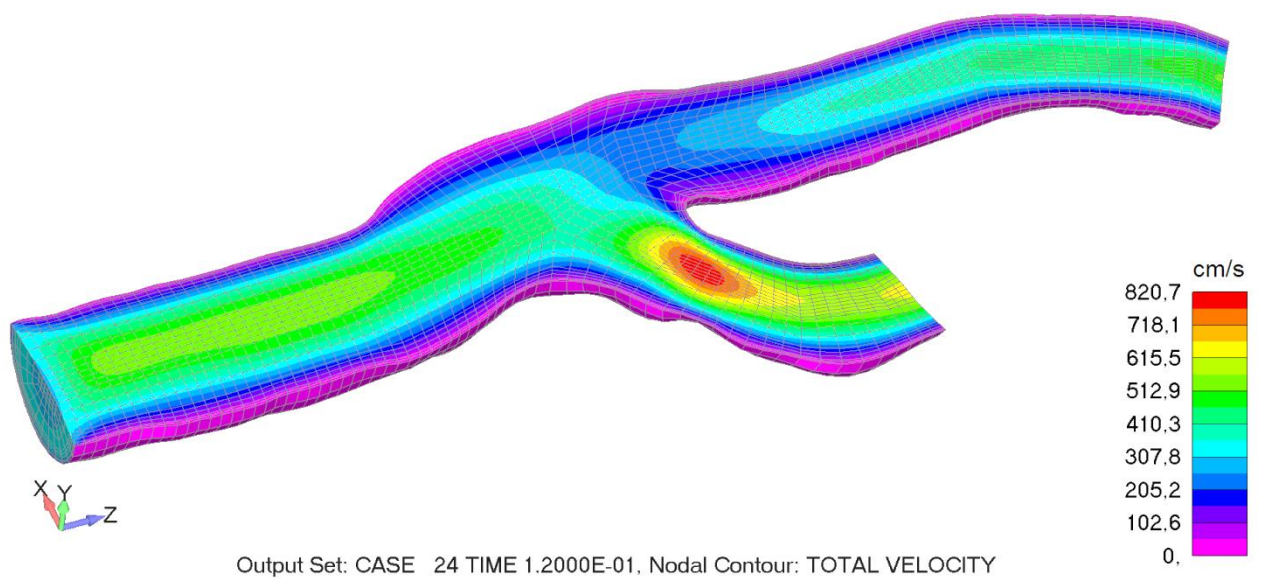
Флуид, односно крв се посматра као Њутнов флуид. Осредњена брзина струјања крви на улазу у каротидну артерију је $v_{sr} = 300 \text{ cm} / \text{s}$. Рејнолдсов број у овом случају има вредност 6000 тако да је ово струјање у домену турбулентног струјања. Ова вредност брзине је узета као вредност која је 10 пута већа од неке стандардне вредности која се креће око $30 \text{ cm} / \text{s}$.

Ограничени су сви чворови на зиду артерије тако да нема брзине струјања, док је на излазима из артерије постављен притисак који тежи нули. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.6).

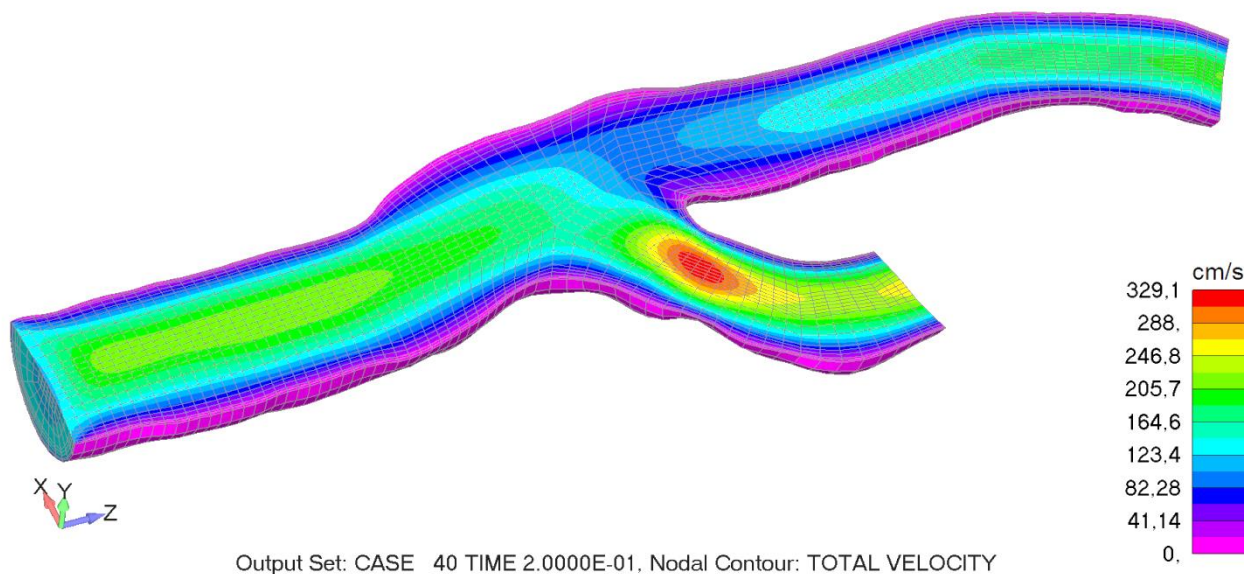
Резултати који су приказани у даљем тексту су брзина струјања флуида (слике од 7.86 до 7.89), расподела кинетичка енергија турбуленције (слике од 7.90 до 7.93), специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције (слике од 7.94 до 7.97) и смицајни напон на зиду артерије (слике од 7.98 до 7.105). Најзначајнији корази за анализу су када имамо максимум систоле (22. и 24. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 40. и 124. корака. Детаљнија анализа дата је у Закључку, поглавље 8.



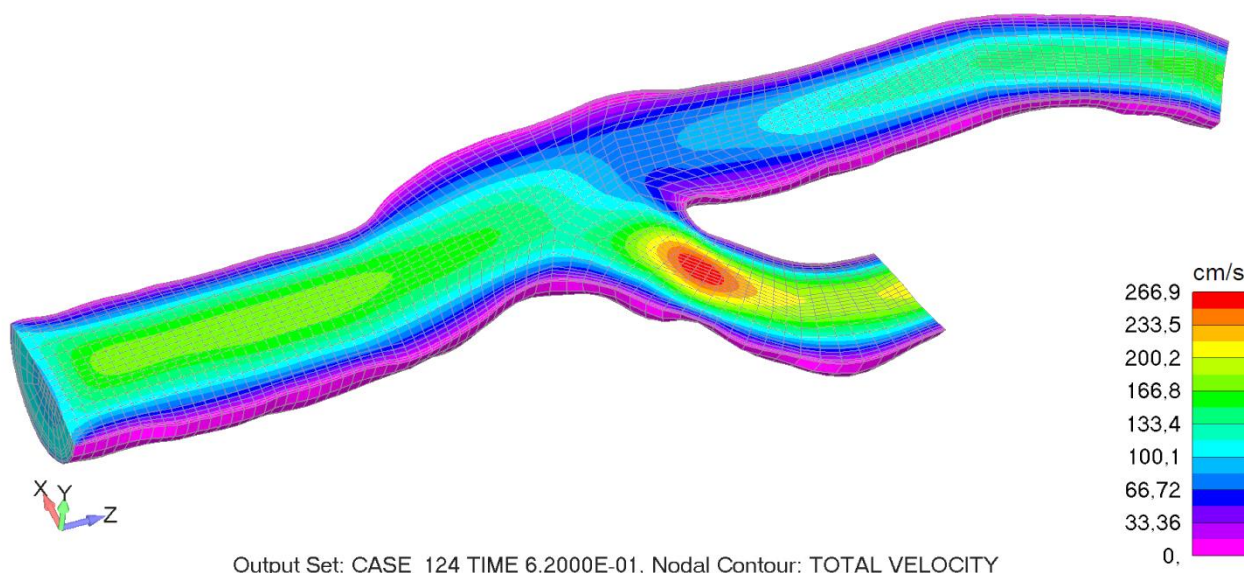
Слика 7.86 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5



Слика 7.87 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5

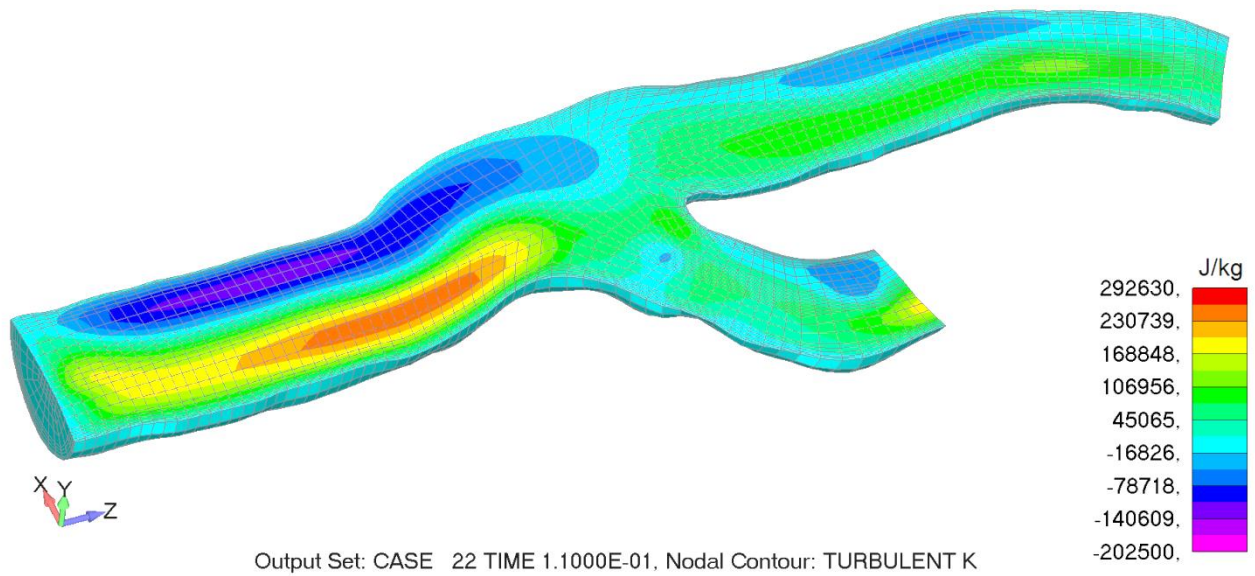


Слика 7.88 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5

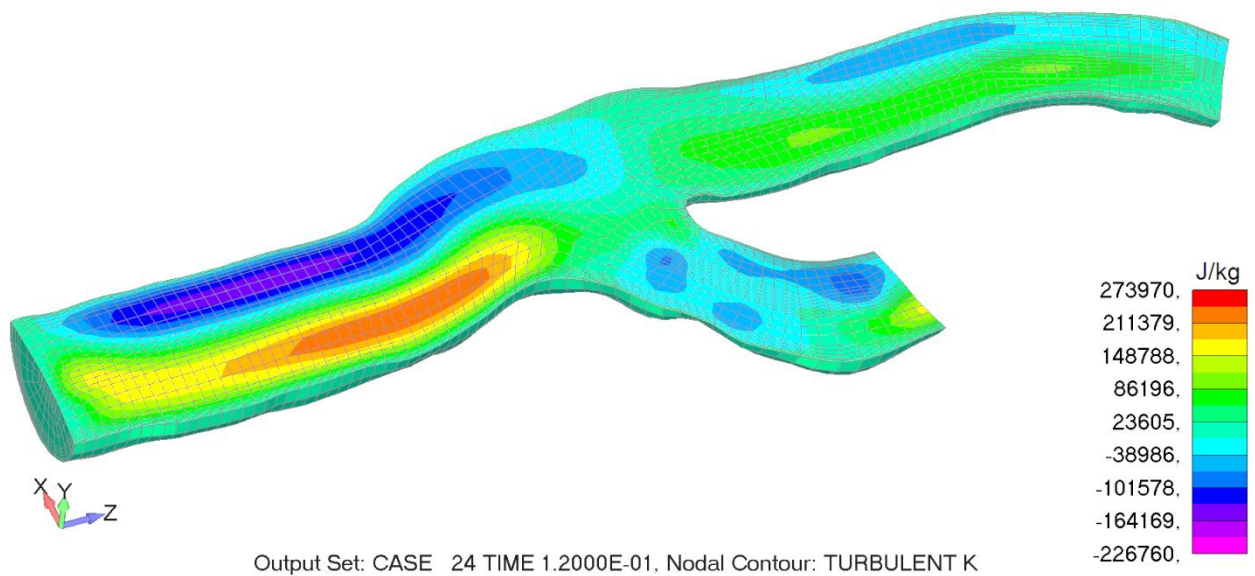


Слика 7.89 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5

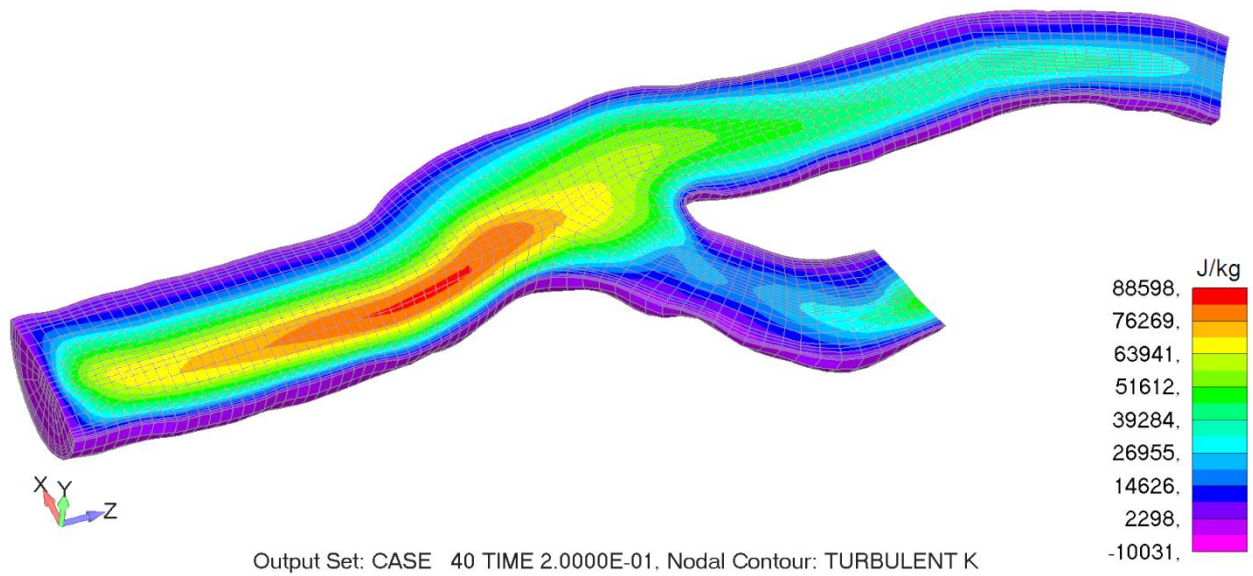
На претходним сликама где је приказана расподела брзине дуж пресека каротидне артерије може се видети да се интензитет брзине значајно повећава у делу где имамо стенозу артерије. Параметри попут смицајног напона на зиду битно мењају у делу где имамо стенозу.



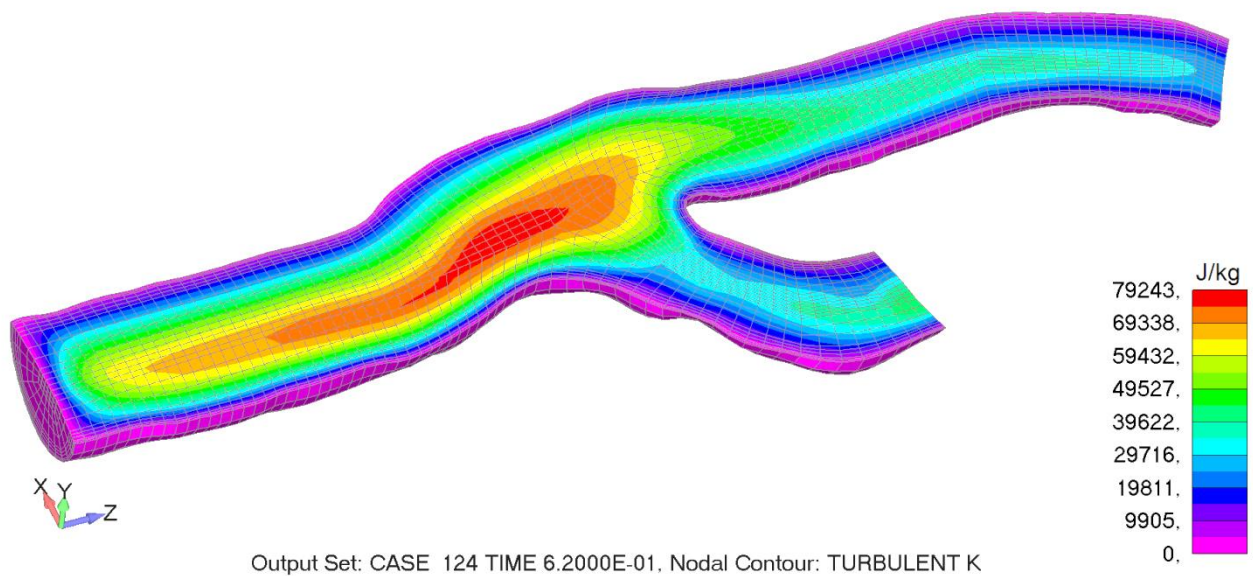
Слика 7.90 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5



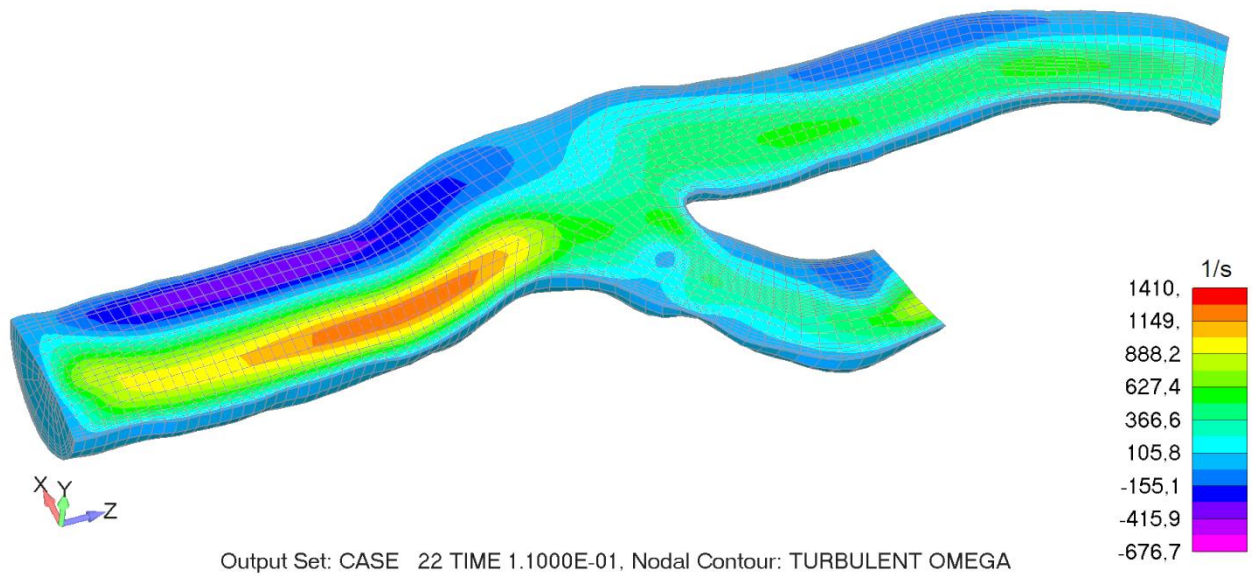
Слика 7.91 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5



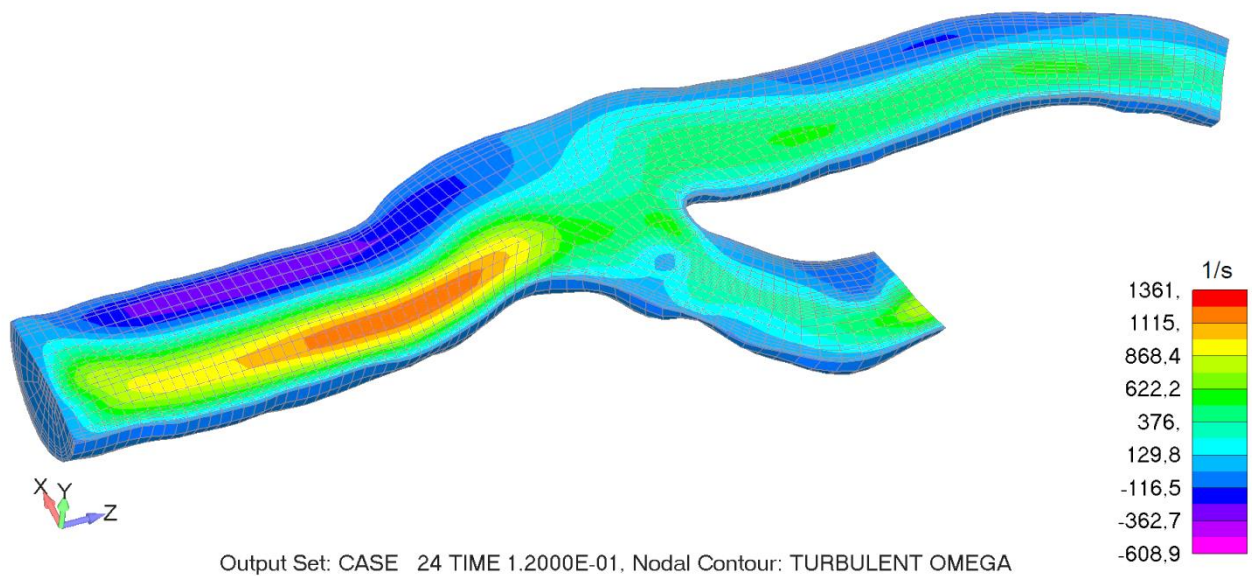
Слика 7.92 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5



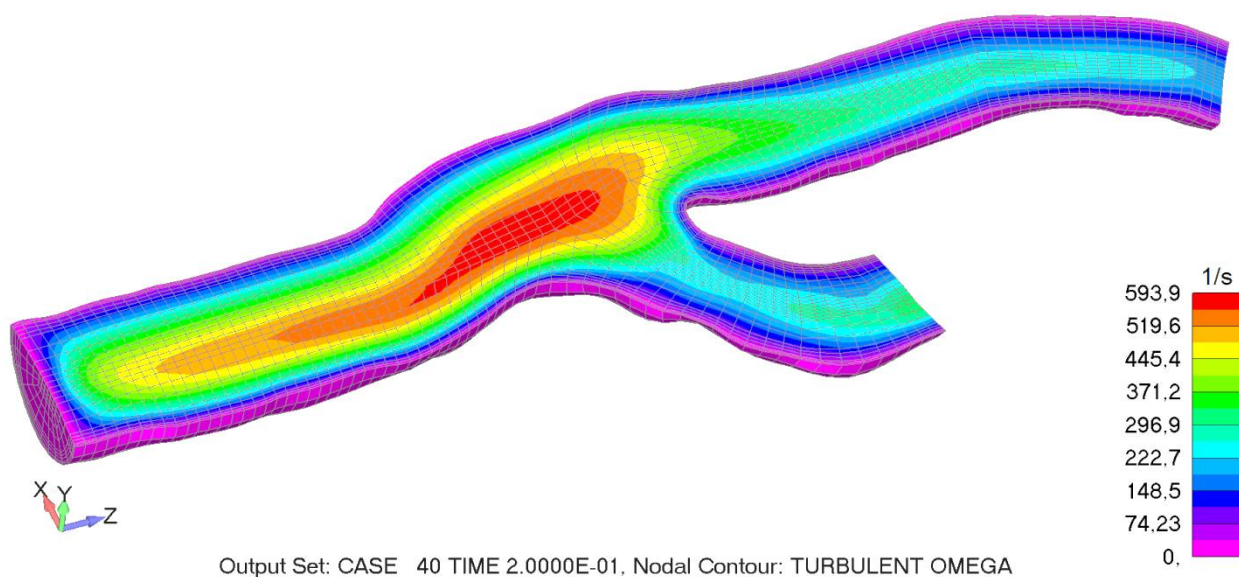
Слика 7.93 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5



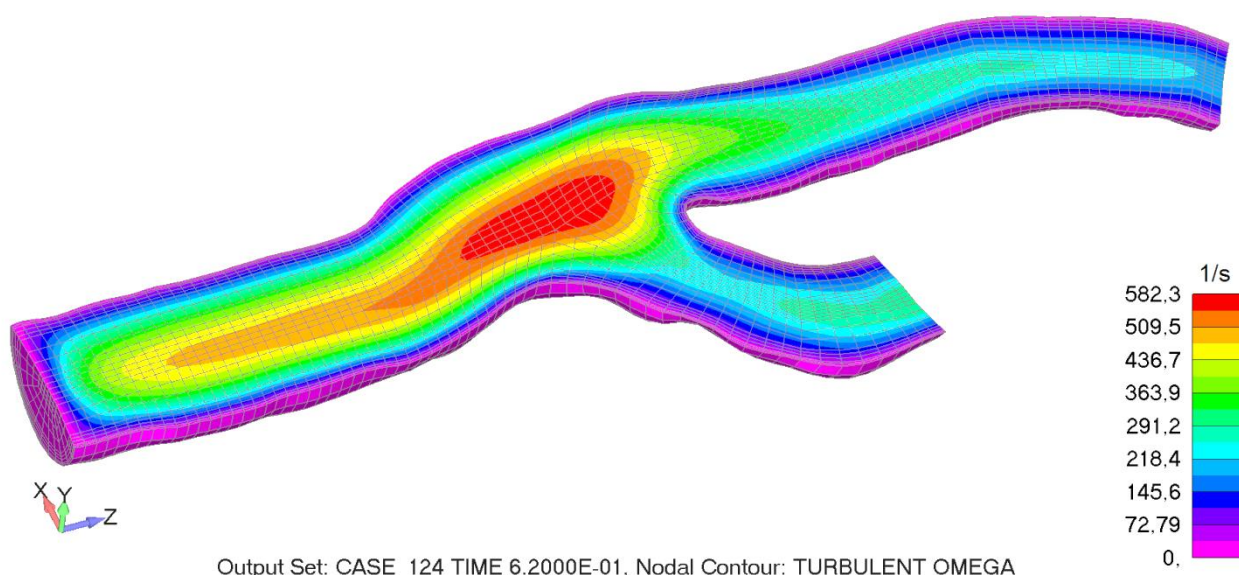
Слика 7.94 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 5



Слика 7.95 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 5

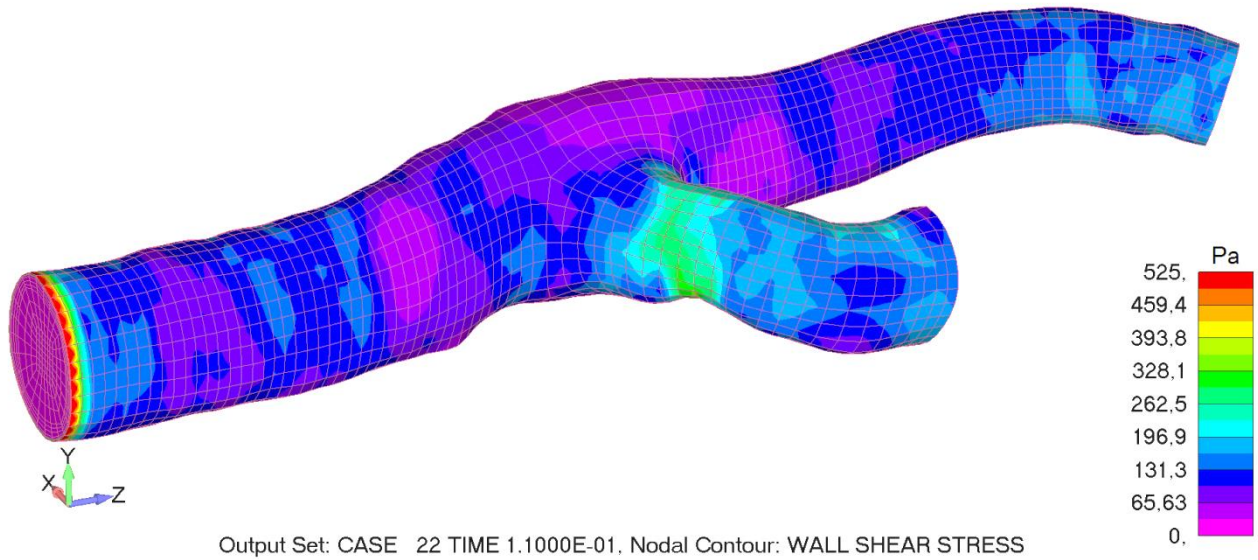


Слика 7.96 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 5

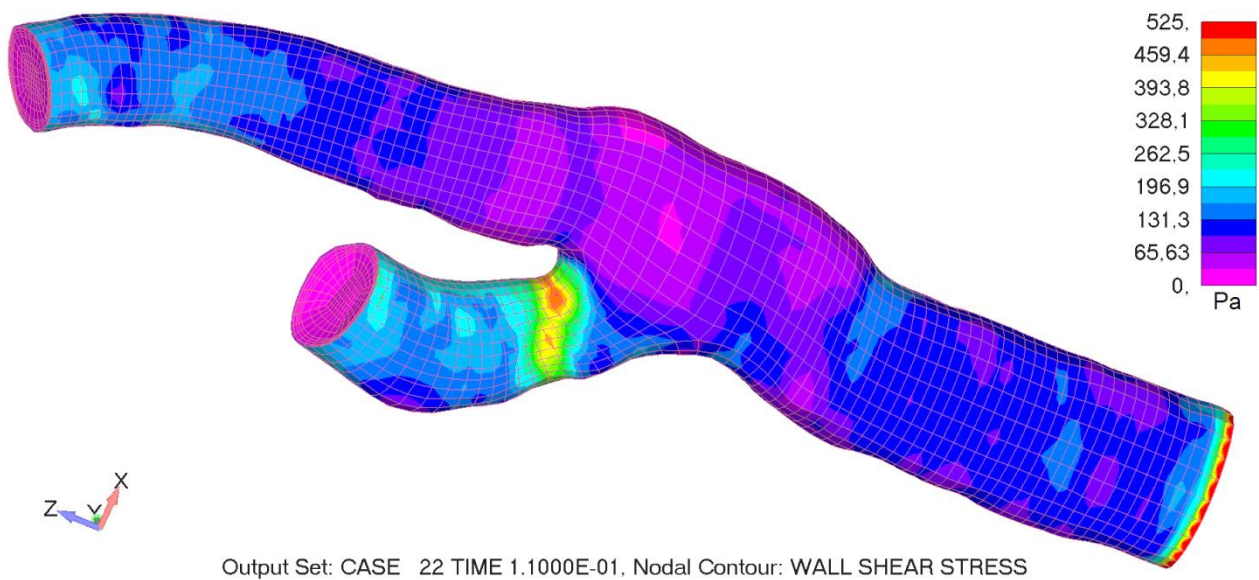


Слика 7.97 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 5

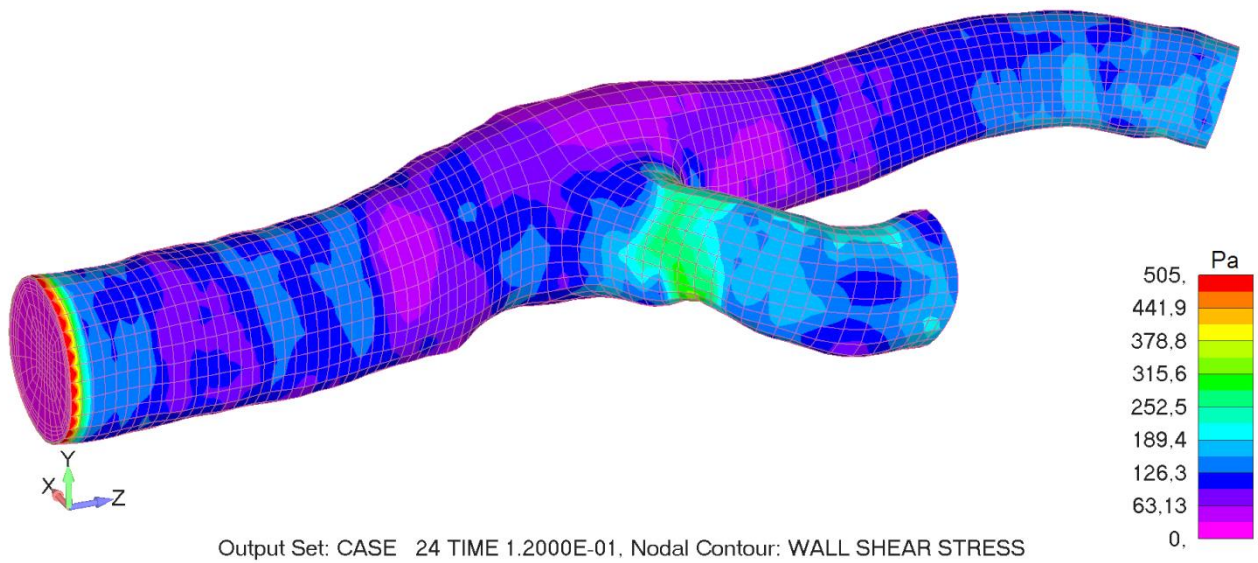
Смицајни напон на зиду је величина која је битна за проучавање хемодинамских карактеристика каротидне бифуркације. На следећим сликама приказана је артерија из два погледа. Овим начином се добија шира слика о томе где имамо проширења и сужења (стенозе) артерије. Аналогно брзини и смицајни напон на зиду има максималне вредности за време трајања систоле.



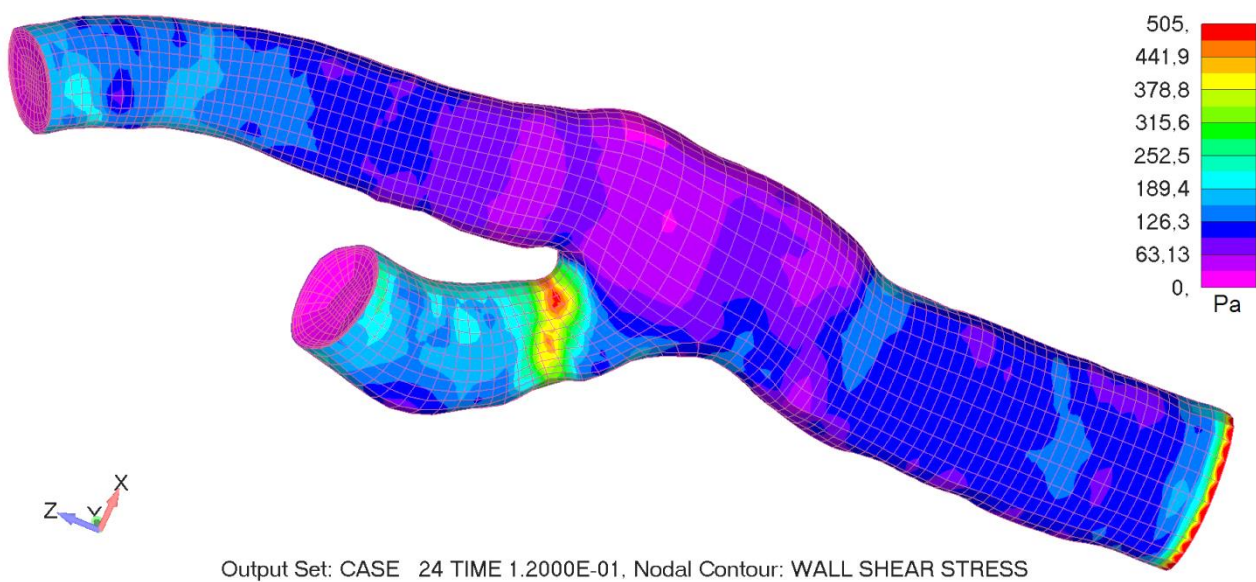
Слика 7.98 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 1, пацијент 5



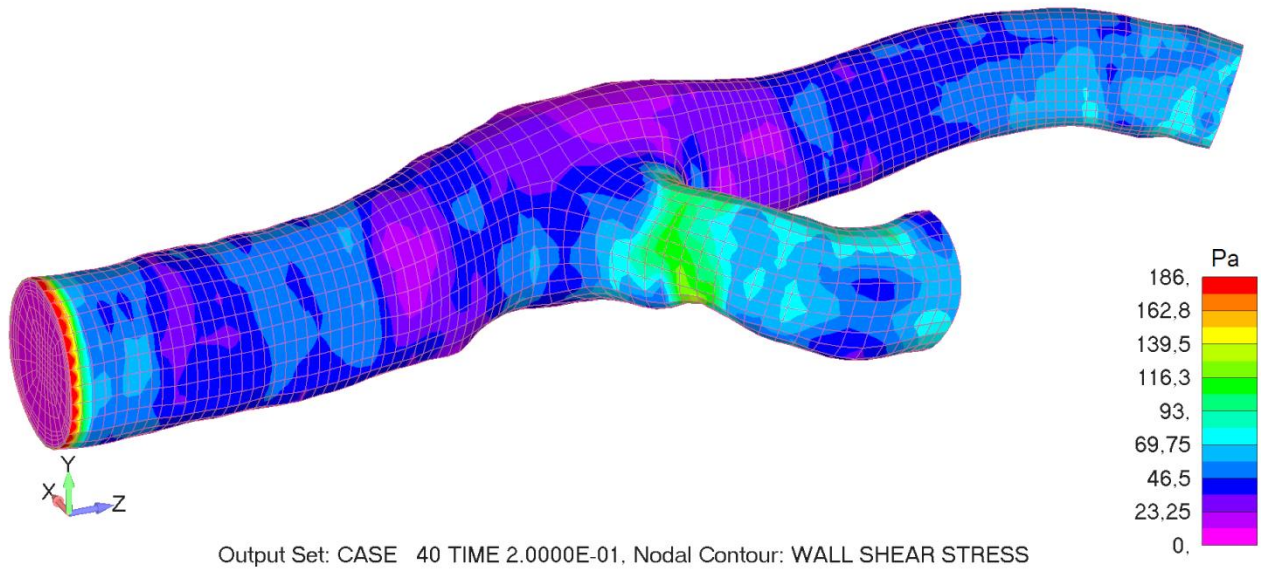
Слика 7.99 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 2, пацијент 5



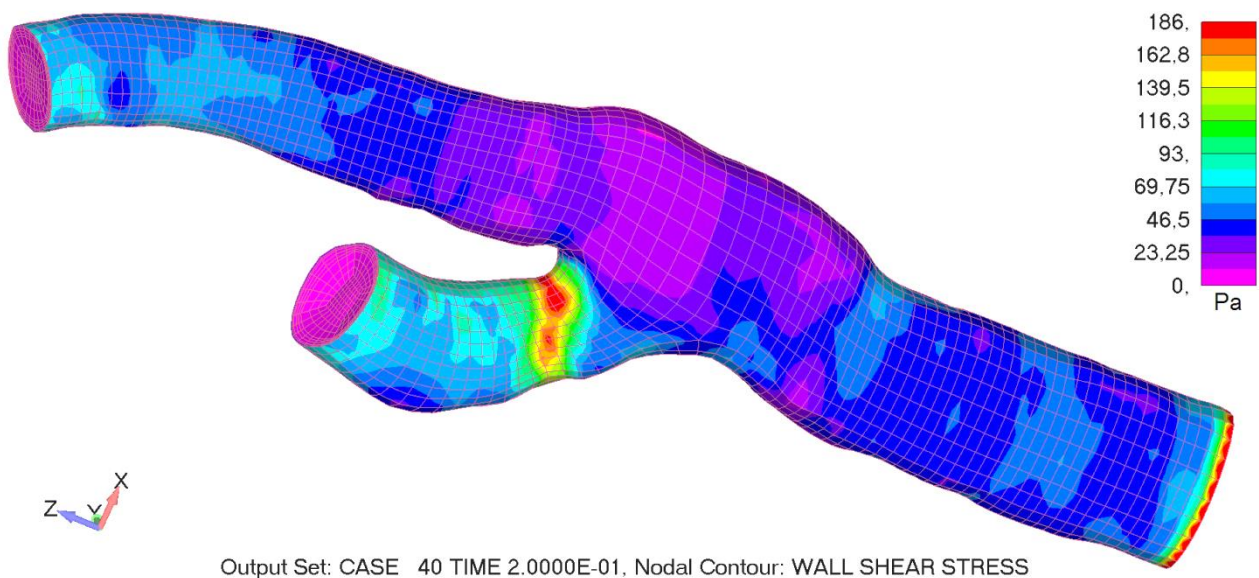
Слика 7.100 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 1, пацијент 5



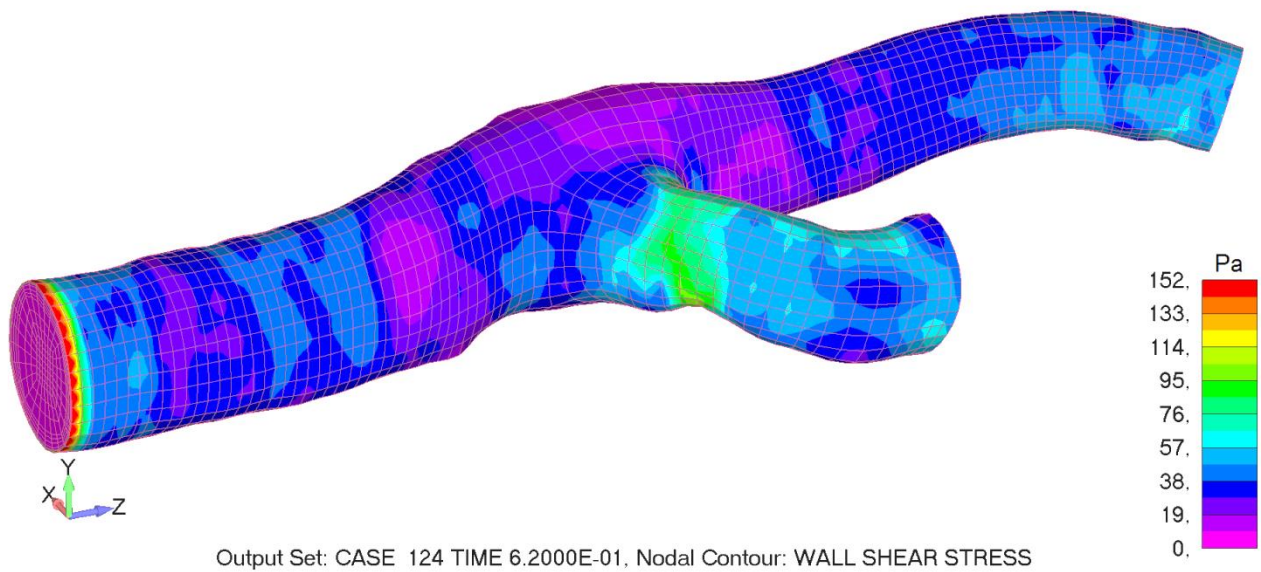
Слика 7.101 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 2, пацијент 5



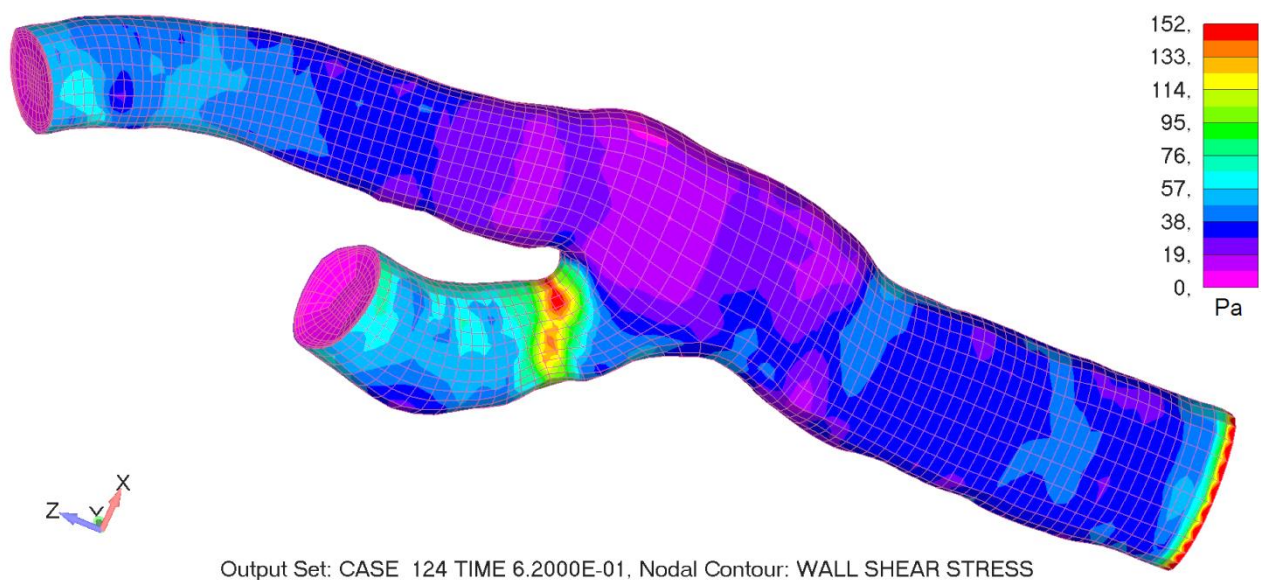
Слика 7.102 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 1, пацијент 5



Слика 7.103 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 2, пацијент 5



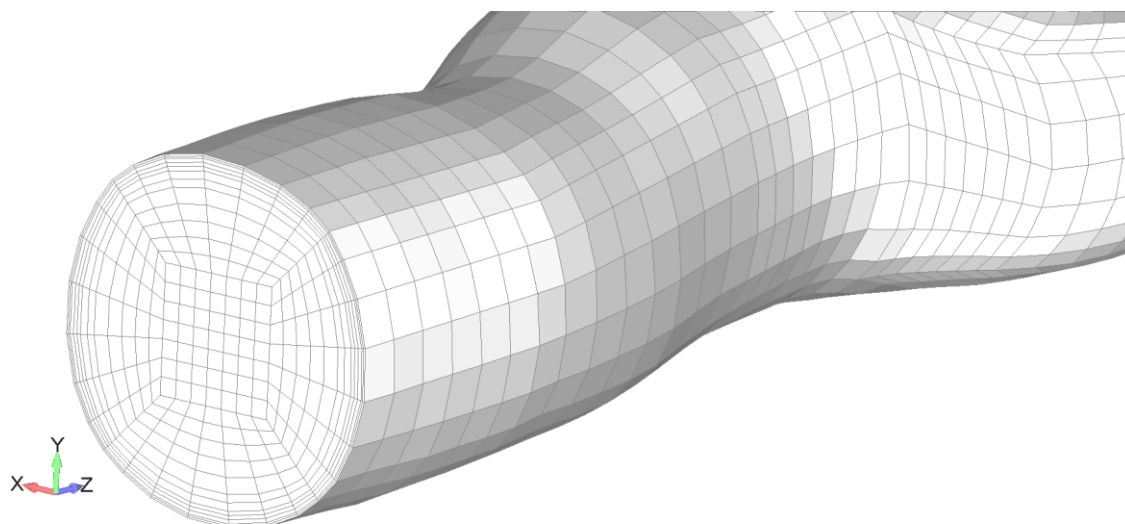
Слика 7.104 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 1, пацијент 5



Слика 7.105 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 2, пацијент 5

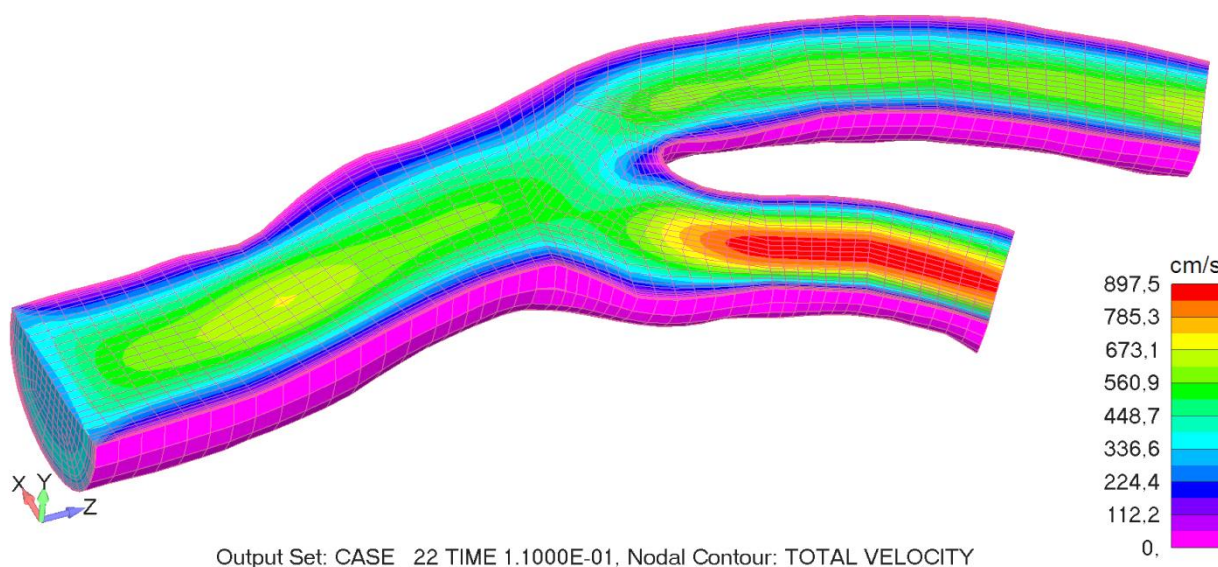
7.8 Нумеричка симулација турбулентног струјања флуида у каротидној артерији, пацијент 7

Код модела каротидне артерије за пацијента број 7 мрежа коначних елемената је гушћа по истом принципу као и код Пацијента 5 (Слика 7.106), поглавље 7.7. Улазни подаци, подаци о материјалу као и сва ограничења и оптерећења су иста као за модел у поглављу 7.7.

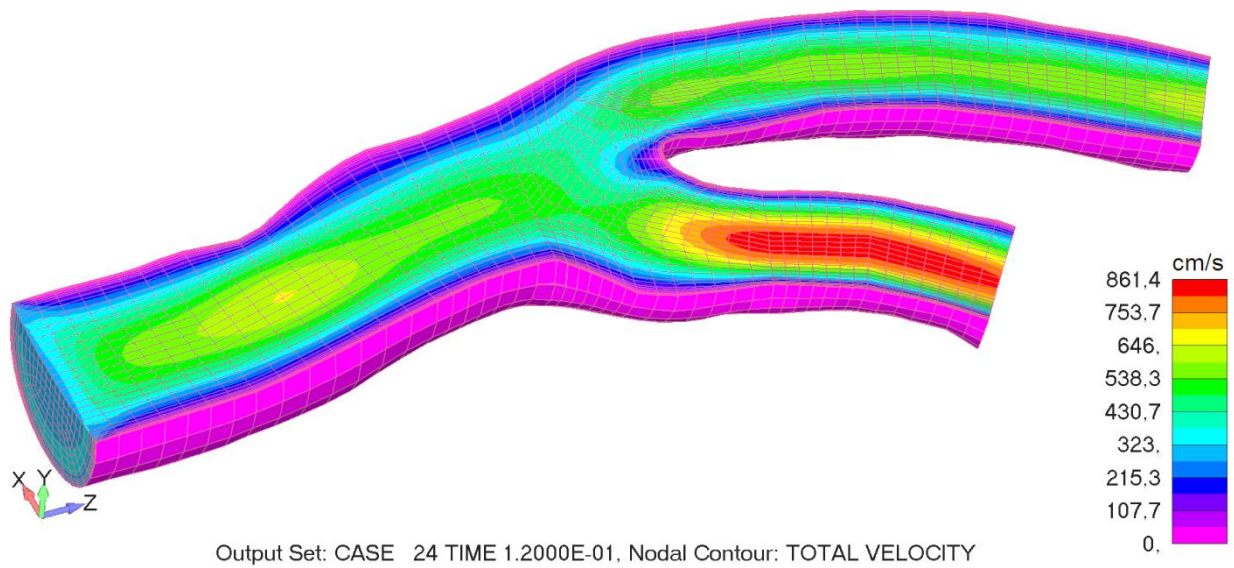


Слика 7.106 Модел коначних елемената бифуркације каротидне артерије са приказом набране мреже близу зидова, пацијент 7

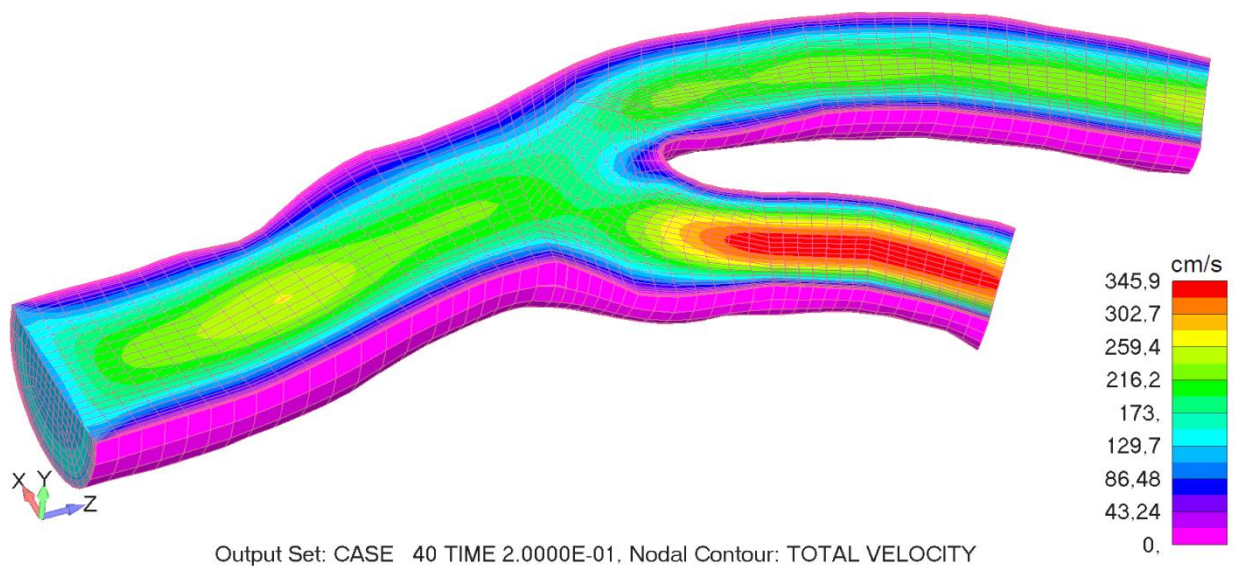
Резултати који су приказани у даљем тексту су брзина струјања флуида (слике од 7.107 до 7.110), расподела кинетичка енергија турбуленције (слике од 7.111 до 7.114), специфична дисипација кинетичке енергије турбуленције (слике од 7.115 до 7.118) и смицајни напон на зиду артерије (слике од 7.119 до 7.126). Најзначајнији кораци за анализу су када имамо максимум систоле (22. и 24. корак), док су за фазу дијастоле узете вредности из 40. и 124. корака. Детаљнија анализа дата је у Закључку, поглавље 8.



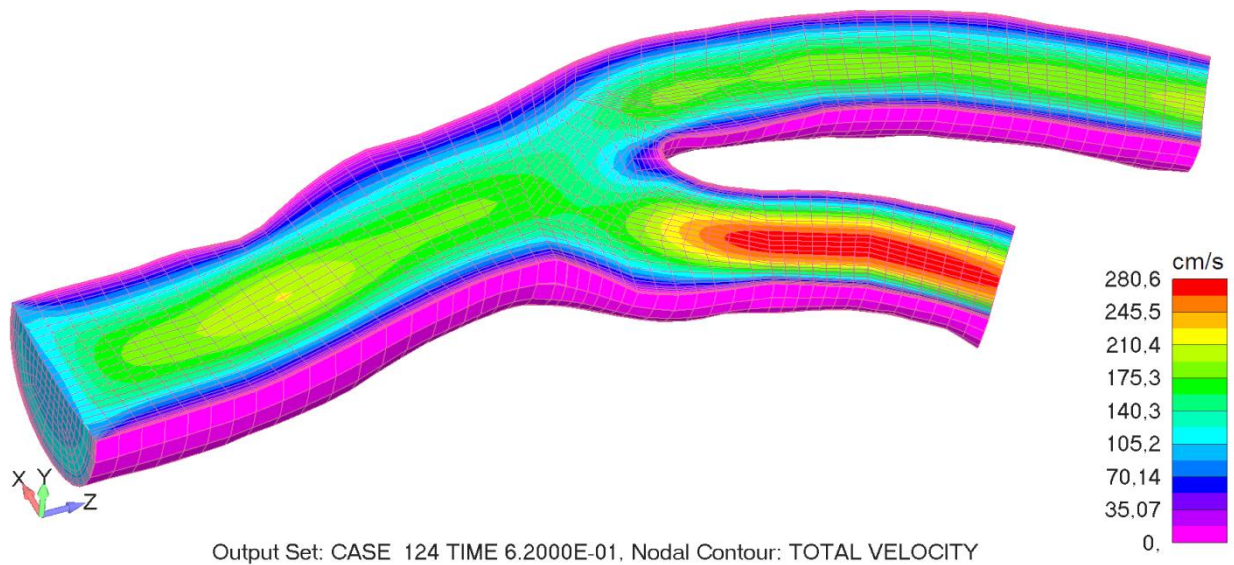
Слика 7.107 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7



Слика 7.108 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7

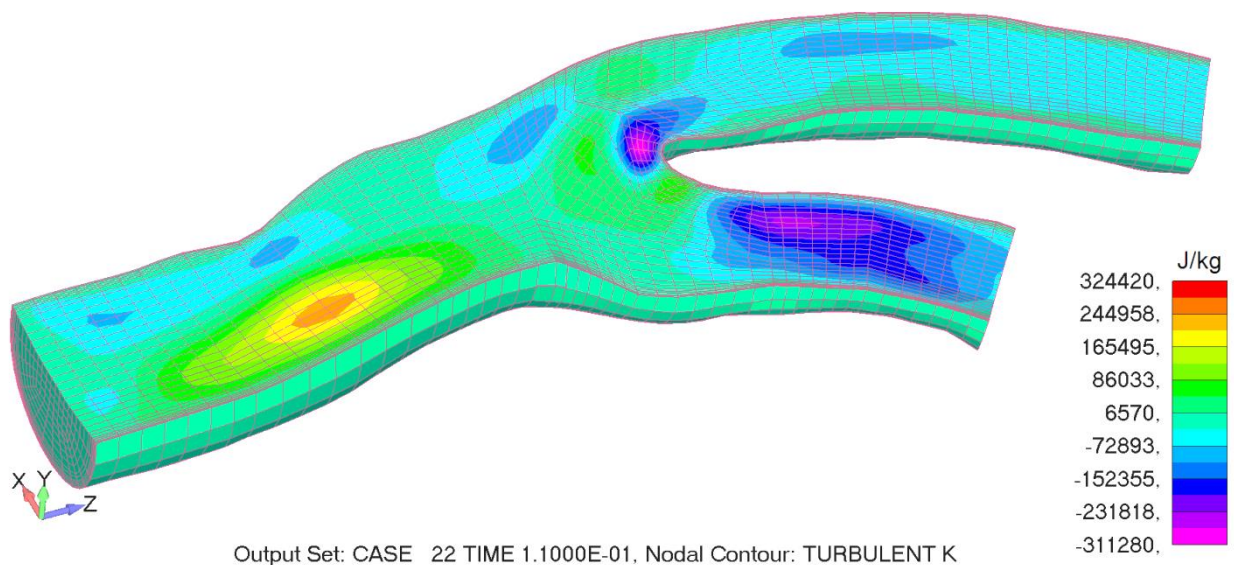


Слика 7.109 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7

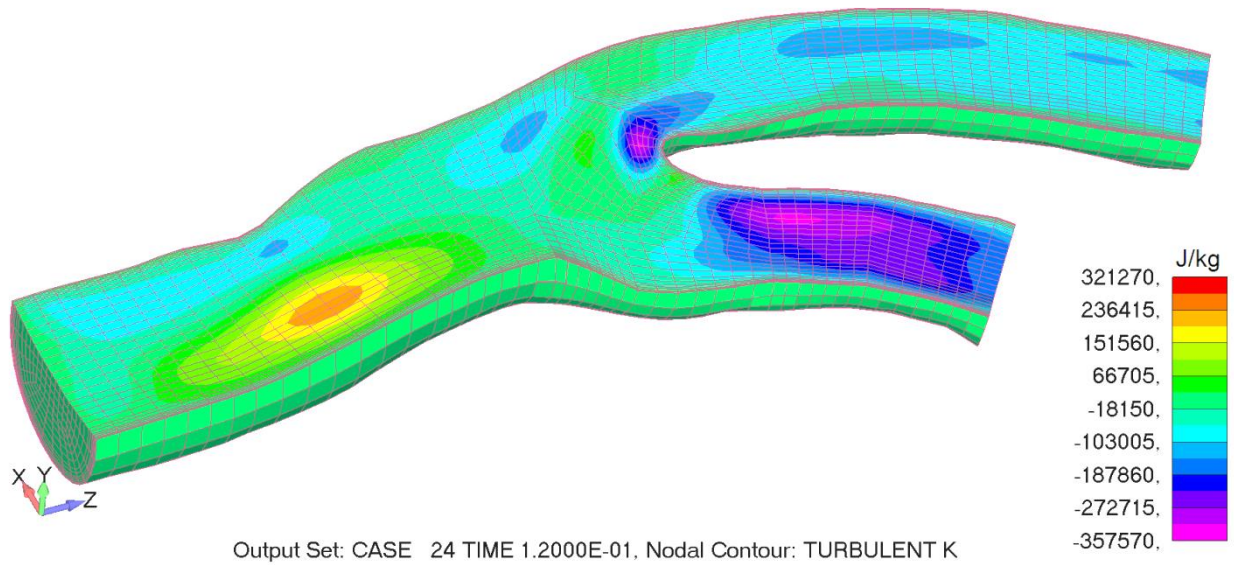


Слика 7.110 Расподела брзине струјања крви у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7

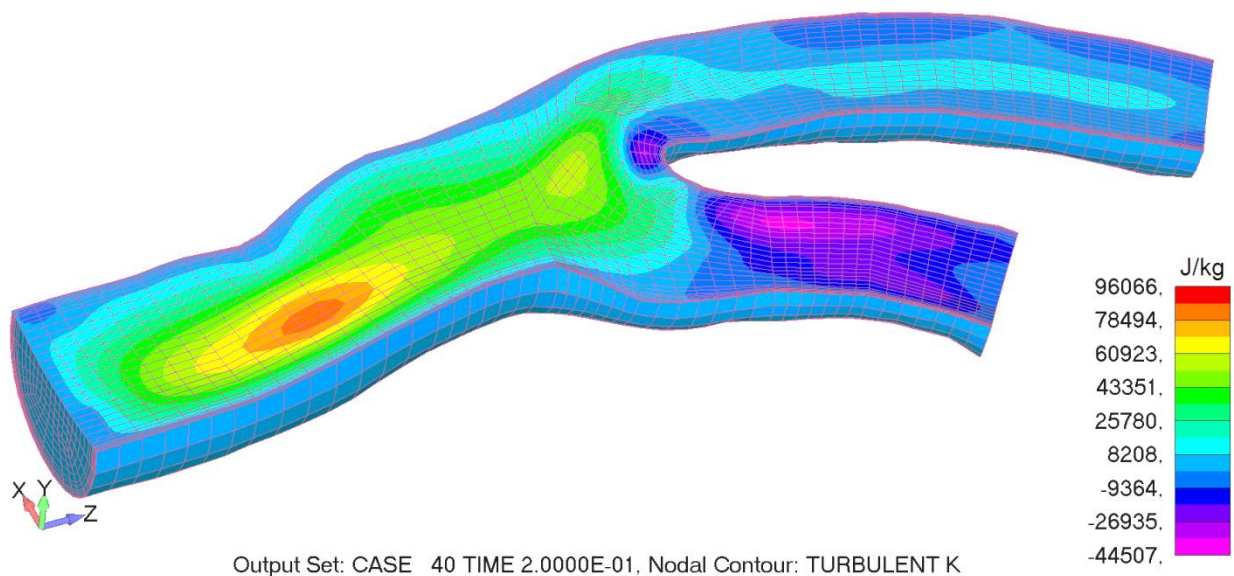
На претходним резултатима за брзину струјања флуида, може се приметити да је интензитет брзине већи у спољашној каротидној артерији што се може тумачити као да је спољашња грана у наставку главног струјања. На том делу артерије има и делимичних стеноза.



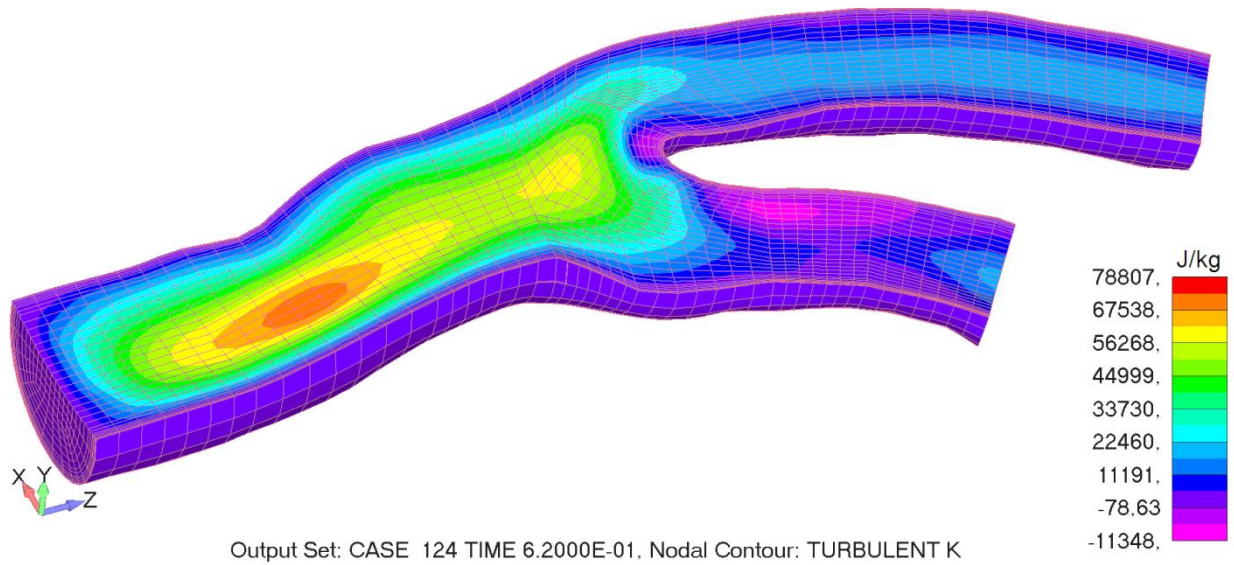
Слика 7.111 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7



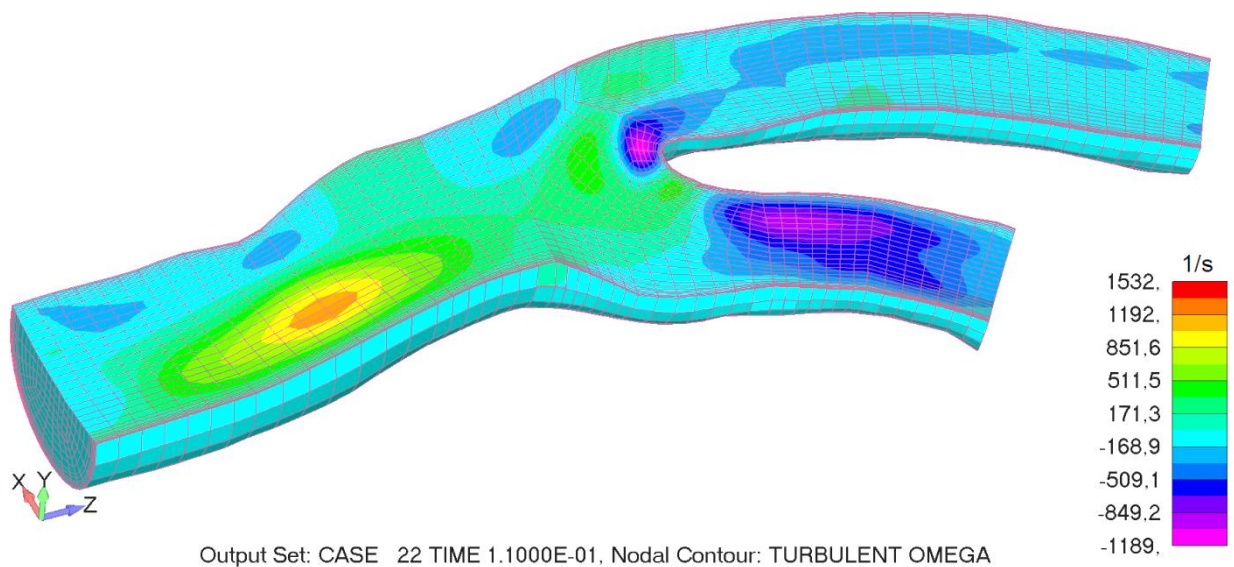
Слика 7.112 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7



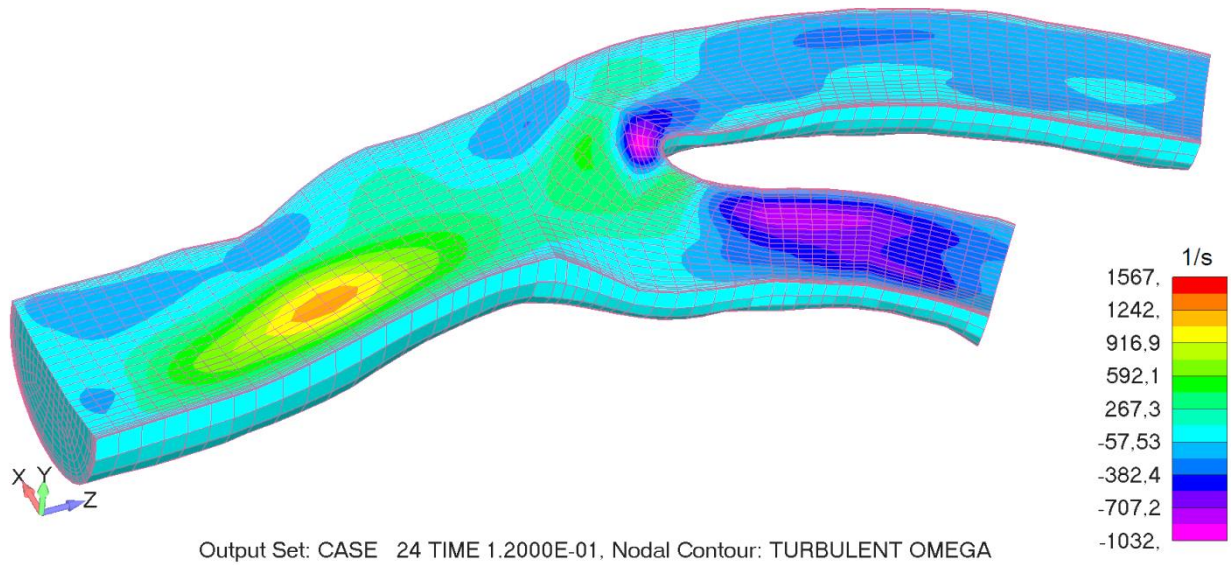
Слика 7.113 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7



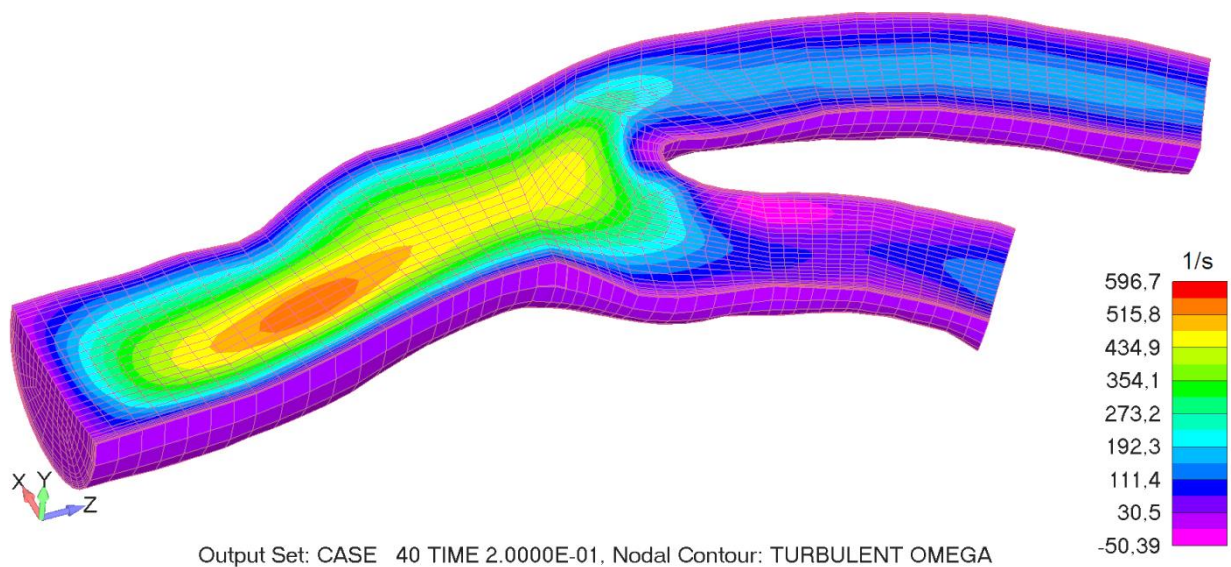
Слика 7.114 Расподела кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7



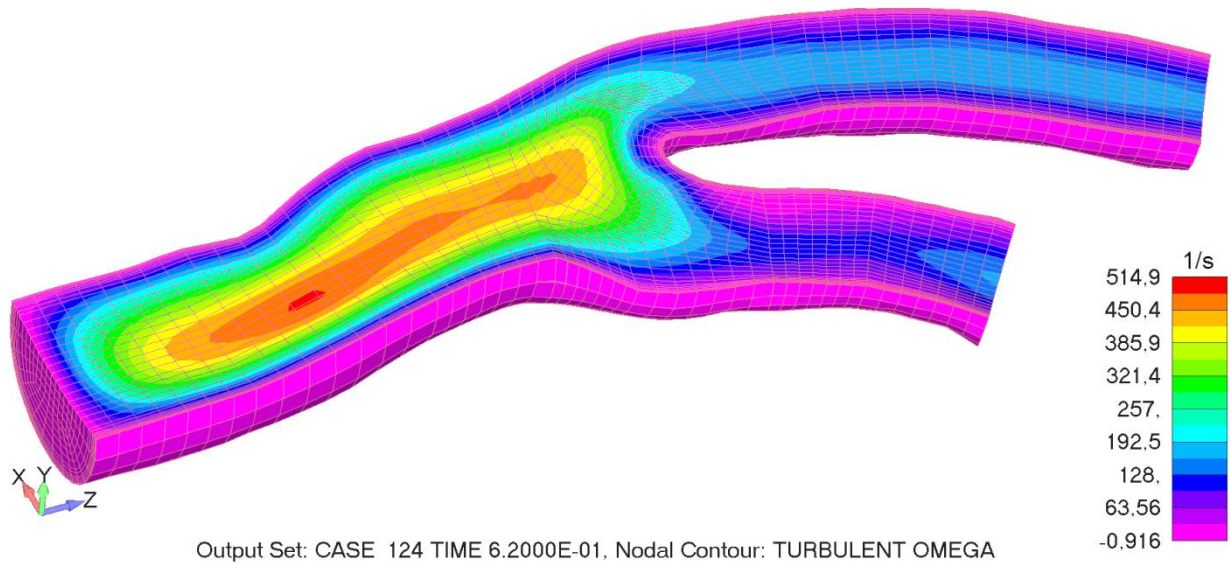
Слика 7.115 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 22, пацијент 7



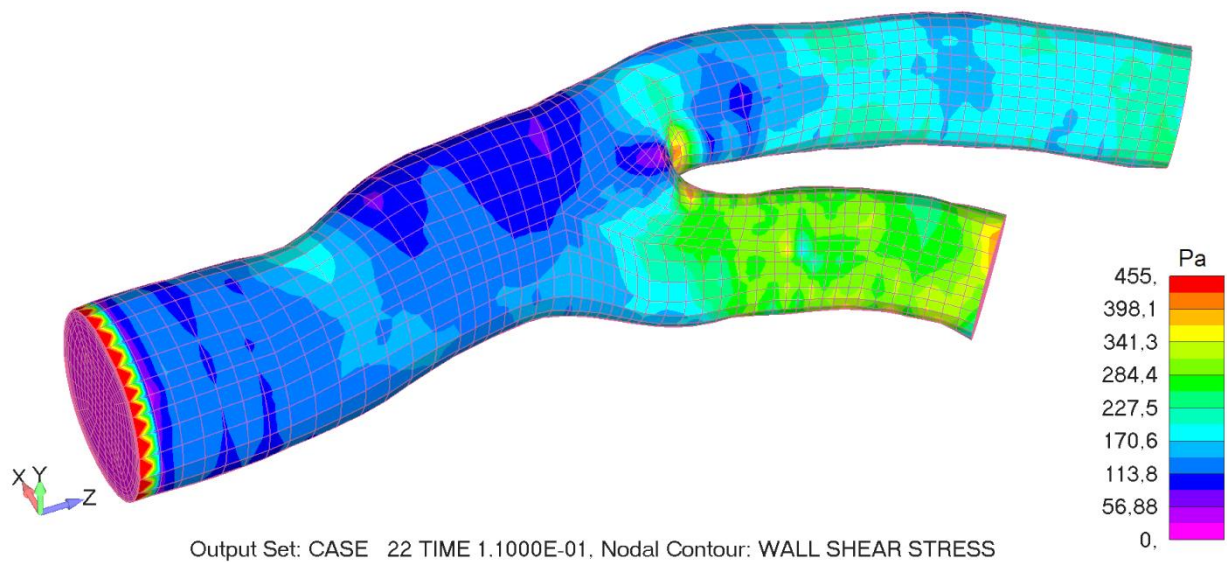
Слика 7.116 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 24, пацијент 7



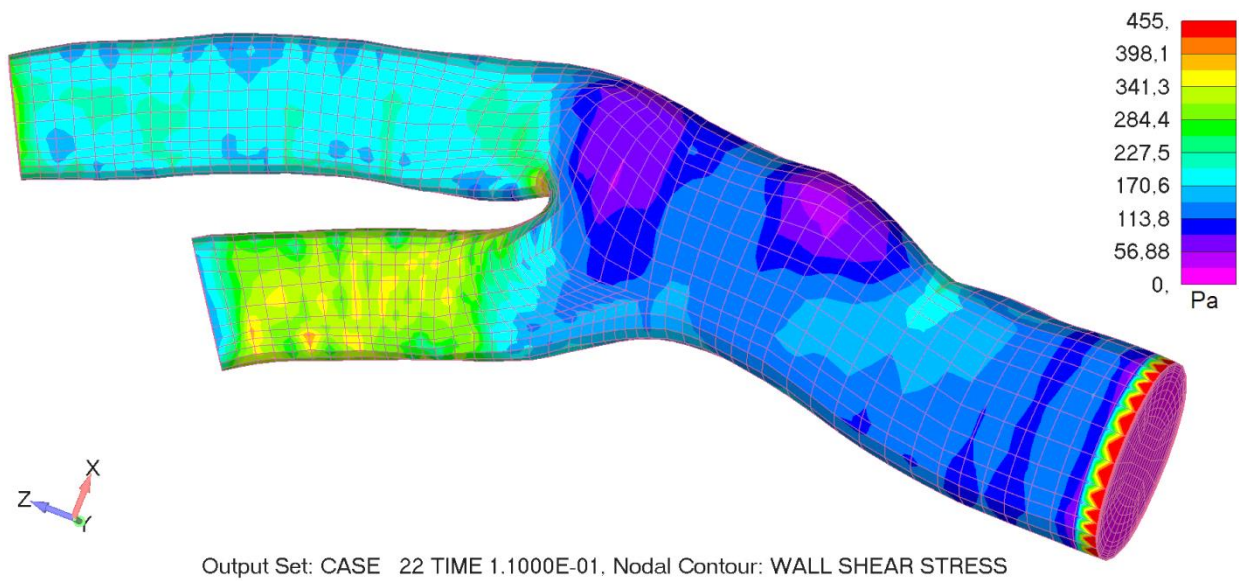
Слика 7.117 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 40, пацијент 7



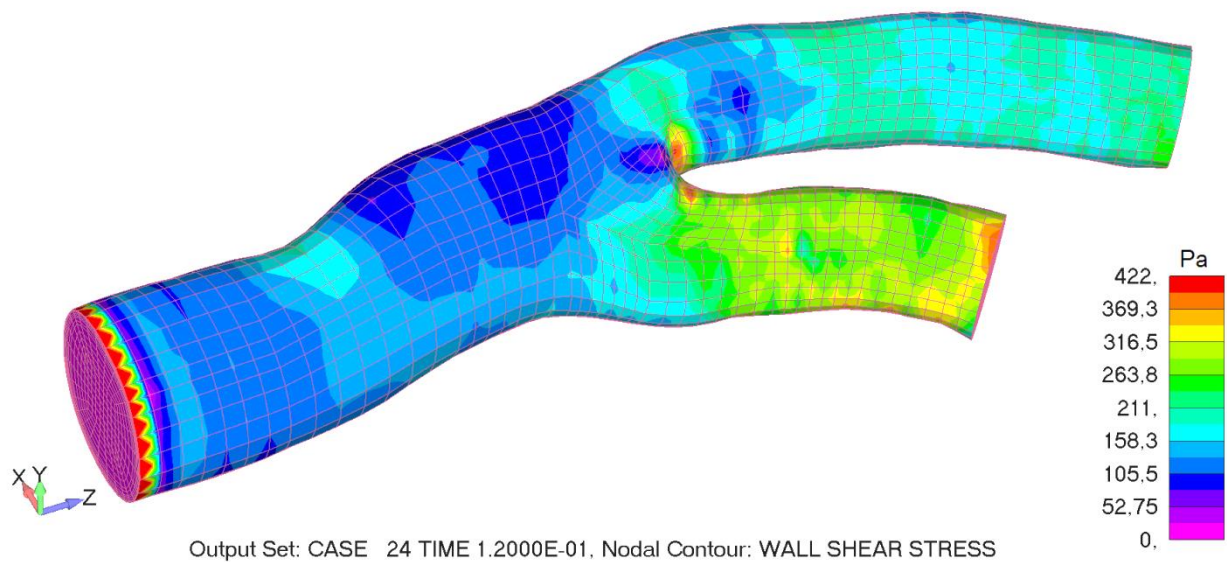
Слика 7.118 Расподела специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције у каротидној бифуркацији за корак 124, пацијент 7



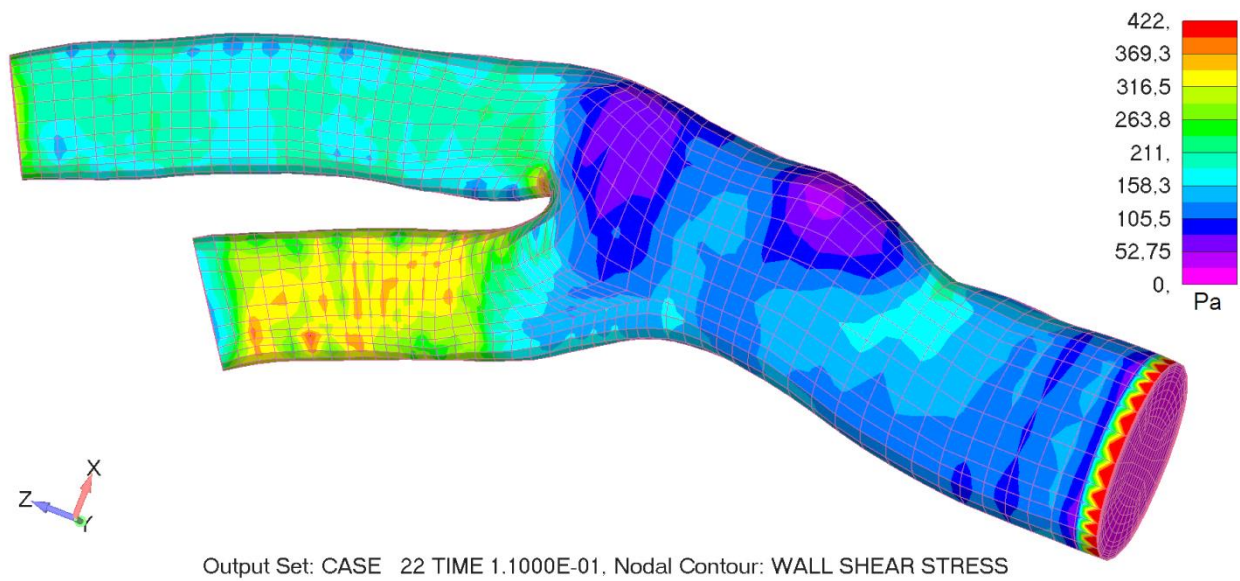
Слика 7.119 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 1, пацијент 7



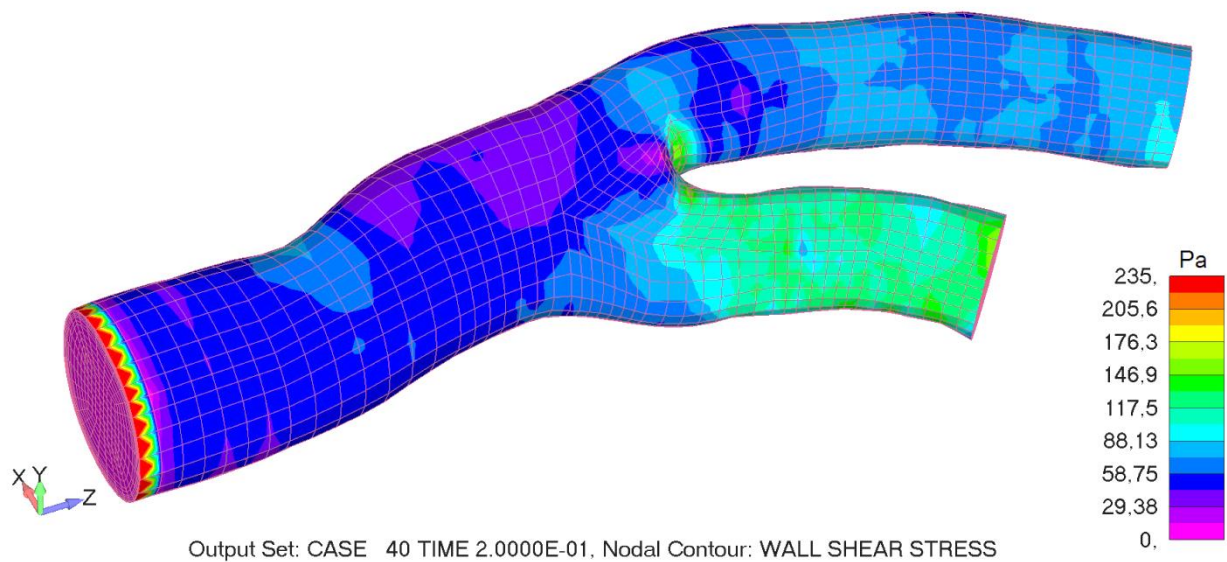
Слика 7.120 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 22, поглед 2, пацијент 7



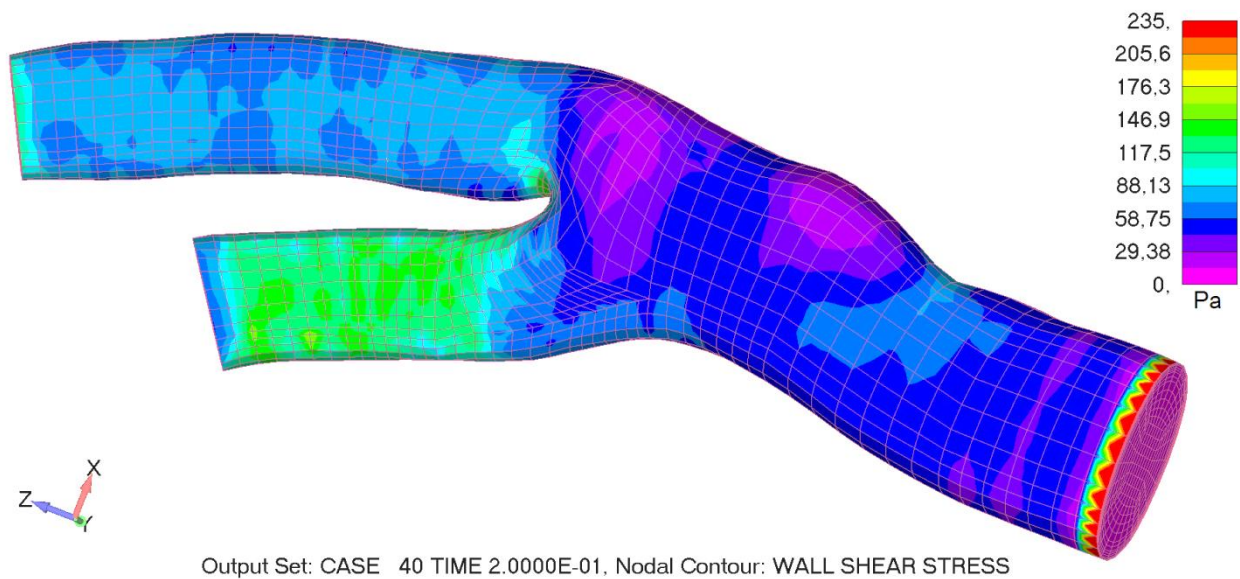
Слика 7.121 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 1, пацијент 7



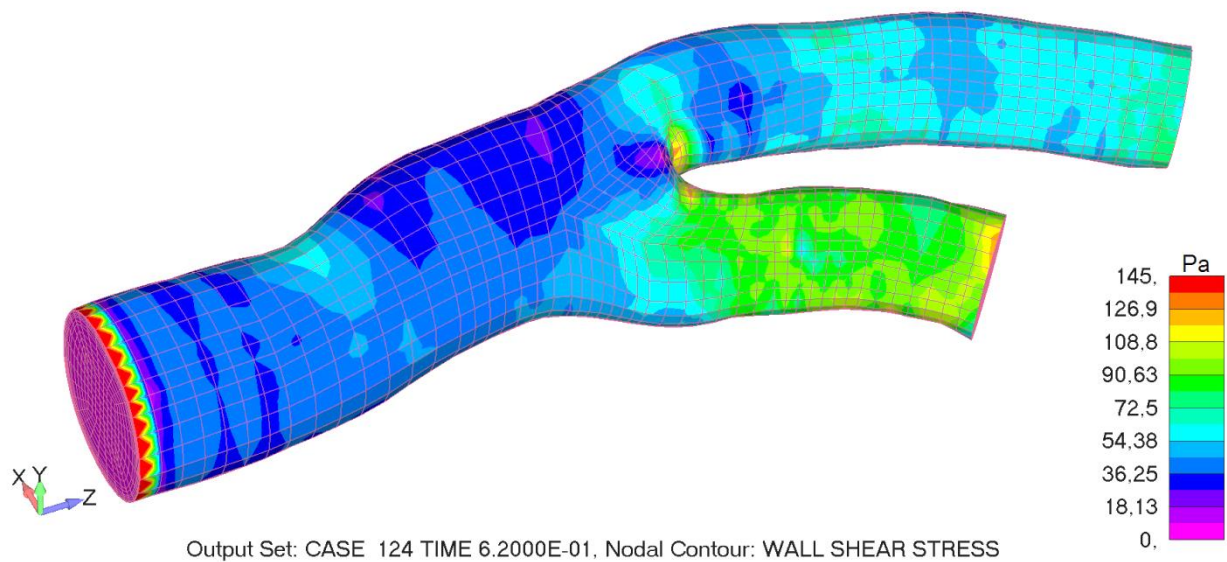
Слика 7.122 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 24, поглед 2, пацијент 7



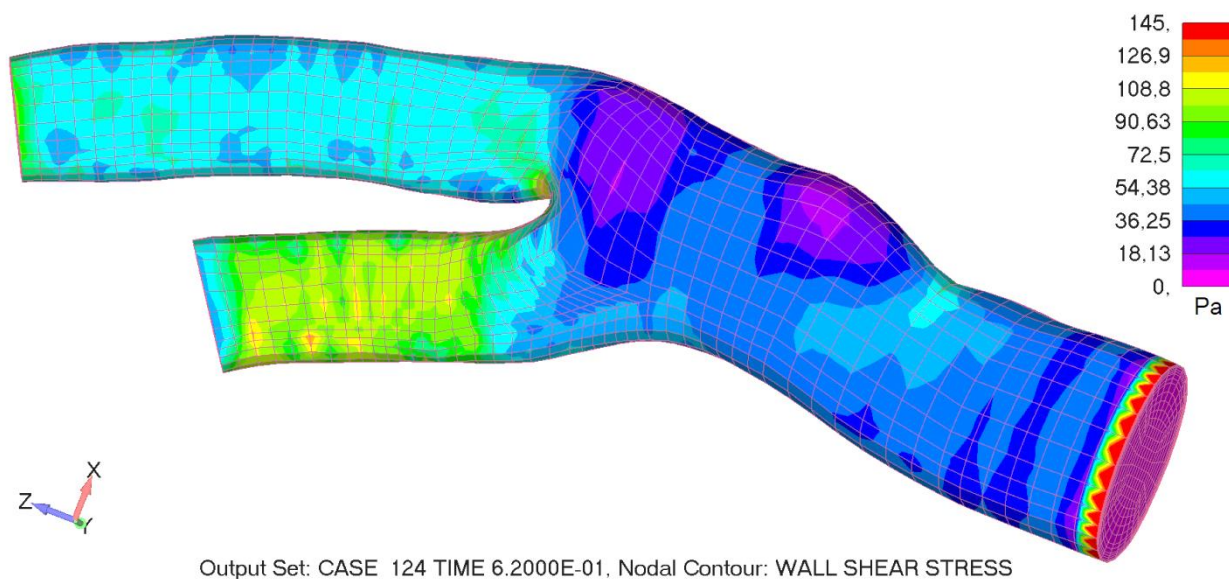
Слика 7.123 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 1, пацијент 7



Слика 7.124 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 40, поглед 2, пацијент 7



Слика 7.125 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 1, пацијент 7



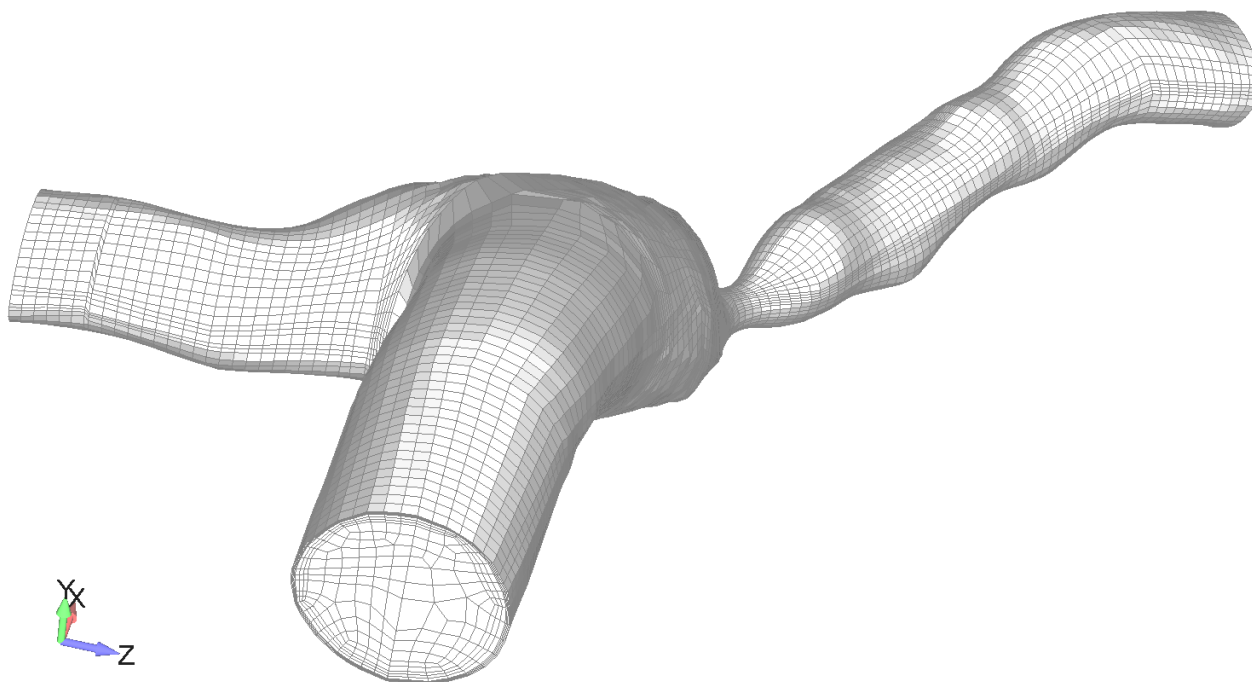
Слика 7.126 Смицајни напон на зиду каротидне бифуркације каротидне бифуркације за корак 124, поглед 2, пацијент 7

Из претходних резултата за смицајне напоне на зиду (слике од 7.119 до 7.126), може се приметити да грана спољашње каротидне артерије има доста мањих стеноза што доводи до већег интензитета смицајног напона на зиду са вредностима у фази систоле од 350Pa док се у фази дијастоле вредност креће око 100Pa. Може се приметити да заједничка грана каротидне артерије близу бифуркације, али дистално на делу до унутрашње каротидне артерије, има врло мале вредности смицајног напона што може довести до нагомилавања штетних материја као што је ЛДЛ холестерол и запаљенских процеса који воде ка атеросклерози.

7.9 Нумеричка симулација турбулентног струјања на примеру коронарне бифуркације са великом стенозом, пацијент 10

Симулација турбулентног струјања крви кроз модел коронарне бифуркације са великом стенозом изведена је на примеру реалне геометрије изабраног пацијента 10. За прорачун је коришћен софтвер *PAK-F*. МКЕ модел флуидног домена је моделиран са 22674 3Д елемената, (Слика 7.127).

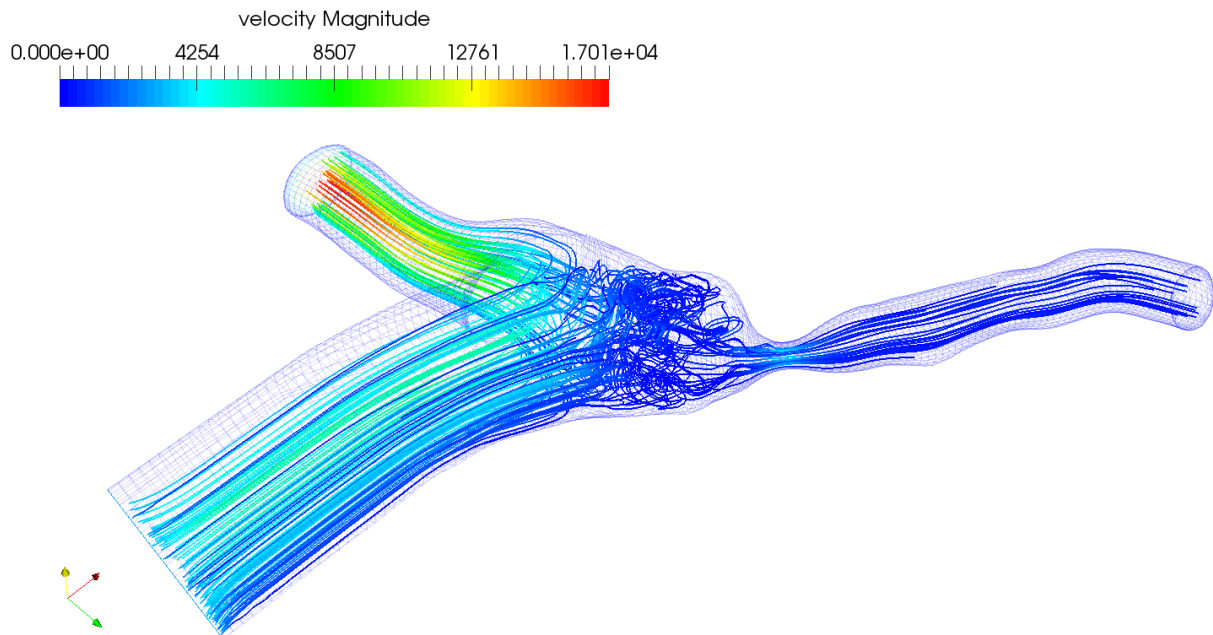
Максимална осредњена улазна брзина струјања крви у коронарној артерији је $v_{sr} = 3000 \text{ mm/s}$. При прорачуну је коришћена фаза једног срчаног циклуса (систола и дијастола) код одраслог човека и у прорачун је унета као временска функција (слика 7.52). Гранични услови за симулацију су исти као и у поглављу 7.2, док су материјалне карактеристике за домен флуида као у табели 7.1. Прорачун је изведен као нестационарно струјање у 200 корака по 0.005s.



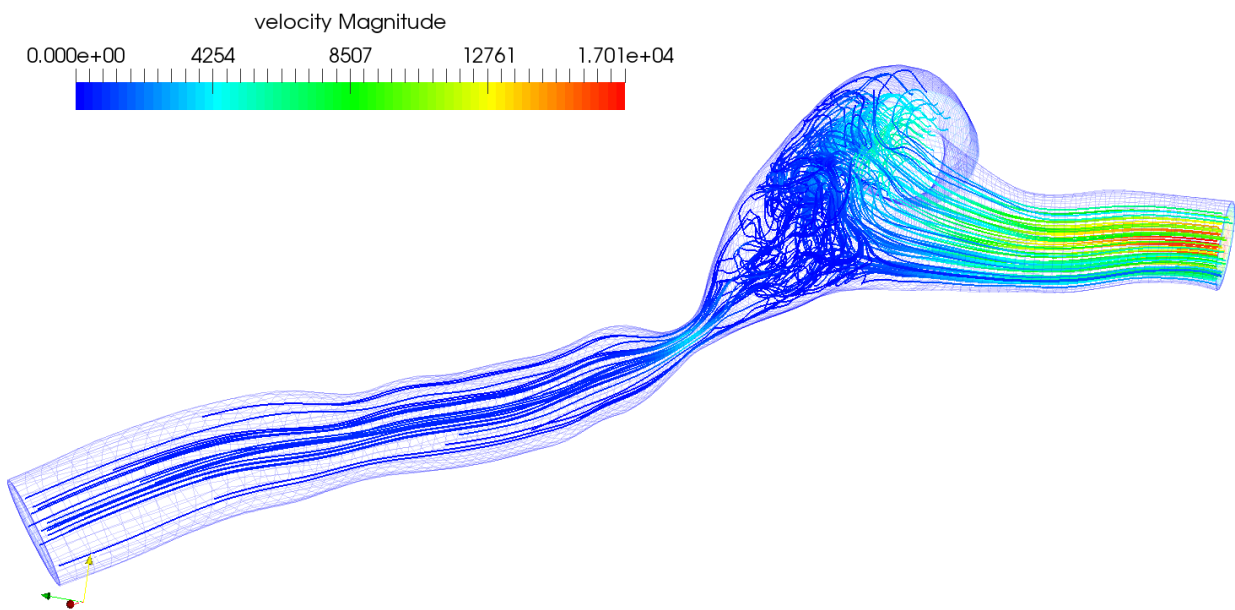
Слика 7.127 Модел коначних елемената бифуркације коронарне артерије, пацијент 10

Поље брзина струјања крви (слике од 7.128 до 7.131), расподела смицајног напона на зиду артерије (слике од 7.132 до 7.135) и расподела притиска (слике 7.136 и 7.137) приказани су у више корака од којих су најзначајнији кораци када имамо максимум систоле (корак 20), док су за фазу дијастоле узете вредности из корака 160. Расподела брзине струјања флуида је приказана преко струјница ради лакшег уочавања проблема који настају при струјању.

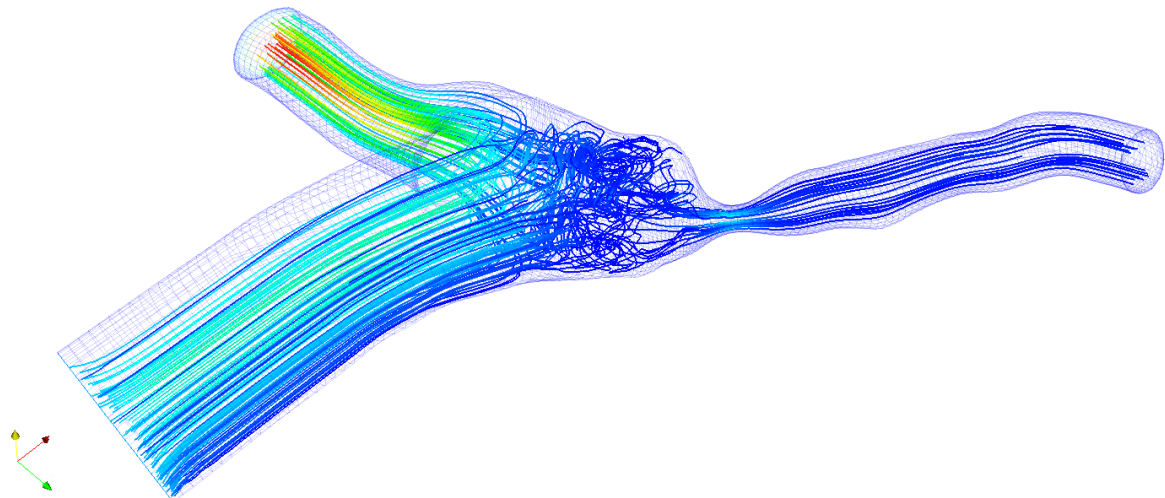
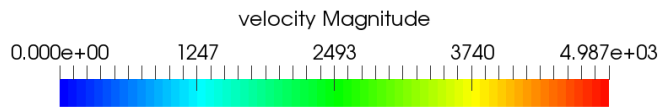
На основу приказаних резултата може се видети да брзина струјања крви у бифуркацији има огроман пад услед велике стенозе која се налази на главној грани десне коронарне бифуркације. Брзина крви на том делу артерије спада испод $v = 1000 \text{ mm/s}$. Резултати смицајног напона на зиду то управо потврђују јер је напон на том делу артерије са вредностима између 800 Pa и 900 Pa . Практично напон је 10 пута већи него на делу где немамо стенозу.



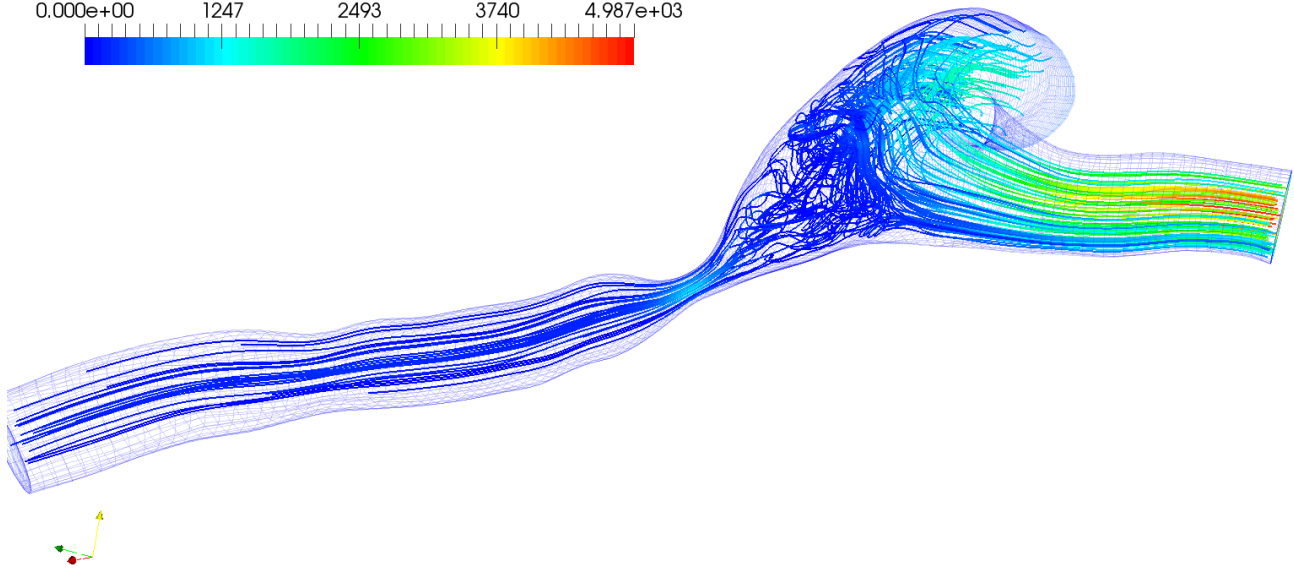
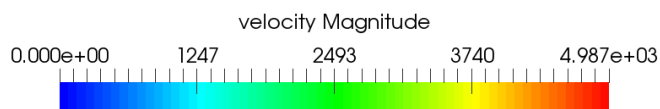
Слика 7.128 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 1



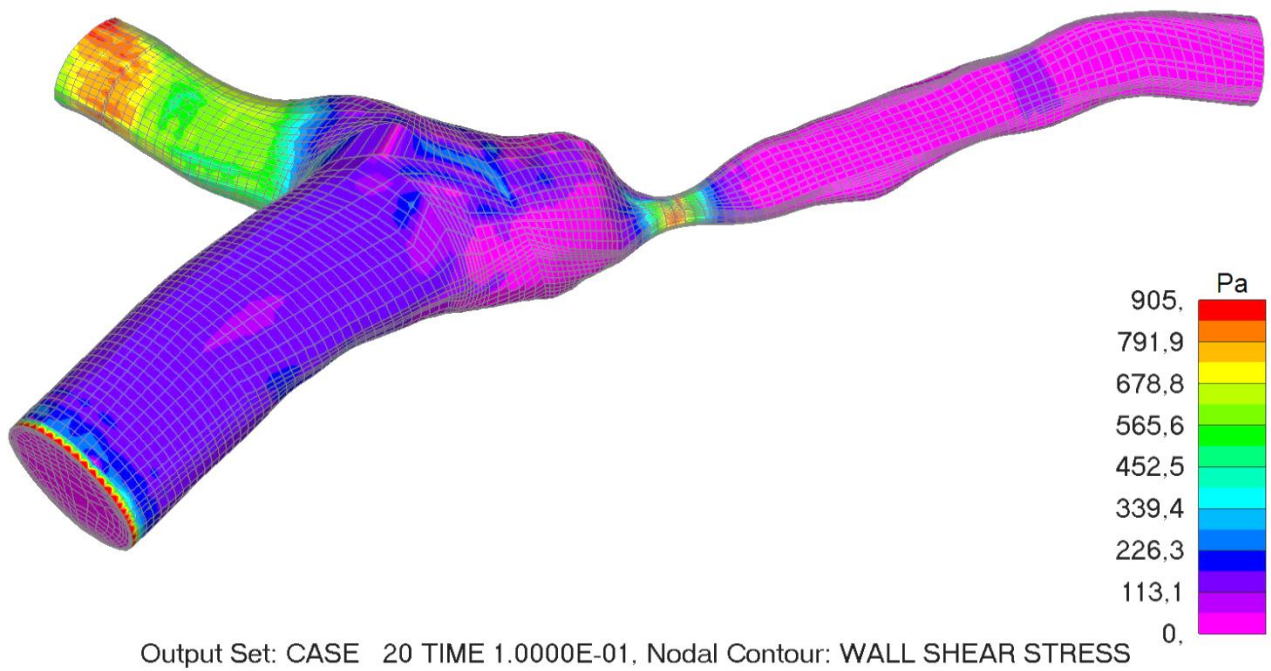
Слика 7.129 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 2



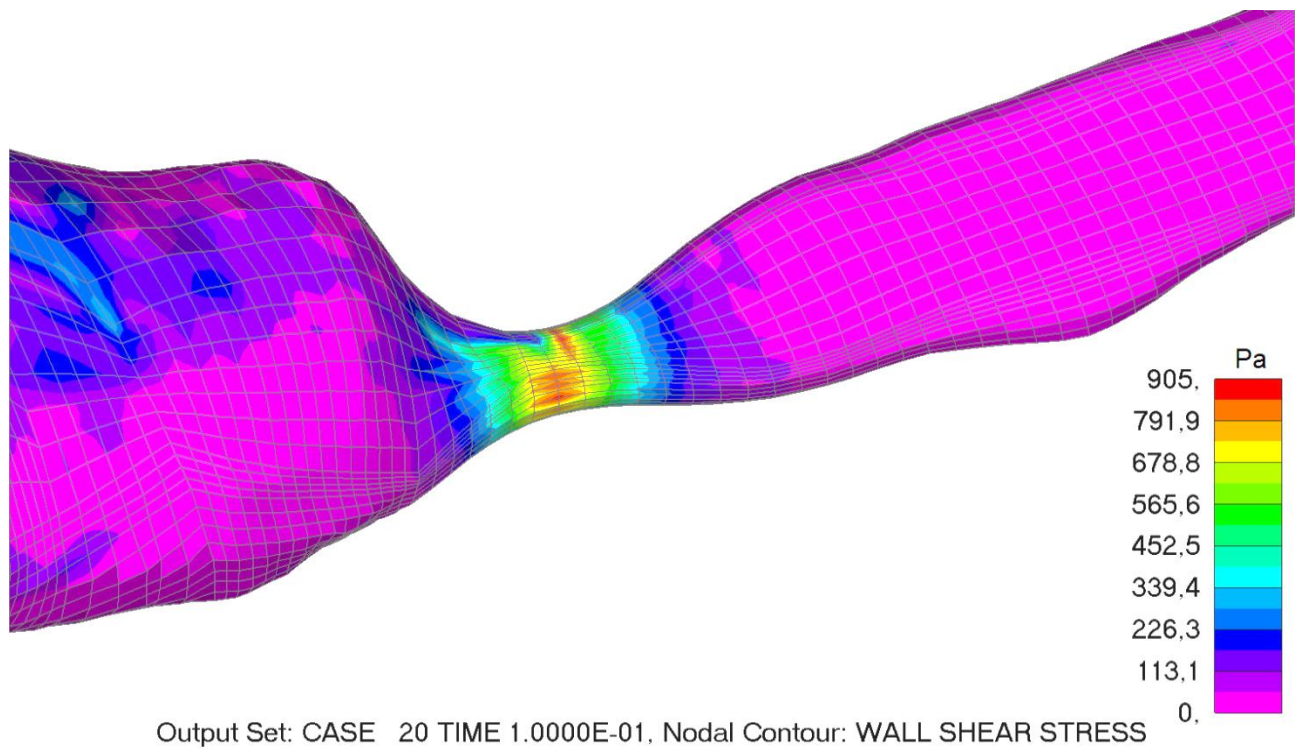
Слика 7.130 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 1



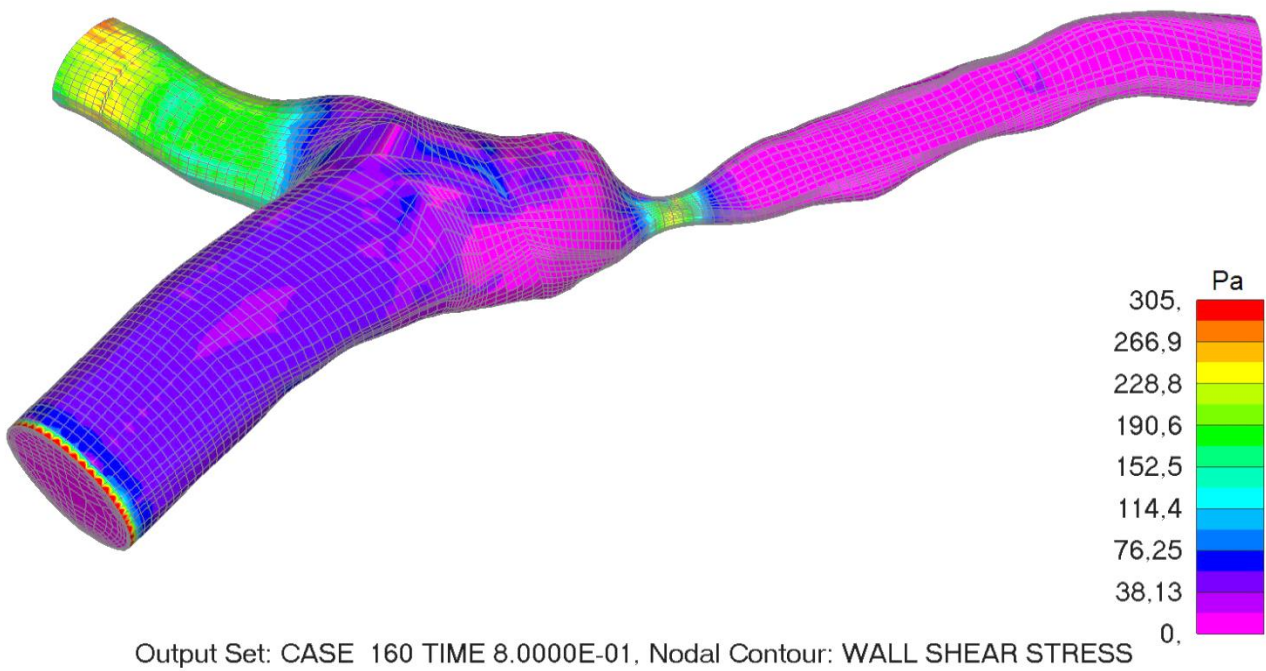
Слика 7.131 Расподела брзине струјања крви у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 2



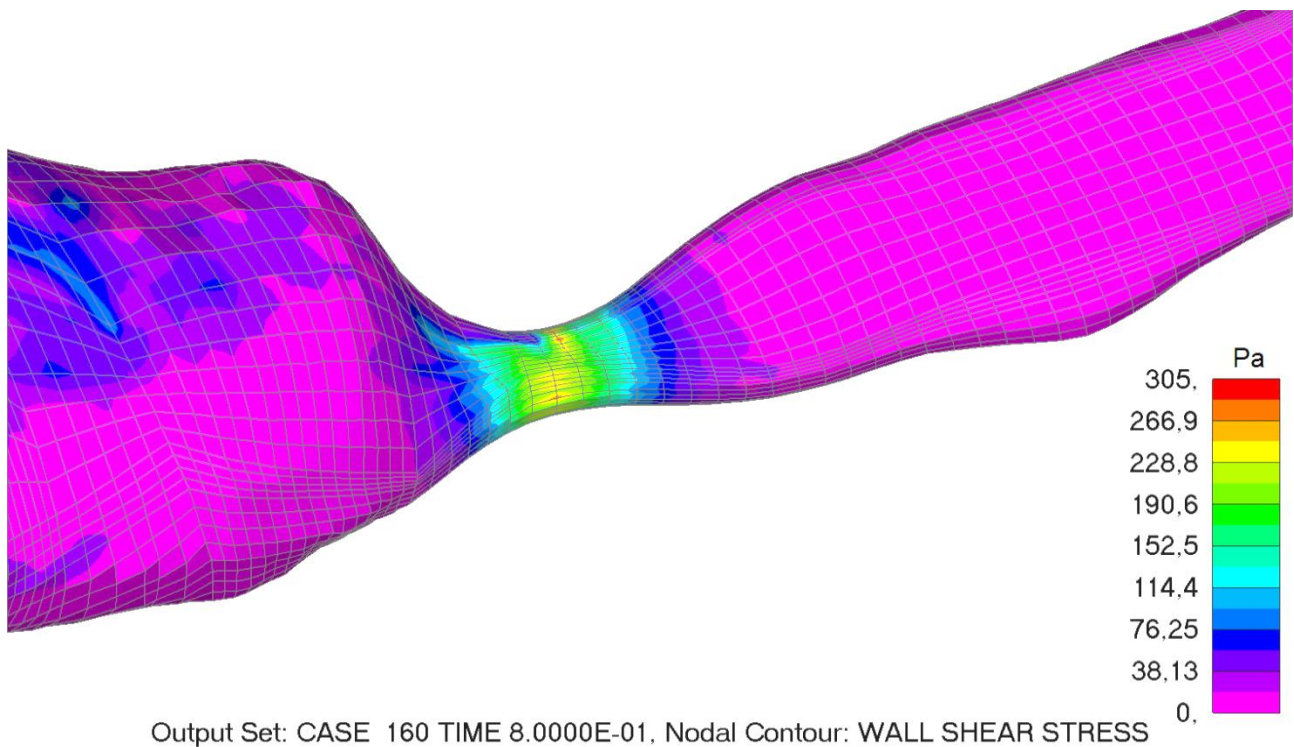
Слика 7.132 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 1



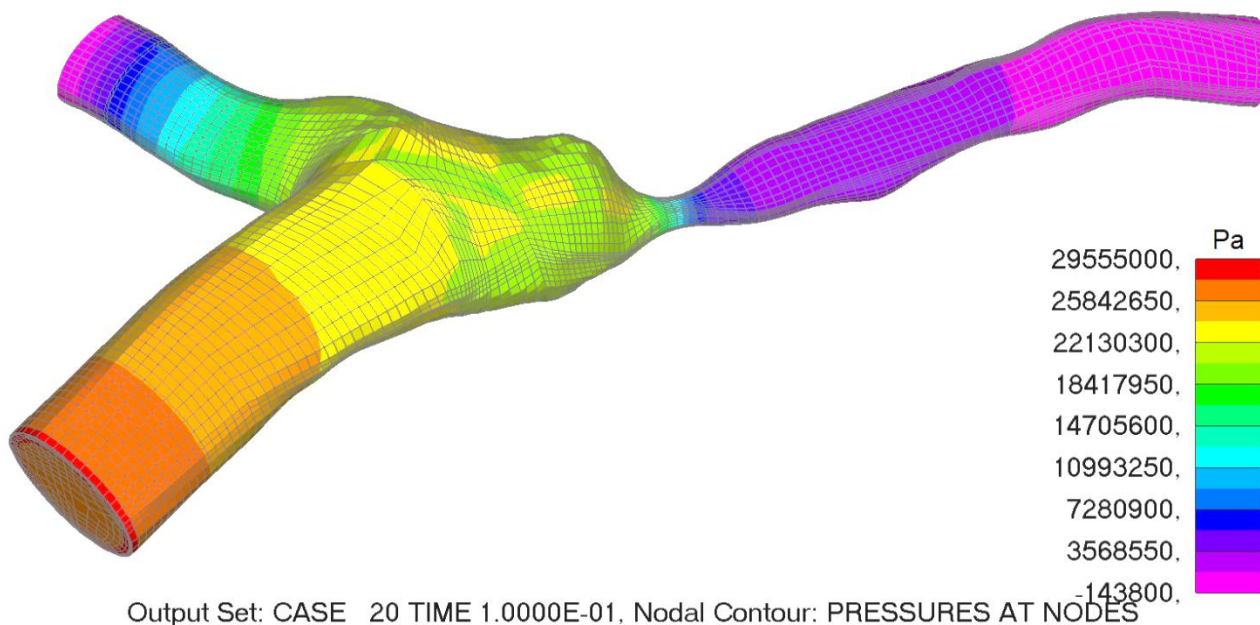
Слика 7.133 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10, поглед 2



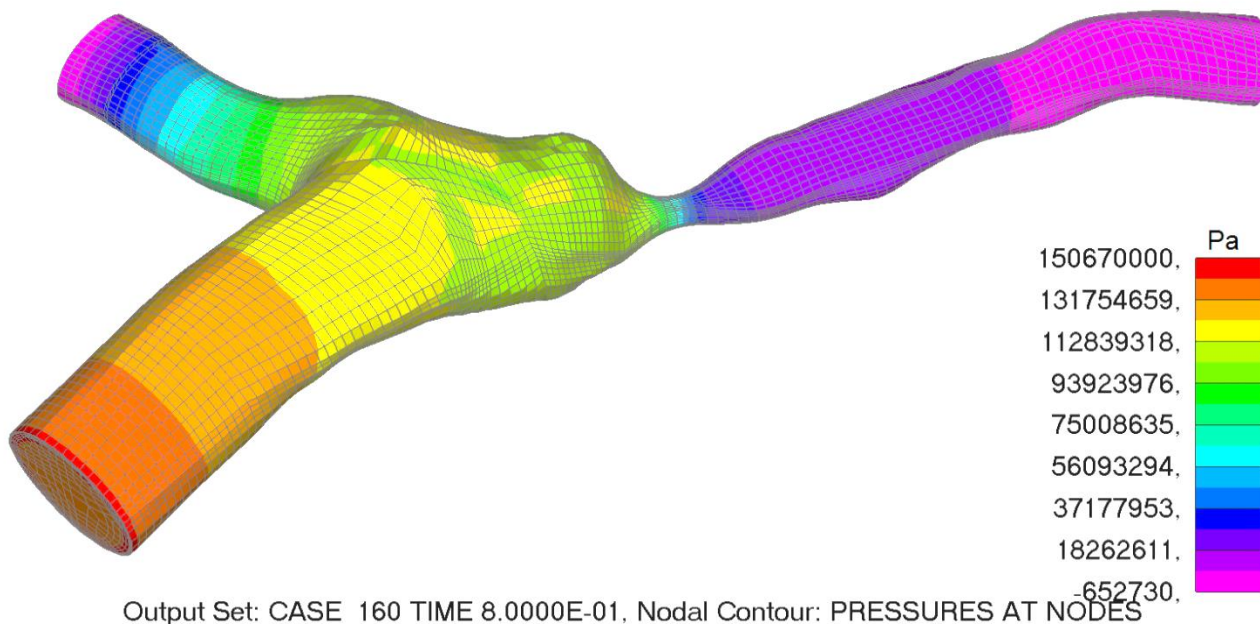
Слика 7.134 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 1



Слика 7.135 Расподела смицајног напона на зиду у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10, поглед 2



Слика 7.136 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 20, пацијент 10



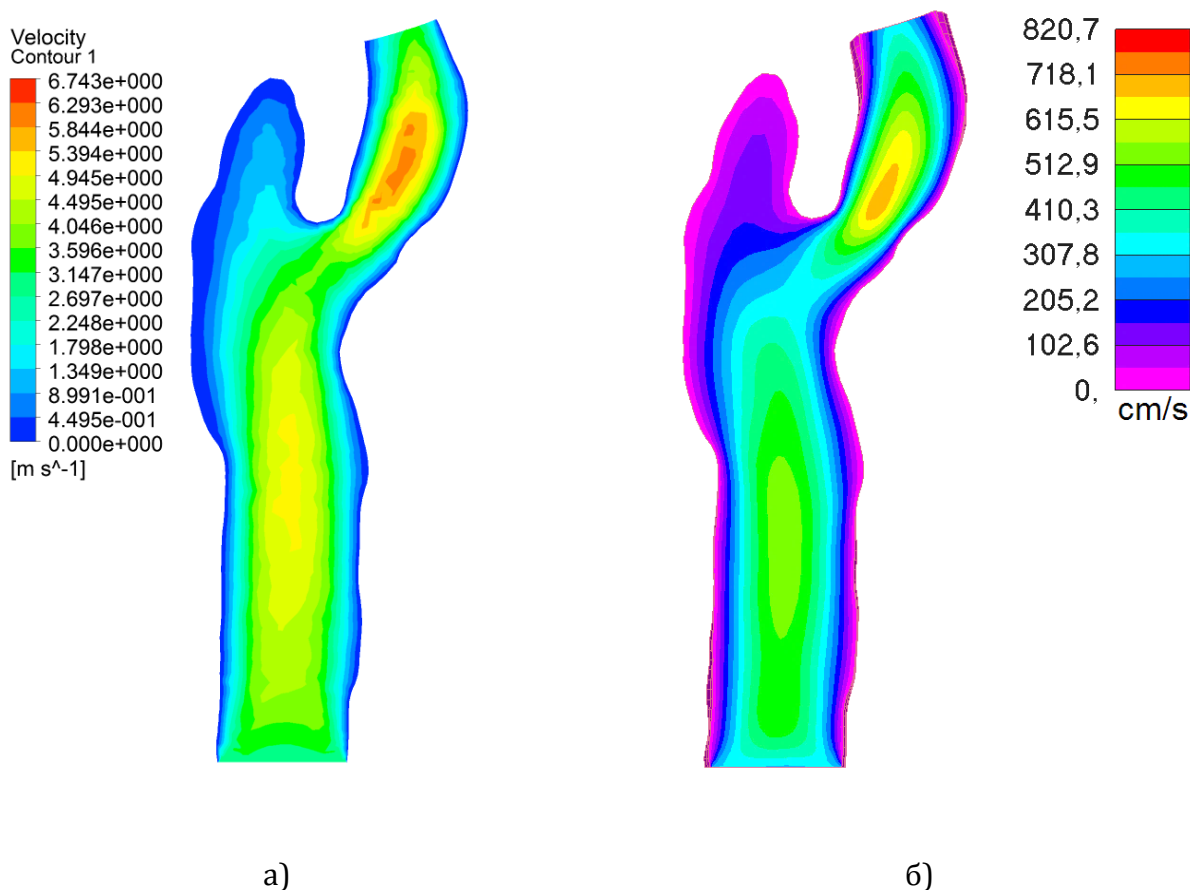
Слика 7.137 Поље пада притиска у коронарној бифуркацији за корак 160, пацијент 10

Ако се упореде ламинарни (слике од 7.74 до 7.77) и турбулентни (слике од 7.128 до 7.131) профил брзине за овај модел бифуркације може се закључити да има смисла моделирати турбулентно струјање у артеријским бифуркацијама јер порастом брзине струјања од 1000% долазе још више до изражаја региони у којима се јавља вртложно струјање које није повољно за пацијента. Смицајни напон на зиду има још већу улогу.

Његова вредност се повећава и до 50% код турбулентног струјања ако се упореде резултати са слике 7.78 и слике 7.132 јер крвни суд треба да издржи велики притисак струјања.

7.10 Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној артерији, пацијент 5

На слици 7.138а приказани су резултати из софтвера *ANSYS Fluent R15.0*, док су на слици 7.138б приказани резултати из софтвера *PAK-F*. Мрежа коначних елемената за софтвер *ANSYS Fluent* је креирана од тетраедарских елемената, док је у софтверу *PAK-F* креирана мултиблок методом, описаном у поглављу 7.1, са правилним хексаедарским елементима. Може се приметити да су прелази између различитих контура доста углађенији у софтверу *PAK-F*, што у суштини даје и тачније резултате. Интензитет брзине у оба случаја ако се упореде исте контуре се разликује за мање од 10% што може да буде последица различитог облика и величине коначних елемената као и софтвера у којима су извршени прорачуни.



Слика 7.138 Поређење нумеричких резултата за турбулентно струјање флуида у каротидној бифуркацији, пацијент 5, а) софтвер *ANSYS Fluent R15.0*, б) софтвер *PAK-F*

8 Закључак

Турбулентно струјање по својој природи доводи до промене количине кретања и до стварања одређених проблема који не постоје код ламинарног струјања флуида. Постоји више приступа за опис турбулентног струјања, а у овом раду изабрани су модели који се заснивају на статистичком моделирању турбуленције.

Развијени су турбулентни модели $k-\omega$ и LES , који су применом метода коначних елемената имплементирани у програм $PAK-F$. Турбулентни модел $k-\omega$ је изабран зато што се може интегралити у целом вискозном подслоју, док је турбулентни модел LES изабран зато што има једноставан приступ за конфигурисање и моделирање применом метода коначних елемената. Код оба модела коришћен је инкрементално-итеративни поступак за решавање нелинеарних равнотежних једначина и рачунање основних физичких величина при струјању флуида, као што су: брзина, притисак, смицајни напон, струјнице.

У првом поглављу приказани су основни циљеви рада као и преглед литературе.

У другом поглављу наведени су основни појмови о турбуленцији и статистичком приступу при моделирању турбуленције. Дато је извођење Рејнолдсових једначина, као и Бусинескова апроксимација која представља везу између Рејнолдсових напона и Навије-Стоксових једначина.

У трећем поглављу су дате једначине турбулентних модела. Приказани су једноједначински модели као што је Спаларт-Алмарас модел, док су од двоједначинских модела приказани $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ турбулентни модели. Оба двоједначинска турбулентна модела имају могућност да се користе при ниским Рејнолдсовим бројевима што је у раду детаљније описано. LES симулација која се заснива на Бусинесковој апроксимацији је описана у поглављу 3.7. Изложен је и концепт зидних функција које се користе при формулацији турбулентних модела.

Нумеричка имплементација турбулентних модела у методу коначних елемената приказана је у четвртном поглављу. Прво су имплементиране Рејнолдсове једначине применом метода коначних елемената, а затим и турбулентни модели $k-\varepsilon$ и $k-\omega$. Описан је детаљно инкрементално-итеративни поступак за турбулентне моделе $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ након чега су изведене једначине програмски имплементиране у софтверски пакет $PAK-F$. Описан је поступак симулације интеракције флуид-структура који је коришћен за прорачун струјања крви на реалном моделу артеријске бифуркације.

Петом поглавље представља симулацију турбулентног струјања на бенчмарк примерима за турбуленцију и струјање флуида услед наглог проширења и преко аеродинамичког профила профила. Бенчмарк пример, струјање флуида услед наглог проширења (*Backward facing step*), је креиран као 2Д проблем. Примена $k-\omega$ и LES турбулентних модела дата је у поглављима 5.1.1, 5.1.2 и 5.1.3. Резултати за брзину струјања услед наглог проширења се релативно добро поклапају са експерименталним подацима

преузетим из литературе као и са софтвером *Ansys Fluent R15.0*. Утицај густине мреже коначних елемената на резултат брзине струјања флуида дат је за пример струјања услед наглог проширења у поглављу 5.2. На основу дијаграма може се видети да са повећавањем густине мреже долази до тачнијих резултата у делу канала изнад степеника, док се у делу испод степеника зона рецикулације смањује са повећањем густине мреже и тежи тачнијем резултату. Упоредном анализом експерименталних и нумеричких резултата утврђено је релативно добро поклапање и максимално одступање од 30% у вредности интензитета вектора брзине. Близу зидова долази до пораста интензитета турбулентног тока што је у складу са повећањем густине мреже.

У поглављу 5.3, где је упоређено ламинарно и турбулентно струјање флуида у цеви кружног попречног пресека са кривином од 90°, спроведене су 3 симулације. У поглављима 5.3.1 и 5.3.2 су дати резултати прорачуна за ламинарно струјање при Рејнолдсовим бројевима 500 и 1093. Експериментални резултати су преузети из литературе и упоређени су са нумеричким вредностима. Разлике у вредностима брзина су мање од 5%. У поглављу 5.3.3 дати су експериментални и нумерички резултати за турбулентно струјање при Рејнолдсовом броју од 43000. Нумерички резултати се разликују од експерименталних максимално до 30% ако се посматра максимална вредност брзине. Контуре нумеричких резултата и изолиније експерименталних резултата имају одређена одступања али тендеција промене је слична.

За струјање флуида преко аеродинамичког профила у поглављу 5.4 упоређени су резултати софтвера *PAK-F* и софтвера *Comsol Multyphysics*. Према приказаним резултатима може се видети да се контуре брзина флуида релативно добро слажу и да се максималне вредности разликују за 2-5%.

Кратак увод у биоинжењеринг и струјање крви кроз артерије приказано је у поглављу 6. Описани су основни појмови у вези кардиоваскуларног система и приказани неки од основних параметара у хемодинамици.

У поглављу 7, које представља симулацију ламинарног и турбулентног струјања крви на реалним моделима артеријске бифуркације са стенозама, описана је методологија за брзо генерисање мреже коначних елемената. У ту сврху коришћен је домаћи софтвер *STL2FEM*, развијен у Лабораторији за инжењерски софтвер на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу. *STL2FEM* на основу волуметријског модела артерије добијеног радиолошким снимањем генерише топологију блокова из којих се генерише мрежа коначних елемената.

Симулација ламинарног струјања крви кроз каротидну бифуркацију одабраног пацијента приказана је у поглављу 7.2. Брзина струјања крви на улазу у каротидну бифуркацију задата је као параболни профил. Материјалне карактеристике за крв су преузете из литературе. Прорачуном у софтверу *PAK-F* добијени су резултати брзине струјања крви, притиска и смицајног напона на зиду артеријске бифуркације. Резултати су дати у одређеним временским корацима који су битни за проучавање хемодинамских карактеристика: врх систоле кад је максимална брзина струјања и фаза дијастоле где је брзина струјања крви мања за 10 пута. На спољашњој грани каротидне бифуркације

може се уочити да смицајни напони имају ниске вредности где је попречни пресек већи а брзина струјања мања. У овим областима постоји велика могућност за настанак и развој плака, а касније и атеросклерозе.

У поглављу 7.3 приказана је флуид-структура интеракција на примеру каротидне бифуркације случајно изабраног пацијента. Солид односно зид артерије у овом примеру је моделиран као еластичан зид са 2Д елементима љуске. Приказани резултати показују да деформација која се јавља при интеракцији између крви и артеријског зида значајно утиче на вредности хемодинамичких сила које делују на артеријски зид, у односу на случај када имамо крути зид. Поређењем са резултатима ранијих истраживања, уочено је да симулације које су обављене са занемаривањем еластичности артеријског зида прецењују максималне вредности напрезања на зиду, као и поље вон Мизесовог напона на артеријском зиду.

У поглављу 7.4 обрађен је пример коронарне бифуркације случајно изабраног пацијента. Исто као у поглављу 7.3 коришћена је флуид-структура интеракција за одређивање флуидних и механичких карактеристика артерије. Временска функција откуцаја срца се за овај пример разликује од примера за каротидну бифуркацију тако да су фаза систоле и дијастоле померене временски. Све наведене симулације изведене су на реалним геометријама које су добијене са *DICOM* снимака пацијената. Резултати симулације показују да су латерални зидови главне гране и латерални зидови дистално од карине изложени врло ниским вредностима смицајног напона, што је предуслов за настајање атеросклерозе. Ови закључци су потврђени ниским вредностима ОСИ индекса на истим местима.

У поглављу 7.5 представљено је струјање у десној коронарној артерији са великом стенозом. На основу приказаних резултата може се видети да брзина струјања крви у бифуркацији има велики пад услед велике стенозе која се налази на главној грани десне коронарне бифуркације. Брзина крви на том делу пада испод $v = 100\text{mm/s}$. Резултати смицајног напона на зиду то потврђују јер је напон на том делу артерије са вредностима између 200Pa и 250Pa , што је 10 пута већи напон него на делу без стенозе. Стеноза у овом обиму угрожава здравље пацијента и потребно је хитна интервенција у виду васкуларног стента како не би дошло до инфаркта срца.

Поглавља 7.7 и 7.8 је представљају симулацију турбулентног струјања флуида у каротидним артеријским бифуркацијама. Коришћени су модели артерија из поглавља 7.2 и 7.3. Да би струјање у поменутих артеријама било турбулентно, повећана је улазна брзина флуида за 10 пута, тако да се добија Рејнолдсов број од 6000. Гранични услови и ограничења су иста као код симулације ламинарног струјања, с тим што су овде коришћене и зидне функције за апроксимацију брзине на зидовима артерије. Коришћен је $k-\omega$ турбулентни модел.

У поглављу 7.9 приказани су резултати прорачуна за модел коронарне артеријске бифуркације са великом стенозом у условима турбулентног струјања. Ако се упореде ламинарни и турбулентни профил брзине за овај модел бифуркације може се закључити да је оправдано моделирати струјање у артеријским бифуркацијама турбулентним

моделом јер порастом брзине струјања долазе до изражаја региони у којима се јавља вртложно струјање, које није повољно за пацијента. Вредност смицајног напона на зиду се повећава и до 50% за случај турбулентног струјања.

Поглавља 7.7 и 7.10 представљају поређење резултата турбулентног струјања између софтвера *PAK-F* и *Ansys Fluent R15.0*. Резултати су дати у пресеку у подужној равни артерије. Примећују се релативно добра поклапања за вредност максималне брзине струјања која се разликују до максимално 20%.

Може се закључити да се симулацијом турбулентног струјања добијају резултати који се у одређеној мери разликују од резултата симулације ламинарног струјања. Та разлика се највише огледа код смицајних напона на зиду артерије. Приказани су и резултати кинетичке енергије турбуленције и специфичне дисипације кинетичке енергије турбуленције. Ове величине доприносе квалитетнијем тумачењу резултата турбулентног струјања поготову у областима у којима је могуће вртложење флуида или благи пораст брзине у односу на ламинарно струјање.

На основу добијених нумеричких резултата може се закључити да приказана методологија представља користан алат који може дати значајне информације кардиолозима. Захваљујући јасној представи о феноменима који се појављују при струјању крви кроз артеријске бифуркације, они могу да донесу одлуку да ли је и у ком тренутку потребна интервенција.

Развијени турбулентни модели су имплементирани у софтверски пакет *PAK-F* и они имају значајну примену како у симулацијама у биоинжењерингу тако и у другим инжењерским симулацијама где постоји турбулентно струјање.

Будућа истраживања могу да иду у правцу бржег креирања финије мреже коначних елемената за турбулентно струјање. Тиме би се добили поузданији резултати за поље брзине и притиска, кинетичке енергије турбуленције и смицајног напона. Развој нових турбулентних модела применом методе коначних елемената, као и повећање брзине прорачуна, могу допринети већој примени развијеног софтвера *PAK-F* у решавању реалних проблема турбулентног струјања у инжењерској пракси, као што је струјање у проточним органима турбинских постројења.

9 Додатак

9.1 Извођење једначина стандардног $k - \varepsilon$ турбулентног модела

Извођење једначина стандардног $k - \varepsilon$ турбулентног модела почиње од Навије-Стоксове једначине (2.2) тако што се сваки члан у једначини множи са вектором брзине v_i , а након тога се одредњи цела једначина [68].

$$\rho \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i} \right) = - \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} v_i} + \mu \overline{v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)} \quad (9.1)$$

Једначина (9.1) након осредњавања добија следећи облик:

$$\rho \left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{v_i v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (9.2)$$

где су примењена следећа правила осредњавања:

$$\begin{aligned} \overline{v_i v_j} &= \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v_i' v_j'} \\ \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \\ \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i + \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} v_i'} \\ \overline{v_i v_j v_k} &= \bar{v}_i \bar{v}_j \bar{v}_k + \overline{v_i' v_j' v_k} + \overline{v_j' v_k' \bar{v}_i} + \overline{v_k' v_i' \bar{v}_j} + \overline{v_i' \bar{v}_j v_k'} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Декомпоновањем једначине (9.1) следи:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \frac{\partial \overline{v_i' v_i'}}{\partial t} \right) + \rho \overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i - \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \left[\overline{v_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)} \right] \quad (9.4)$$

Члан $v_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)$ може да се напише у следећој форми:

$$\overline{v_i \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)} = \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \overline{v_i'}}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \overline{v_j'}}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i \quad (9.5)$$

Једначина (9.2) може да се преведе у следећи облик:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \left(\bar{v}_i \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{v}_i \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) - \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} \quad (9.6)$$

Ако се једначина (9.6) одузме од једначине (9.5) добија се следеће

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i \right) + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i - \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) = \\ & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i \right) + \\ & + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i - \mu \left(\bar{v}_i \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \bar{v}_i \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (9.7)$$

После сређивања и скраћивања истих чланова са обе стране једначине следи:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i - \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i \right) + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} \quad (9.8)$$

Из правила осредњавања следи:

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i - \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i = \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_j + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \bar{v}_j + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_j \bar{v}_i + \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (9.9)$$

Ако се израз (9.9) убади у једначину (9.8) добија се следеће:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_i + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \bar{v}_j + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_i \bar{v}_j + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \bar{v}_j \bar{v}_i + \bar{v}_i \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = \\ & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \bar{v}_i + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_i} \bar{v}_i + \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_j \partial x_i} \bar{v}_i \right) + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Први члан са леве стране у изразу (9.10) може да се прекомпонује на следећи начин:

$$\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_i}{\partial t} \quad (9.11)$$

према правилу:

$$A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + A_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial A_i A_i}{\partial x_j} \quad (9.12)$$

Други члан са леве стране израза (9.10) може да се напише као:

$$\overline{\bar{v}_j v_i \frac{\partial v_i'}{\partial t}} = \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{v_i v_i'} \right) = \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (9.13)$$

при чему се уводи појам **кинетичке енергије турбуленције** као:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_i v_i'} \quad (9.14)$$

Трећи члан на левој страни једначине (9.10) може да се напише у следећем облику:

$$\frac{\partial \overline{v_i' v_j'}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{v_i' v_i'}}{\partial x_j} v_j' = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i' v_i' v_j'} \quad (9.15)$$

Први члан на десној страни једначине (9.10) има следећи облик:

$$-\frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} v_i' = -\frac{\partial \overline{p' v_i'}}{\partial x_i} \quad (9.16)$$

Ако се други члан на десној страни једначине (9.10) напише према правилу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i B_j}{\partial x_k} &= A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_k} + B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \\ A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_k} &= \frac{\partial A_i B_j}{\partial x_k} - B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (9.17)$$

где се искористи да је $A_i = v_i'$ и $B_i = \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}$, добија се:

$$\mu \left(\overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j \partial x_j}} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} v_i'} \right) - \mu \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial v_i' v_i'}{\partial x_j}} \right) - \mu \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \quad (9.18)$$

Последњи члан у једначини (9.18) назива се **дисипација кинетичке енергије турбуленције** и означава се као:

$$\varepsilon = \mu \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \quad (9.19)$$

Једначина (9.18) заједно са изразом (9.19) може да се напише у следећем облику:

$$\mu \left(\overline{v_i' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_j \partial x_j}} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial v_i' v_i'}{\partial x_j}} \right) - \rho \varepsilon \quad (9.20)$$

Једначина (9.10) сада добија следећи облик:

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \overline{v_i v_i}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_i v_i v_j}}{\partial x_j}\right) = -\overline{\rho v_i v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{p v_i}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{v_i v_i}}{\partial x_j} \right) - \rho \varepsilon \quad (9.21)$$

Користећи дефиницију за кинетичку енергију турбуленције (9.14), једначина (9.21) добија следећи облик:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_i v_i v_j} + \overline{v_j p} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{\rho v_i v_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (9.22)$$

Збир чланова на левој страни једначине (9.22) представља материјални извод кинетичке енергије турбуленције k који нам даје промену кинетичке енергије турбуленције у флуидном делићу.

Први члан на десној страни једначине (9.22) представља турбулентни транспорт и посматра се као промена турбулентне енергије при вртложењу флуида.

Други члан на десној страни једначине (9.22) представља дифузију притиска и он је настао услед турбулентног транспорта који настаје између флукуација брзине и притиска.

Трећи члан на десној страни једначине (9.22) је турбулентна дифузија која настаје услед молекуларног транспорта у флуиду.

Четврти члан на десној страни једначине (9.22) представља продукцију кинетичке енергије и интеракцију којом се кинетичка енергија мења у главном току турбуленције. Овај члан се може изразити преко Бусинескове апроксимације на следећи начин:

$$-\overline{\rho v_i v_j} = 2\mu_T \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (9.23)$$

Стандардни начин за апроксимацију прва два члана на десној страни једначине (9.22) је да се уведе следећа хипотеза:

$$\frac{1}{2} \overline{\rho v_i v_i v_j} + \overline{v_j p} = -\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (9.24)$$

где су σ_k турбулентни Прантлов број (*turbulent Prandtl number*) за кинетичку енергију турбуленције, док је μ_T турбулентна динамичка вискозност.

Једначина (9.22) сада може да се напише у следећем облику:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \left[\mu_T \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} - \rho \varepsilon \quad (9.25)$$

Ако се узме у обзир да је флуид нестишљив онда је израз:

$$\frac{2}{3} \delta_{ij} k \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} = \frac{2}{3} k \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} = 0 \quad (9.26)$$

Једначина (9.25) сада добија свој коначни облик:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (9.27)$$

и представља једначину за кинетичку енергију турбуленције k .

На сличан начин се изводи једначина за дисипацију кинетичке енергије турбуленције ε . На основу тога добија се следећа емпиријска једначина:

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{e1} \frac{\varepsilon}{k} \left[\mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} - \rho C_{e2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (9.28)$$

Ако се и овде узме претпоставка (9.26), онда претходна једначина добија коначни облик:

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_{e1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_{e2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (9.29)$$

где је P_k продукција кинетичке енергије турбуленције приказана следећим изразом:

$$P_k = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \quad (9.30)$$

Једначина (9.29) представља коначну једначину за дисипацију кинетичке енергије турбуленције ε . Турбулентни модел $k-\varepsilon$ садржи пет константи које су одређене емпиријски:

$$C_\mu = 0.09, C_{e1} = 1.44, C_{e2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (9.31)$$

Када се турбулентне променљиве k и ε израчунају, турбулентна динамичка вискозност се може израчунати на следећи начин:

$$\mu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (9.32)$$

10 Литература

- [1] J. Boussinesq, „Essai sur la théorie des eaux courantes,” *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 1877.
- [2] J. M. McDonough, *Introductory Lectures on Turbulence, Physics, Mathematics and Modeling*, Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, 2007.
- [3] J. Ferziger i M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed ur., New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [4] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, Inc., 1994.
- [5] P. R. Spalart i S. R. Allmaras, „A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows,” *Recherche Aerospaciale*, br. 1, pp. 5-21, 1994.
- [6] S. R. Allmaras, F. T. Johnson i P. e. R. Spalart, „Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model,” u *Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*, Big Island, Hawaii, 9-13 July 2012.
- [7] A. Crivellini, V. D'Alessandro i F. Bassi, „A Spalart-Allmaras turbulence model implementation in a discontinuous Galerkin solver for incompressible flows,” *Journal of Computational Physics*, t. 241, p. 388-415, 2013.
- [8] D. Launder i B. Spalding, „The Numerical Computation of Turbulent Flows,” *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, t. 3, pp. 269-289, 1974.
- [9] B. Launder i B. Sharma, „Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc,” *Lett Heat Mass Trans*, t. 1, p. 131-7, 1974.
- [10] N. Jovičić, *Modeliranje i simulacija radnih procesa u hidrauličkim turbomašinama*, Monografija ur., Čačak: Legenda, 2006.
- [11] V. Yakhot, S. A. Orszag, S. Thangam, T. B. Gatski i C. G. Speziale, „Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique,” *Physics of Fluids A*, t. 4, br. 7, pp. 1510-1520, 1992.
- [12] A. Mathur i S. He, „Performance and implementation of the Launder-Sharma low-Reynolds number turbulence model,” *Computers & Fluids*, t. 79, p. 134-139, 2013.
- [13] D. Wilcox, „Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models,” *AIAA Journal*, t. 26, br. 11, pp. 1299-1310, 1988.

- [14] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, 3rd edition, La Canada, CA: DCW Industries, Inc., 2006. .
- [15] J. Smagorinsky, „General Circulation Experiments with the Primitive Equations,” *Monthly Weather Review*, t. 91, br. 3, p. 99–164, 1963.
- [16] J. Deardorff, „A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, t. 41, br. 2, p. 453–480, 1970.
- [17] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin i W. Cabot, „A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model,” *Physics of Fluids*, t. 3, br. 7, p. 1760–1765, 1991.
- [18] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković i N. Grujović, *Metod konačnih elemenata I, Linearna analiza*, Kragujevac: Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 1998.
- [19] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, 2nd ed ur., Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [20] M. Kojić, N. Filipović, B. Stojanović i N. Kojić, *Computer Modeling in Bioengineering*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [21] F. Bassi, A. Crivellini, S. Rebay i M. Savini, „Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier–Stokes and k– ω turbulence model equations,” *Computers & Fluids*, t. 34, p. 507–540, 2005.
- [22] R. A. Khurram, Y. Zhang i W. G. Habashi, „Multiscale finite element method applied to the Spalart–Allmaras turbulence model for 3D detached-eddy simulation,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, t. 233–236, p. 180–193, 2012.
- [23] D. Kuzmin, O. Mierka i S. Turek, „On the implementation of the k– ϵ turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretization,” *International Journal of Computing Science and Mathematics*, t. 1, br. 2-4, pp. 193-206, 2007.
- [24] N. Nigro, M. Storti i Z. Angel, „Numerical Aspects Of k– ϵ Turbulence Modeling Using A Finite Element Incompressible Navier-Stokes Formulation,” u *Mecom 2002 - First South-American Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- [25] C. Taylor, C. E. Thomas i K. Morgan, „Modelling Flow Over A Backward-Facing Step Using The F.E.M. And The Two-Equation Model Of Turbulence,” *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, t. 1, pp. 295-304, 1981.
- [26] R. Codina i O. Soto, „Finite Element Implementation Of Two-Equation And Algebraic Stress Turbulence Models For Steady Incompressible Flows,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, br. 30, p. 309–333, 1999.
- [27] T. L. A. A. ., P. Popioleka, „Finite element analysis of laminar and turbulent flows using LES and subgrid-scale models,” *Applied Mathematical Modelling*, t. 30, br. 2, p. 177–199, 2006.

- [28] W. L. Z. Y. Y. G. Wenquan, „Finite Element Analysis of Turbulent Flows Using LES and Dynamic Subgrid-Scale Models in Complex Geometries,” *Mathematical Problems in Engineering*, t. 1, br. 1, pp. 1-20, 2011.
- [29] I. Mustafa, S. Ishtiaque, Y. X. Xu i N. B. Wood, „Turbulence modeling in stenosed carotid arteries using CFD,” *Yanbu Journal of Engineering and Science*, t. 2, pp. 83-90, April 2011.
- [30] G. Leopold, Y. Alexander i E. K. George, „Analyzing Transient Turbulence In A Stenosed Carotid Artery By Proper Orthogonal Decomposition,” *Annals Of Biomedical Engineering*, t. 37, br. 11, p. 2200–2217, November 2009.
- [31] M. Arab-Ghanbari, M. Khani, A. Arefmanesh i F. Tabatabai-Ghomshe, „Analysis of Blood Turbulent Flow in Carotid Artery Including the Effects of Mural Thrombosis Using Finite Element Modeling,” *American Journal of Applied Sciences*, t. 6, br. 2, pp. 337-344, 2009.
- [32] C. R. Kyoung i H. S. Ryou, „Numerical study on turbulent blood flow in a stenosed artery bifurcation under periodic body acceleration using a modified k- ϵ model,” *Korea-Australia Rheology Journal*, t. 22, br. 2, pp. 129-139, June 2010.
- [33] J. Banks i N. W. Bressloff, „Turbulence Modeling in Three-Dimensional Stenosed Arterial Bifurcations,” *Transactions of the ASME*, t. 129, pp. 40-50, February 2007.
- [34] S. S. Varghese i S. H. Frankel, „Numerical Modeling of Pulsatile Turbulent Flow in Stenotic Vessels,” *Journal of Biomechanical Engineering*, t. 125, pp. 445-460, August 2003.
- [35] R. H. Nichols, *Turbulence Models and Their Application to Complex Flows*, University of Alabama at Birmingham, 2005.
- [36] N. Filipović, *Numeričko rešavanje spregnutih problema deformabilnog tela i strujanja fluida*, Doktorska disertacija, Kragujevac: Mašinski fakultet Kragujevac, 1999.
- [37] D. C. Wilcox, „Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models,” *AIAA Journal*, t. 26, br. 11, pp. 1299-1310, 1988.
- [38] R. A. Khurram, Y. Zhang i W. G. Habashi, „Multiscale finite element method applied to the Spalart–Allmaras turbulence model for 3D detached-eddy simulation,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, br. 233–236, p. 180–193, 2012.
- [39] O. Tong, *Verification And Validation Of The Spalart-Allmaras Turbulence Model For Strand Grids*, Master Thesis, Utah State University Logan, Utah, 2013.
- [40] D. K. Lilly, „A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method,” *Physics of Fluids A*, t. 4, br. 3, p. 633–635, 1992.
- [41] M. Milošević, *Numeričko modeliranje difuzije u kompozitnim medijumima*, doktorska disertacija, Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Fakultet inženjerskih nauka, 2012.

- [42] F. Ilinca, J. Hetu i D. Pelletier, „A Unified Finite Element Algorithm For Two-Equation Models Of Turbulence,” *Computers & Fluids*, t. 27, br. 3, pp. 291-310, 1998.
- [43] F. Bassi, A. Ghidoni, A. Perbellini, S. Rebay, A. Crivellini, N. Franchina i M. Savini, „A high-order Discontinuous Galerkin solver for the incompressible RANS and k-w turbulence model equations,” *Computers & Fluids*, t. 98, p. 54-68, 2014.
- [44] F. . B. N. Russo, „Scaling of turbulence intensity for low-speed flow in smooth pipes,” *Flow Meas. Instrum*, t. 52, p. 101-114, 2016.
- [45] D. Rakic, Razvoj i primena materijalnih modela poroznih medija u statičkoj i dinamičkoj analizi nasutih brana, Kragujevac: University of Kragujevac, Faculty of Engineering, 2014.
- [46] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković i N. Grujović, „PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer,” University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac.
- [47] A. Creech, A. Jackson, J. Maddison, J. Percival i T. Bruce, „Efficient Large Eddy Simulation for the Discontinuous Galerkin Method,” *Fluid Dynamics*, t. 1, br. 1, p. 10, 2016.
- [48] S. D. D. M. Jovic, „Backward-facing step measurements at low reynolds number $Re_h=5000$,” *NASA Technical Memorandum 108807*, 1994.
- [49] M. A. . M.M.Enayet., „Laser doppler measurements of Laminar and turbulent flow in Pipe Band,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, t. Volume 3, br. 4, pp. 213-219, December 1982.
- [50] H. S. Badeer, „HEMODYNAMICS FOR MEDICAL STUDENTS,” *Advances in Physiology Education*, t. 25, br. 1, pp. 44-52, 2001.
- [51] L. Sherwood, Human Physiology: From Cells to Systems, Cengage Learning, 2011.
- [52] 2. E. I. A. r. r. Adam Images, „<http://www.adamimages.com/Home>,” [Na mreži].
- [53] S. Chien, „Shear dependence of effective cell volume as a determinant of blood viscosity,” *Science*, t. 168, pp. 977-979, 1970.
- [54] C. Rodkiewicz, P. Sinha i J. Kennedy, „On the application of constitutive equation for whole blood,” *J. Biomech Engrg.*, t. 112, pp. 198-206, 1990.
- [55] K. Perktold, M. Hofer, G. Rappitsch, M. Loew, B. Kuban i M. Friedman, „Validated computation of physiologic flow in realistic coronary artery branch,” *J. Biomechanics*, t. 31, pp. 217-228, 1998.
- [56] K. Perktold, R. Peter, M. Resch i G. Langs, „Pulsatile non-Newtonian blood flow in three-dimensional carotid bifurcation models: a numerical study of flow phenomena under different bifurcation angles,” *J. Biomech. Engrg.*, t. 13, pp. 507-515, 1991a.

- [57] A. M. Encyclopedia, „<http://www.adam.com/>,” Ebix Inc., 2017. [Na mreži].
- [58] S. Milorad Dimic MD, „http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Anatomy_Heart_Latin_Tiesworks.j,” [Na mreži].
- [59] MSD-prirucnici, „<http://www.msd-prirucnici.placebo.hr/msd-za-pacijente/bolesti-srca-i-krvnih-zila/biologija-srca-i-krvnih-zila/simptomi-bolesti-srca>,” [Na mreži].
- [60] M. J. Gimbrone, J. Topper, T. Nagel, K. Anderson i G. Garcia-Cardena, „Endothelial dysfunction, hemodynamic forces, and atherogenesis,” *Ann N Y Acad Sci*, t. 902, pp. 230-9; discussion 9-40, 2000.
- [61] J. Soulis, O. Lampri, D. Fytanidis, D. K. i G. Giannoglou, „Relative Residence Time and Oscillatory Shear Index of Non-Newtonian Flow Models in Aorta,” u *Biomedical Engineering, 10th International Workshop on*, Kos, Greece, 2011.
- [62] Z. S.Z. i e. al., „Inter-individual variations in wall shear stress and mechanical stress distributions at the carotid artery bifurcation of healthy humans,” *Journal of Biomechanics*, t. 35, p. 1367–1377, 2002.
- [63] E. Weydahl i J. Moore, „Dynamic curvature strongly affects wall shear rates in a coronary artery bifurcation model,” *Journal of Biomechanics*, t. 34, br. 9, p. 1189–1196, 2001.
- [64] A. Owida, H. Do i Y. Morsi, „Numerical analysis of coronary artery bypass grafts: An overview,” *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, t. 108, br. 2, p. 689–705, 2012.
- [65] L. Goubergrits, K. Affeld, J. Fernandez-Brittoy i L. Falcon, „Investigation of geometry and atherosclerosis in the human carotid bifurcations,” *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, t. 3, br. 1, pp. 31-48, 2003.
- [66] M. Blagojević, A. Nikolić, M. Živković, G. Stanković i M. Živković, „STL2FEM – Softver za brzo generisanje modela konačnih elemenata krvnih sudova, Uputstvo za korišćenje sa primerima,” Fakultet inženjerskih nauka, Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac, 2012.
- [67] G. N. M. i e. al., „IA-FEMesh: An open-source, interactive, multiblock approach to musculoskeletal finite element model development,” *Computer Methods & Programs in Biomedicine*, t. 94, br. 1, pp. 96-107, 2009.
- [68] E. Furbo, Evaluation of RANS turbulence models for flow problems with significant impact of boundary layers, master thesis, Uppsala: Teknisk-naturvetenskaplig fakultet, 2010.
- [69] J. S. Stroud, S. A. Berger i D. Saloner, „Numerical Analysis of Flow Through a Severely Stenotic Carotid Artery Bifurcation,” *Journal of Biomechanical Engineering*, t. 24, pp. 9-20, February 2002.

- [70] O. Aybay, Implementation Of The Spalart-Allmaras Turbulence Model To A Two-Dimensional Unstructured Navier-Stokes Solver, Master thesis, The Graduate School Of Natural And Applied Science Of Middle East Technical University, December 2004.
- [71] A. Ben Haj Al i A. Soulaïmani, „An unstructured finite elements method for solving the compressible RANS equations and the Spalart-Allmaras turbulence model,“ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 199, p. 2261–2272, 2010.
- [72] T. Soulis, G. Farmakis, G. Giannoglou i G. Louridas, „Wall shear stress in normal left coronary artery tree,“ *Journal of Biomechanics*, t. 39, p. 742–749, 2006.
- [73] T. Taylor i T. Yamaguchi, „Realistic three-dimensional left ventricular ejection determined from,“ *Medical Engineering & Physics*, 1998.