УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ У УЖИЦУ

Ивана Р. Јовановић

ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И РАЗВИЈАЊЕ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА

докторска дисертација

Ужице, 2022. године

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF EDUCATION IN UŽICE

Ivana R. Jovanović

THE INITIAL TEACHING OF MATHEMATICS AND THE DEVELOPMENT OF PUPILS' LOGICAL THINKING

Doctoral Dissertation

Užice, 2022.

Аутор
Име и презиме: Ивана Р. Јовановић
Датум и место рођења: 25. 07. 1983. године, Ваљево
Садашње запослење: Основна школа „Свети Сава“ Попучке, Ваљево
Докторска дисертација
Наслов: Почетна настава математике и развијање логичког мишљења ученика
Број страница: 355
Број слика: 2, графикона 60, табела 104
Број библиографских података: 143
Установа и место где је рад израђен: Педагошки факултет у Ужицу
Научна област (УДК): 371.3
Ментор: Др Ненад Вуловић, ванредни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Факултет педагошких наука у Јагодини, Универзитет у Крагујевцу
Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 14. 10. 2016.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-02-64/11 од 18. 01. 2017. године
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
1. Др Крстивоје Шпијуновић, редовни професор за ужу научну област *Педагогија*, *Дидактика*, *Методике*, Учитељски факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу 2. Др Мирко Дејић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Учитељски факултет у Београду, Универзитет у Београду 3. Др Оливера Марковић, доцент за ужу научну област *Математика*, *Методика наставе математике*, Учитељски факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: 1. 2. 3.
Датум одбране дисертације:

Author
Name and surname: Ivana R. Jovanovic
Date and place of birth: 25. 07. 1983. Valjevo
Current employment: Elementary school „Sveti Sava“ Popučke, Valjevo
Doctoral Dissertation
Title: The initial teaching of mathematics and the development of pupils’ logical thinking
No. of pages: 355
No. of images: 2, charts: 60, tables: 104
No. of bibliographic data: 143
Institution and place of work: Faculty of Education in Užice
Scientific area (UDK): 371.3
Mentor: Dr. Nenad Vulović, Associate professor for the narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Jagodina, University of Kragujevac
Grade and Dissertation Defense
Topic Application Date: 14. 10. 2016.
Decision number and date of acceptance of the doctoral / artistic dissertation topic: IV-02-64/11 of 18. 01. 2017.
Commission for evaluation of the scientific merit of the topic and the eligibility of the candidate:
1. Dr. Krstivoje Špijunović, Full Professor for the narrow scientific field of *Pedagogy, Didactics, Metodology*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac 2. Dr. Mirko Dejić, Full Professor for the narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Teacher Education in Belgrade, University of Belgrad 3. Dr. Olivera Marković, Assistant Professor for the narrow scientific field of *Mathematics, Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac
Commission for evaluation and defense of doctoral / artistic dissertation: 1. 2. 3.
Date of Dissertation Defense:

Овом приликом се захваљујем свима који су ми пружили значајну помоћ и велику подршку у раду.

Захваљујем се ученицима, учитељима, директорима, стручним службама школа које су биле обухваћене истраживањем.

Посебну захвалност дугујем ментору, проф. др Ненаду Вуловићу за сву стручну помоћ и савете при изради докторске дисертације, на издвојеном времену, стрпљењу и труду.

Захваљујем се члановима Комисије за све сугестије и савете којима су допринели квалитету дисертације. Захвалност упућујем и проф. др Крстивоју Шпијуновићу, проф. др Мирку Дејићу и проф. др Сањи Маричић који су саветима и сугестијама дали полазне идеје и значајан допринос дисертацији.

Велику захвалност дугујем члановима породице на подршци, разумевању и вери.

Ивана Јовановић

У Ужицу, августа 2022.

Ивана Јовановић

ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И РАЗВИЈАЊЕ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА

Резиме

Предмет рада је истраживање ефеката примене одговарајућих математичких задатака на развијање логичког мишљења ученика. У теоријском делу рада створен је концептуални оквир за теоријска полазишта у разматрању логичког мишљења. Извршена је операционализација логичког мишљења уз уважавање узраста ученика и њихових развојних карактеристика и у складу са специфичностима садржаја почетне наставе математике. Логичко мишљење ученика у почетној настави математике дефинисано је преко способности: *способности разумевања значења и коришћења појмова (и, или, не), способности уочавања узрочно-последичних веза, способности откривања законитости и правила* и *способности уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку*. Сагледани су проблеми и могућности подстицања и развијања логичког мишљења ученика.

Емпиријски део рада усмерен је на: 1) експериментално испитивање утицаја примене одговарајућих математичких задатака на подстицање и развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, 2) испитивање интересовања ученика експерименталне групе за учење математике након примене експерименталног програма, 3) испитивање мишљења и ставова учитеља о могућностима подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Резултати су показали да се одговарајућим математичким задацима може успешно утицати на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, да су ученици експерименталне групе, након реализације експерименталног програма, веома заинтересовани за математику као наставни предмет и да почетна настава математике, према мишљењима учитеља, пружа добре могућности за подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

Кључне речи: почетна настава математике, логичко мишљење, математичке способности, ученик, математички задатак

Ivana Jovanović

THE INITIAL TEACHING OF MATHEMATICS AND THE DEVELOPMENT OF PUPILS' LOGICAL THINKING

Abstract

The subject of the paper is the investigation of the effects of applying appropriate mathematical tasks on the development of students' logical thinking. In the theoretical part of the work, a conceptual framework was created for theoretical starting points in the consideration of logical thinking. The operationalization of logical thinking was carried out, taking into account the age of the students and their developmental characteristics, and in accordance with the specifics of the content of initial mathematics lessons. The logical thinking of students in initial mathematics classes is defined by the following abilities: *the ability to understand the meaning and use of terms (and, or, not), the ability to perceive cause-and-effect relationships, the ability to discover laws and rules, and the ability to perceive remote (hidden) elements in the task*. The problems and possibilities of encouraging and developing students' logical thinking are considered.

The empirical part of the work is focused on: 1) experimental examination of the impact of the application of appropriate mathematical tasks on encouraging and developing students' logical thinking in initial mathematics classes, 2) examination of the interest of students in the experimental group in learning mathematics after the application of the experimental program; 3) examination of teachers' opinions and attitudes about the possibilities of encouraging and developing students' logical thinking in initial mathematics classes.

The results proved that appropriate mathematical tasks can successfully influence the development of students' logical thinking in elementary mathematics lessons. Furthermore, the students of the experimental group are very interested in mathematics after the implementation of the experimental program. The research has also snown that, according to the teachers' opinions, elementary mathematics education provides good opportunities for encouraging and developing students' logical thinking.

Key words: initial teaching of mathematics, logical thinking, mathematical abilities, student, mathematical task

САДРЖАЈ

УВОД

Са развојем друштва и науке повећавају се и очекивања од школе, односно од ученика, како би и школа и ученици, будући представници једне земље, одговорили савременим друштвеним и научним токовима. Пред школу се поставља задатак да организацијом рада и различитим активностима позитивно утиче на развијање мишљења ученика, да негује и подстиче њихову самосталност и свестрани развој појединца. Све више се са традиционалног усвајања велике количине информација, односно знања великог броја чињеница, прелази на активну улогу ученика у процесу стицања знања. Све више се инсистира на томе да у процесу стицања знања ученици буду интелектуално, односно умно активни, јер интелектуална активност доводи до развијања мишљења. Акценат се ставља на стицање знања која су применљива у пракси. На тај начин ученици се од првих дана школовања припремају за одговорну и активну улогу у друштву. Са друштвено-техничким и научним сазнањима која свакодневно расту, појединци ће бити стално у ситуацији да се сналазе у бројним проблемима које намеће живот, а успешност сналажења у тим животним проблемима зависиће од оспособљености појединаца за њихово решавање. Велики број информација, тзв. енциклопедијско или репродуктивно знање, у тим ситуацијама, неће бити од велике користи. Стога је важно оспособити ученике да се служе информацијама, да се служе својим знањем, као и да буду оспособљени за самостално расуђивање и самостално долажење до информација (нових знања). Важно је, већ у најранијем узрасту, научити ученике да мисле, научити их да уче и оспособити их за аутономно сазнавање, самоиницијативно стицање нових и проширивање постојећих знања, за коришћење знања у пракси и примену у новим раније недоживљеним приликама.

Све већи значај се придаје подстицању и развијању мишљења ученика у процесу стицања знања (*Правилник о програму наставе и учења*, 2017, 2018, 2019). Инсистира се на важности и значају подстицања и развијања мишљења ученика у процесу учења и развој мишљења ученика истиче се као важан циљ савремене школе, али је мало литературе која указује на начине остваривања тог циља у пракси, па тако он остаје нешто чему се тежи.

Када говоримо о настави математике у млађим разредима основне школе, један од важних задатака јесте развијање мишљења ученика и то подстицање и развијање стваралачког, критичког, логичког и апстрактног мишљења (*Правилник о наставном плану и програму*, 2004, 2005, 2006, 2008, 2010, 2011). Новим *Правилницима о програму наставе и учења* (2017, 2018, 2019) наведени задатак није јасно истакнут, али циљ наставе математике, који се у њима истиче, могуће је остварити само уколико у целокупном математичком образовању подстичемо и развијамо математичко мишљење. У времену брзих промена и развоја, важност подстицања и развијања наведених компоненти математичког мишљења је разумљива. Како је логичко мишљење у почетној настави математике теоријски мало расветљено питање, а детаљних истраживања о могућностима његовог подстицања, унапређења и развијања, конкретно, у настави математике у првим разредима основне школе, готово да нема, намеће се потреба његовог расветљавања. Стога смо се определили за бављење тим проблемом – *могућностима подстицања и могућностима развијања логичког мишљења ученика млађих разреда*. Желели смо, пре свега, теоријски расветлити појам логичког мишљења, операционализовати појам логичког мишљења примерено узрасту ученика и специфичностима математичких садржаја у прва четири разреда основне школе, као и размотрити начине његовог подстицања, унапређивања и развијања у почетној настави математике.

Из побројаних разлога, рад се састоји од теоријског и емпиријског дела, односно теоријско-емпиријског је карактера. У теоријском делу рада разматрана су важна питања везана за почетну наставу математике, затим се теоријски разматра логичко мишљење ученика као задатак почетне наставе математике, а посебно различити начини утицања на развијање и унапређивање логичког мишљења ученика, као и фактори који могу допринети подстицању логичког мишљења ученика, али и неповољни фактори који спутавају утицај почетне наставе математике на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Узимајући у обзир узраст ученика и специфичности психичког развоја деце млађег школског узраста, покушали смо, сходно тим специфичностима, извршити операционализацију логичког мишљења. У раду се логичком мишљењу прилази као сложеном феномену и посебно се разматрају: логичке операције (конјункција, дисјункција, негација, импликација, еквиваленција, као и способност схватања значења и коришћења појмова *и, или, не* на нивоу примене логичких операција у процесу решавања различитих математичких задатака), мисаони поступци (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, конкретизација, специјализација), као и способности закључивања у почетној настави математике (закључивање индукцијом и дедукцијом, аналогија), интуицијско наслућивање решења, способност успостављања узрочне повезаности елемената и откривања последичних веза на основу којих се изводе закључци, способност уочавања принципа, правила и законитости који владају међу елементима и на основу којих се врши закључивање, способност откривања прикривених елемената у задатку, који нису одмах уочљиви, тј. способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу. На основу проучене литературе и анализирања наставне праксе, покушали смо направити и листу позитивних фактора који утичу на развој логичког мишљења, као и фактора који негативно утичу, а тиме спутавају испољавање логичког мишљења ученика. На тај начин смо желели расветлити нека питања од значаја за сам појам логичког мишљења, његово дефинисање и прецизно одређење у контексту почетне наставе математике, као и за могућности његовог подстицања и развијања у почетној настави математике.

У емпиријском делу рада базирамо се на експериментално испитивање утицаја примене одговарајућих математичких задатака на унапређивање и развијање, а самим тим и подизање квалитета логичког мишљења ученика у првим разредима математичког образовања. Желели смо утврдити да ли се може осмишљеним математичким задацима утицати на квалитет логичког мишљења ученика млађег школског узраста. Такође, желели смо испитати и мишљење ученика о експерименталном програму и њихову заинтересованост за учење математике, као и мишљења учитеља о овом проблему.

Уколико се докаже да се одговарајућим задацима у настави математике може утицати на подстицање и развијање различитих способности логичког мишљења, то ће бити од велике користи свим практичарима који желе да остваре један од важнијих задатака у настави математике – *развијање логичког мишљења*. Тиме ће, не само утицати на развој логичког мишљења ученика, него имати и низ других позитивних ефеката у настави: ствараће свестране креативне личности које ће у свему тражити логично решење сваког животног проблема, као и мотивисати ученике и стварати осећај задовољства у самој активности учења.

Очекујемо да ће резултати рада дати скроман допринос разјашњавању и сагледавању појма логичког мишљења ученика у оквиру наставе математике у млађим разредима, као и да ће дати потенцијалне одговоре на питања везана за могућности његовог подстицања и развијања у почетној настави математике. Значај расветљавања бројних питања која се односе на развијање мишљења ученика је велики, али је још важније да се, бар на нека од њих, одговори, а да не остану само идеали о којима се прича и којима се тежи. Стога се надамо да ће овај рад бити подстрек и другим истраживачима да одговоре на многа питања на која ми нисмо дали одговор. Сазнања до којих дођемо биће од користи и практичарима, који ће, уколико покажемо да се одговарајућим математичким задацима може подстицати логичко мишљење ученика у настави математике, то осмишљено и чинити.

I ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ

1. ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

Математика, то је вештина назвати разне
ствари истим именом.
Поенкаре

Почетна настава математике подразумева наставу математике у прва четири разреда основне школе. На овом узрасту дете се први пут среће са систематизованим и планским стицањем математичких знања. Због тога је важан читав низ елемената који ће допринети квалитету тих знања. То су, пре свега, специфичности узраста ученика, као и специфичности математичких садржаја. Почетна настава математике мора уважавати све наведене специфичности, међу којима се у први план истичу:

- апстрактност математичких појмова и садржаја,
- језик симбола, који се у математици користи,
- математичка прецизност и тачност,
- неопходност развијености логичко-математичких структура, специфичних способности за учење и разумевање математичких садржаја,
- математичко мишљење,
- висок ниво активности ученика при усвајању математичких садржаја,
- неопходан континуитет, поступност и систематичност у усвајању садржаја,
- јасност, прецизност, тачност, креативност и критичност у мишљењу, изражавању и закључивању (Malinović, Malinović Jovanović, 2002; Шпијуновић, Маричић, 2016).

Почетна настава математике, због узраста ученика, је по много чему специфична, а превасходно мислимо на апстрактност математичких појмова и математичких садржаја које треба дидактички и методички обликовати и прилагодити узрасту ученика, односно њиховим развојним карактеристикама. „Програмске садржаје наставе математике у млађим разредима основне школе, за разлику од садржаја осталих наставних предмета, карактерише *апстрактност* и *хијерархијско-логички распоред*“ (Пикула, Милинковић, 2015: 19). Апстрактност математичких садржаја полази од чињенице да су сви математички појмови замишљени и одвојени од материјалних предмета. Учитељ у наставном процесу има тежак задатак да те апстрактне појмове математичке науке (скуп, број, тачка, права, раван, фигура и друге) методички трансформише у форму која ће бити примерена узрасту ученика и тиме разумљива и погодна за усвајање знања.

С друге стране, имамо још једну важну специфичност почетне наставе математике, а то је неопходна развијеност логичко-математичких структура. Логичко-математичке структуре се најчешће дефинишу као менталне шеме које су на правилан начин изграђене, јасно и прецизно структуиране, тако да у већ изграђен систем могу да приме нову информацију (Шпијуновић, Маричић, 2016). Стога, учитељ мора познавати когнитивне структуре ученика и карактеристике појединих стадијума развоја ученика како би на правилан начин презентовао нове информације. Управо, ове две специфичности почетне наставе математике представљају кључну карику у реализацији почетне наставе математике. Са једне стране су ученици са својим, у одређеном степену развијеним, логичко-математичким структурама, а са друге математички садржаји који су по својој природи апстрактни. Спајањем ових специфичности, у смислу да ученици имају развијене потребне логичко-математичке структуре да приме и схвате апстрактне математичке појмове, учитељ реализује почетну наставу математике. Тај задатак није нимало лак и захтева од учитеља добро познавање ученика и њихових специфичних логичко-математичких структура и прилагођавање апстрактних математичких садржаја нивоу развијености тих структура.

Поред наведених елемената који су од значаја за усвајање математичких знања, у почетној настави математике важан је и начин усвајања садржаја, континуитет и поступност. Важно је да се математичка знања стичу по принципу „концетричних кругова" и да стечена знања представљају добру основу за даље стицање математичких знања (Malinović, Malinović Jovanović, 2002; Дејић, Егерић, 2003; Шпијуновић, Маричић, 2016). Такође, важно је нагласити да се приликом реализације, настава математике мора заснивати на законитостима, принципима и правилима и да се не сме нарушити научност математике као науке. То исто важи и за почетну наставу математике, што додатно отежава њену реализацију. Са једне стране, ученици су као примаоци математичких знања, а са друге стране, настава математике која мора задржати своју научност и у исто време бити примерена узрасту ученика.

Што се тиче учесника у процесу стицања математичких знања, у почетној настави математике у први план се истиче ученик са свим својим узрасним и развојним специфичностима које се при организацији наставе математике у првим разредима, а и касније, морају узети у обзир. Читава организација и реализација почетне наставе математике мора се темељити на тим специфичностима и карактеристикама ученика. Са друге стране, важан учесник наставног процеса јесте и учитељ који све наведене елементе, који су од значаја за квалитетно стицање математичких знања, мора довести у једну квалитетну везу и на тај начин организовати и реализовати почетну наставу математике тако да она даје добре резултате и прави добар „темељ" за даље математичко образовање ученика.

Из свега реченог следи да је почетна настава математике уско повезана са дидактиком, психологијом, логиком, социологијом и другим наукама и научним дисциплинама. Како се у раду посебно бавимо логичким мишљењем ученика, неопходно је указати на везу почетне наставе математике са логиком. Важно је истаћи да је „стицање математичких знања и операсање њима скоро немогуће замислити без познавања и коришћења елемената логичког мишљења" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 17–18). Елементи математичке логике и логичког мишљења се користе у почетној настави математике при употреби речи „и", „или", „ако...тада", „истинит", „лажан". Наведени термини се користе у почетној настави математике и веома је важно да учитељ исправно користи наведене речи, а то је могуће само познавањем основа математичке логике (Дејић, Егерић, 2003: 28). То указује на значај појединих елемената логичког мишљења за стварање добре основе која је од пресудног значаја за целокупно математичко образовање.

Свим специфичностима, о којима је било речи, као и факторима стицања математичких знања и учесницима тог процеса бави се методика почетне наставе математике, доводећи их у везу и чинећи на тај начин наставу математике квалитетнијом и ефикаснијом.

1.1. Математика као наставни предмет

Једно од важних питања значајних за реализацију почетне наставе математике јесте и схватање математике као наставног предмета. Математика спада у обавезне општеобразовне наставне предмете чији недељни фонд у млађим разредима износи пет часова.

Математика као наставни предмет „представља спону између ученика и математике као науке" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 46). Та спона представља трансформацију математичких садржаја тако да су примерени узрасту ученика, а сачували своју научност. Сам процес одабирања садржаја према унапред постављеним циљевима и задацима и њихово подешавање за преношење ученицима, назива се *методичка трансформација*. И управо таквом методичком трансформацијом математичких знања, настао је наставни предмет *математика*. Уочљиве су бројне разлике и сличности које постоје између математике као науке и наставног предмета *математика*. Сличност се огледа у процесу долажења до нових математичких знања и процесу усвајања откривених знања са гледишта субјекта који у њему учествује. Када ученик у процесу усвајања знања открива за себе нешто ново, а што је у математици већ давно откривено, он поступа као научник, користи исте мисаоне операције, исте мисаоне поступке и расуђује као проналазач који открива нешто ново што до тада није познато. У наведеној сличности се крије суштина и значај математике као наставног предмета, тј. основна вредност наставе математике, а то је развијање математичког мишљења као најважније стваралачке способности ученика (Радојевић, Радојевић, 1984: 34).

Настава математике, односно математика као наставни предмет, се дефинише као наставни процес у којем се образовање и васпитање остварују помоћу математичких садржаја. Математика као наставни предмет користи садржаје математике као науке с једне стране, а са друге, користи сазнања дидактике. Садржаји математике као науке се дидактички обликују, при чему се не сме нарушити њихова научност, али се, истовремено, прилагођавају узрасним карактеристикама ученика. „Док математика као наука има за циљ да открије и утврди нове чињенице и законитости у области математике, дотле математика као наставни предмет има за циљ да саопшти одређена математичка знања" (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 5). Још прецизније однос математике као науке са наставним предметом *математика* се дефинише преко трансформације математичких знања у математичке садржаје. „Од целокупног математичког знања бира се само један мали фонд који се трансформише у облик погодан за преношење ученицима. Одабирањем математичких садржаја и њиховом трансформацијом у облик погодан за усвајање од стране ученика настаје наставни предмет Математика. Важно је да одабрани садржаји буду основа за остваривање исхода образовања" (Дејић, Егерић, 2003: 12; Дејић, Михајловић, 2015: 75).

Математика као предмет који се изучава у школи „активира логичко мишљење код ученика и тиме доприноси развоју њихових компетенција и на тај начин их оспособљава за одређене животне позиве и бирање будућих занимања" (Петровић, 2015: 45). Као наставни предмет, она одговарајућим и трансформисаним математичким садржајима математички образује ученике и прави основу даљем математичком образовању.

1.2. Циљ и исходи почетне наставе математике

У литератури налазимо поделу циљева наставе математике на две групе: опште и посебне циљеве. Као посебна врста су издвојени специфични циљеви наставе математике који произилазе из специфичности математике као науке. У њих се убрајају следећи циљеви: „1. усвајање општих начина научног мишљења, који се широко примењује у математици, 2. развој математичког мишљења и математичких способности, 3. развој геометријске интуиције, просторног опажања, 4. формирање логичког мишљења, 5. разумевање естетске стране математике, њене лепоте, развијање интереса и љубави према њој, 6. васпитање воље, љубави према раду, упорности у достизању циља итд.“ (Матељски, према: Дејић, 2009: 450). Као што се из наведених речи види, посебно место припада развијању математичког мишљења и математичких способности, а посебно се истиче и логичко мишљење.

У Правилнику о програму наставе и учења за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања „циљ учења предмета *математика* је да ученик, овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основе апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за даљи развој математичких појмова“ (2017: 25; 2018: 72; 2019: 34; 2019: 39). Овим *Правилницима* нису дефинисани задаци наставе математике, већ се први пут уводе исходи за крај првог, другог, трећег и четвртог разреда. Део који се односи на примену стечених знања у решавању проблема, индиректно, упућује на потребу подстицања и развијања логичког мишљења, јер да би решавао проблеме ученик мора логички мислити и расуђивати.

Ранијем циљу и задацима наставе математике у млађим разредима основне школе замерало се на претераној усмерености ка материјалној компоненти, као и на уопштености у њиховом формулисању, што је доводило до бројних проблема у њиховом остваривању (Шпијуновић, Маричић, 2016). Тако формулисани често су остајали нејасни и учитељима, па је њихова оствареност била лошија. Пре свега мислимо на задатак наставе математике који се односио на развијање математичког мишљења, тј. на задатак *да развија учениkову способност посматрања, опажања и логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења*, при чему ниједна врста мишљења није појмовно јасно одређена. Како одређене врсте мишљења нису биле јасно одређене, учитељ у настави није имао јасну представу шта тачно и на који начин треба да развија. Заправо, он је знао шта (одређену врсту мишљења) треба да развија, али није имао јасну представу шта је то конкретно логичко, критичко, стваралачко и апстрактно мишљење, које способности улазе у састав одређене врсте мишљења, па самим тим, учитељ није могао тачно знати на који начин треба подстицати и развијати одређену врсту математичког мишљења. Задаци су морали бити јасније дефинисани, јер само јасно дефинисани задаци могли су бити остварени у пракси.

Због бројних недостатака уопштено одређених задатака наставе математике, наметнула се потреба јаснијег одређења – шта је то што ученик на крају одређеног разреда треба да зна. Наведени недостаци, о којима је било речи, а који су били последица уопштено дефинисаних задатака наставе математике, отклањају се новим *Правилником о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања* (10/2017, 16/2018, 5/2019, 11/2019). У њему, као што смо већ помињали, уместо уопштено дефинисаних задатака наставе математике, наводе се исходи за крај сваког разреда, односно тачне формулације шта ученик по завршетку одређеног разреда треба да зна, уме и може. Јасно дефинисани исходи представљају основу учитељу у његовом планирању. Полазећи од исхода, учитељ креира свој годишњи план, а из њега своје оперативне планове. Полазећи од јасно дефинисаних исхода за крај наставне године, учитељ у оперативним плановима врши њихову операционализацију, коју и даље операционализује за конкретну наставну јединицу. На тај начин отклања се већина недостатака раније дефинисаних задатака. Учитељ сада има јасну представу шта треба да постигне код својих ученика.

Чини се да су новим *Правилницима* (10/2017, 16/2018, 5/2019, 11/2019) неки недостаци отклоњени, али и даље је циљ, у делу који се односи на потребу *развијања основа апстрактног и критичког мишљења*, уопштено дат. Оно што охрабрује јесте стална тежња да се недостаци на које се наилази у дефинисању циља и исхода наставе математике отклоне. То је посебно важно како би циљ и исходи били остварени у пракси, на начин који гарантује да сви учитељи једнозначно знају шта је то што треба да развијају код својих ученика. Само онда када тачно знају шта треба да развијају, они то могу чинити на прави начин.

За потребе рада, посебно ћемо се осврнути на развој мишљења, као задатак сваке наставе, па и почетне наставе математике. Све више се говори о значају развоја мишљења као посебно важне компоненте сваке наставне активности. На процес развоја се све мање гледа са становишта преношења информација, а све више се наглашава „*значај развоја у области процеса сазнавања, посебно интелектуалног развоја и развоја мишљења*. Један од централних задатака је *развој и проучавање мишљења,* култивисање интелекта прожето проучавањем вредности“ (Ђорђевић, 2006: 385).

Сличне циљеве налазимо и код других. У циљевима наставе математике А. А. Стољар посебно истиче:

„- развој математичког мишљења,

- добијање елементарних теоријских знања математичке науке, неопходних за даље школовање и практичне делатности, а такође и вештина и навика да се теоријска знања примене у различитим конкретним ситуацијама,

- разумевање научених основа савремене технике и савремене производње у делу у ком се користе математичке методе“ (Према: Дејић, 2009: 449).

Поменути аутор истиче као значајан циљ *развијање математичког мишљења,* али је он уопштено дат.

У *Курикулуму наставног предмета Математика за основне школе и гимназије* у Републици Хрватској (2019), наведени су општи циљеви математичког образовања, као и образовни исходи. Тако су у оквиру образовних исхода дефинисане две димензије: математички процеси и математички концепти. У оквиру математичких процеса дефинисане су више когнитивне ученичке способности и вештине, чији развој настава математике мора омогућити. То су:

„– приказивање и комуникација
– повезивање
– логичко мишљење, аргументовање и закључивање
– решавање проблема и математичко моделовање
– примена технологије“ (*Курикулум наставног предмета Математика за основне школе и гимназије,* 2019: 10; Воркапић, Минић, 2016: 133).

Као важан циљ се истиче потреба подстицања и развијања математичког мишљења.

У ранијим дефиницијама циљева наставе математике наилазимо на истицање циља који се односи на подстицање и развијање математичког мишљења. „Основни задатак наставе математике јесте да једним великим уделом учествује у изграђивању (васпитању и образовању) уравнотежене вредносне личности" (Prvanović, 1970: 12). Неке карактеристике такве личности изграђује настава математике. „Она то постиже, најкраће речено, *оспособљавањем ученика да мисли*, које обухвата:

(1) формирање савремених математичких појмова;
(2) увођење у математичке релације и математичке структуре;
(3) изграђивање математичког мишљења уопште и посебно оспособљавање за математичко (и логичко) расуђивање" (Prvanović, 1970: 13).

У наведеном се истиче смисао, значај и суштина математичког образовања, која се пре свега огледа у изграђивању, подстицању и развијању математичког мишљења ученика.

Када се говори о циљевима и исходима наставе математике, мора се поћи од чињенице да „живот тражи примену наученог, правилно мишљење, припрему за будућност, једном речју, свестрану личност" (Дејић, 2009: 447). Настава математике оперише математичким појмовима који су по својој природи апстрактни, стога је настава математике веома специфична, а у исто време и веома погодна за подстицање и развијање апстрактног мишљења ученика. Полазећи од те специфичности наставе математике у њој „треба да развијамо математичко мишљење, као и мисаоне операције, пре свега апстракцију и генерализацију, упоређивање, конкретизацију и специјализацију итд." (Дејић, 2009: 447). Стога се, као важан захтев наставе математике, поред наведеног, често истиче и правилно формирање математичких појмова. Анализирајући циљеве наставе математике, узимајући у обзир специфичност математичке наставе, истиче се да „оспособљавање деце за правилно закључивање мора бити важан циљ наставе математике" (Дејић, 2009: 447).

У свим наведеним разматрањима примећујемо да већина аутора на прво место, као важан циљ наставе математике, ставља развој математичког мишљења ученика. Умни развој ученика се ставља у први план, али он подразумева и одређена математичка знања.

Вредности почетне наставе математике су бројне. Поред развијања математичког мишљења, математичке активности, односно решавање математичких задатака доприноси развијању самосталности, самокритичности, упорности, истрајности, систематичности, развија позитиван однос према раду и припрема појединце за различите практичне активности. Почетна настава математике својим активностима врши позитиван утицај на развој свестране, комплетне и креативне личности ученика и тиме их припрема за решавање бројних, не само математичких проблема, већ и животних и тиме их припрема за сналажење у савременом времену.

Ученици се кроз усвајање математичких садржаја припремају за: „решавање разноврсних практичних и теоријских проблема, комуникацију математичким језиком, математичко резоновање и доношење закључака и одлука" (*Правилник о програму наставе и учења*, 2017: 26; 2018: 73; 2019: 35; 2019: 39). У планирању свог рада учитељи морају полазити од прописаних исхода. „При обради нових садржаја треба се ослањати на постојеће искуство и знање ученика, и настојати, да ученици самостално изводе закључке“ (*Правилник о програму наставе и учења*, 2017: 26; 2018: 73; 2019: 35; 2019: 40).

„Практична улога почетне наставе математике долази до изражаја у припреми ученика за коришћење стечених математичких знања у свакодневном животу, у решавању задатака из живота ученика“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 36).

Вредности учења математике су бројне. Математика „развија навике правилног мишљења, самосталности, логичке анализе и синтезе, те расуђивања. Продрела је у све, или готово све поре људске делатности, тако да ни индивидуа ни друштвена заједница неће моћи опстати ако нису математички образовани“ (Kadum, 2007: 26).

О значају наставе математике говори и чињеница да математика има широку примену у разним људским делатностима и човековим активностима. Она нам је потребна у свакодневном животу. „Не постоји ниједна људска делатност која не зависи од математике“ (Петровић, 2015: 46).

Из свега наведеног следи јасан закључак да циљ и исходи наставе математике играју важну улогу у образовно-васпитном процесу и да их само њиховим правилним и јасним дефинисањем можемо остварити у пракси.

1.3. Математичко мишљење ученика у почетној настави математике

У претходном делу је, приликом разматрања циљева и исхода почетне наставе математике, већ указано на све већи значај потребе развијања мишљења ученика. Истицано је да се све више инсистира на подстицању и развијању математичког мишљења (и свих његових врста), а све мање на усвајању чињеница. Математичка знања су потребна, али не и довољна, за потпун свестрани развој личности ученика. Поред математичких знања, која су неопходна, потребно је подстицати и развијати и математичко мишљење.

Један од важних циљева наставе математике, поред усвајања одређених математичких знања, јесте и развијање математичког мишљења. Сам појам *математичко мишљење* је доста широк и у његовом разматрању уочљиво је више прилаза поменутом појму.

Неки аутори (Пикула, Милинковић, 2015) математичко мишљење одређују путем *когнитивних активности* које се дешавају током овладавања и манипулисања математичким појмовима који су по својој природи апстрактни. Сам појам математичког мишљења је доста широк и не може се лако дефинисати. Мишљење је „процес којим се из једног мисаоног стања долази до другог, новог стања из кога је, такође, могућ повратак у претходно стање, с обзиром да је мишљење реверзибилан процес. Изградња реверзибилног мишљења основни је показатељ спремности ученика за математичко мишљење“ (Пикула, Милинковић, 2015: 21). У наведеном одређењу, немамо јасну дефиницију појма *математичко мишљење*, већ аутори истичу само услов за његово јављање, а то је реверзибилност. Математичко мишљење је „логичко мишљење, односно мишљење којим се изграђују математички појмови, оперише тим појмовима и откривају релације и зависности међу њима, тј. откривају се математичке истине (чињенице)“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 44). У наведеном одређењу математичког мишљења, оно се поистовећује са логичким, што није у потпуности оправдано, јер математичко мишљење, поред логичког мишљења, у себе укључује и стваралачко, критичко и апстрактно мишљење. У процесу математичког мишљења важну улогу имају мисаоне активности. „Мисаоним активностима долази се до математичих појмова и успостављају везе међу појмовима, а математички појмови и мисаоне операције основни су елементи математичког мишљења“ (Пикула, Милинковић, 2015: 21).

Највећи број аутора математичко мишљење разматра преко *математичких способности* и настоје да математичко мишљење операционализују, издвајајући различите врсте мишљења и способности које га сачињавају. Под математичким мишљењем се подразумева „сложена интелектуална активност која обухвата логичко, стваралачко и критичко мишљење“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 439). Иако дају одређење математичког мишљења, оно је дефинисано преко три различите врсте мишљења које даље морају бити прецизније дефинисане и операционализоване чиме би и сама дефиниција појма математичког мишљења била јаснија и прецизнија. Поменути аутори у оквиру својих радова (Шпијуновић, 1994; Маричић, 2005; Маричић, 2011; Маричић и сар. 2017) дају операционализацију стваралачког и критичког мишљења ученика у почетној настави математике. Остаје отворено само питање операционализације логичког мишљења ученика у почетној настави математике, како би и математичко мишљење било прецизније дефинисано преко врста које га сачињавају, а ове даље преко различитих способности. То би, свакако, пружило јасније и свеобухватније одређење математичког мишљења. Међу ауторима који математичко мишљење одређују преко различитих врста мишљења, наилазимо и на поделу математичког мишљења на продуктивно (стваралачко), рецептивно мишљење и репродуктивно мишљење. Продуктивно мишљење представља мишљење у ком субјект, односно ученик, у наставном процесу логички расуђује о проблему пред којим се нађе и у том процесу расуђивања он је у ситуацији да открива и проналази. Са друге стране, репродуктивно мишљење представља процес када субјект (ученик) саопштава (другима) оно што је научио или примењује своја знања у конкретним ситуацијама. У оквиру продуктивног мишљења разликује се конструктивно и аналитичко. Конструктивно математичко мишљење је оно које се примењује при изграђивању математичких појмова који су по својој природи апстрактни и изграђивању математичких структура. Аналитичко математичко мишљење долази до изражаја у процесу строгих истраживања решења неког проблема и подразумева доказивање валидности, истинитости и правилности решења (Malinović, Malinović Jovanović, 2002). У приступу који математичко мишљење одређује преко способности наилазимо на бројне способности математичког мишљења. Када говоримо о математичком мишљењу, ваља нагласити да се поред развијања математичког мишљења све више истиче и значај развијања тих математичких способности. За математичко мишљење посебно су важне следеће математичке способности: „способност брзог извођења рачунских операција, лаког извођења сложенијих рачунских операција, способност вештог трансформисања сложених алгебарских израза, налажења успешних и нестандардних начина решавања једначина, способност лаког и јасног предочавања просторних и објеката и односа, способност лаког разумевања и улажења у бит проблема, способност провођења дубоке анализе, способност откривања различитих начина решавања проблема, способност уочавања и постављања нових проблема, способност стварања и изношења нових идеја, способност извођења правилног логичког расуђивања, способност упоређивања и повезивања добијених резултата, способност успостављања аналогија, способност поопштавања, специјализације, апстраховања и конкретизовања“ (Kurnik, 2001a: 197).

Наведене математичке способности представљају важан и неопходан део математичког мишљења. Мишљења смо да без наведених математичких способности нема ни успешног математичког мишљења. У наставном процесу, учитељ мора идентификовати побројане математичке способности (или неке од њих) код својих ученика и стално утицати на њихов даљи развој. Настава математике је веома специфичан и сложен процес и само правилним методичким приступом се може доћи до жељеног резултата, а то је *развој математичких способности и математичког мишљења и стварање добре математичке основе за даље математичко образовање*. Овладавање математичким садржајима и усвајање математичких знања је неопходно сваком појединцу, без обзира на његово будуће занимање, јер математика има примену у свакодневном животу и раду у свим областима људске делатности. Човек се свакодневно среће са проблемима за чије решавање је математика неопходна.

Садржину математичког мишљења чине следеће способности:

„1) јасно логичко мишљење,
2) моћ апстракције,
3) способност комбиновања,
4) способност просторног представљања и оперисања просторним ликовима,
5) способност критичког мишљења и
6) способност памћења“ (Комерел, према: Маричић и сар. 2017: 30).

Математичко мишљење подразумева математичке способности. Другим речима, математичко мишљење најбоље можемо одредити и схватити преко математичких способности. Оне се испољавају кроз:

„- развијање просторног предочавања;
- способност за одвајање битног од небитног;
- способност апстраховања;
- способност апстрактног мишљења;
- способност прелаза са конкретне ситуације на математичку формулацију питања, ка шеми која сажето карактеризира бит проблемског задатка;
- овладавање навикама дедуктивног мишљења и закључивања;
- примена научних достигнућа, закључака на конкретне садржаје;
- способност критичког промишљања и постављање нових проблемских питања (задатака);
- поседовање довољно развијеног, како писменог тако и усменог, математичког изражавања; и
- поседовање довољно стрпљења при решавању математичких (проблемских) задатака“ (Švarcburd, prema: Kadum, 2006b: 97).

На основу анализе процеса решавања математичких задатака, сачињена је структура математичких способности и представљена на следећи начин:

„1) *Примање математичких информација*;
2) *Обрада математичких информација*:
- способност логичког мишљења у области квантитативних и просторних односа, бројева и симбола, односно, способност оперисања математичким симболима;
- способност јасног и широког генерализовања математичког градива;
- способност логичког и математичког мишљења у виду скраћених структура;
- еластичност процеса мишљења у математичким активностима;
- тежња ка јасности, једноставности, економичности и рационалности решења;
- реверзибилност у мишљењу и резоновању, односно способност брзог и слободног подешавања смера процеса мишљења, преоријентација са датог на супротни правац мисли;

3) *Складиштење математичких информација;*

4) *Општа синтетичка компонента* - усмереност математичког мишљења" (Крутецкиј, према: Маричић и сар. 2017: 26–27).

Наведена структура на темељан начин разматра математичке способности у свакој фази решавања математичког задатка и даје целовиту слику о њима. Све наведене математичке способности развијају се на математичком градиву, тј. при решавању математичких задатака и у том процесу су тесно повезане. У фази обраде математичких информација логичко мишљење има непроцењив значај.

Када говоримо о математичким способностима и математичком мишљењу, морамо се осврнути и на Гилфордов (Guilford, 1967) модел интелигенције. Модел приказује 120 фактора интелекта, а сваки фактор је одређен троструком интеракцијом садржаја, операција и продуката.

За наставу математике посебно су важне операције које се односе на менталне процесе и саставни су део решавања задатака. У операције, према Гилфорду спадају:

1. когниција - проналажење или препознавање информација, непосредно откривање, поимање, спознавање;
2. памћење података и извесни степен коришћења;
3. креативно изналажање две или више различитих идеја;
4. изналажење само једне идеје из више различитих под условом да она испуњава услове;
5. вредновање и оцењивање произведених идеја (Guilford, 1967).

У процесу наведених операција, према Гилфорду (1967), настају: јединице, класе, релације, системи, трансформације и импликације. Гилфордова теорија способности има велики значај за математичке способности личности и математичко мишљење ученика. Сваки од фактора Гилфордовог модела интелигенције има своју примену и место у математичком мишљењу. Наведени модел, пре свега, говори о повезаности интелигенције и математичког мишљења. Са друге стране, бројне способности интелигенције неопходне су за сам процес математичког мишљења.

У литератури је уочљив и прилаз који настоји математичко мишљење одредити преко његових *квалитета* или *карактеристика*, као што су: „гипкост, активност, усмереност, економичност, дубина, ширина, оригиналност, лаконизам итд." (Дејић, Егерић, 2003: 32).

Још један прилаз појму математичко мишљење је уочљив код аутора који покушавају одредити математичко мишљење преко његове *примене*. „Примена математичког мишљења непосредно се јавља у свакој специфичној ситуацији решавања проблема који захтева примену различитих математичких знања и способности. То је свака ситуација у којој је индивидуа у прилици да искористи сав расположиви капацитет који поседује у области математичког мишљења у циљу решавања неког конкретног проблема (проблемске ситуације) са којим се суочава" (Антонијевић, 2014: 220). И ово одређење математичког мишљења, иако га одређује преко његове примене, упућује на способности које су назване „капацитети", а које појединац мора уложити да би решио неки проблем.

Математичко мишљење је „један од облика мишљења усмерених ка решавању математичких проблема и задатака што се карактерише искоришћавањем математичких симбола, појмова и правила" (Романо, 2008: 3).

Након сагледавања дефиниција математичког мишљења и сагледавања покушаја да се оно прецизније одреди, у раду ћемо, узимајући у обзир специфичност (пре свега мислимо на апстрактност) математичких садржаја, интелектуални развој ученика и уважавајући циљ и исходе почетне наставе математике, математичко мишљење посматрати као сложен систем, сложену интелектуалну активност, коју сачињавају различите врсте мишљења и различите математичке способности које се операционализацијом могу издвојити. Математичко мишљење ћемо посматрати као комплексан феномен у којем учествују: „логичко, критичко, стваралачко и апстрактно мишљење" (Јовановић, Вуловић, 2021: 326). На различите врсте математичког мишљења биће указано у посебном поглављу, стога се овде нећемо дуже задржавати на дефиницијама наведених врста математичког мишљења.

Прихватајући, за потребе рада, наведено одређење математичког мишљења, морамо указати и на потребу даљег јасног одређења и операционализовања наведених врста математичког мишљења. Операционализацију стваралачког мишљења и његово јасно одређење срећемо у радовима Р. Квашчева (1969, 1974, 1975, 1976), док операционализацију стваралачког мишљења ученика у почетној настави математике проналазимо у раду К. Шпијуновића (1994) и у раду С. Маричић (2006). Одређење појма критичко мишљење ученика у почетној настави математике и његову операционализацију налазимо у дисертацији С. Маричић (2011). У раду ћемо настојати да операционализујемо и јасно одредимо логичко мишљење ученика у почетној настави математике.

1.3.1. Математичко мишљење ученика као задатак почетне наставе математике

За почетну наставу математике важан је развој математичког мишљења ученика, тј. свих његових компоненти (врста мишљења). Због све већег значаја које мишљење добија насупрот знању великог броја чињеница, ученик поред одређених математичких знања, мора овладати и одговарајућим способностима мишљења. О важности развијања математичког мишљења ученика скоро да и не треба полемисати, ако се узме у обзир време за које образујемо ученике. Без математичког мишљења нема решавања математичких проблема, а самим тим ни решавања животних проблема које намеће модерно друштво и његов све бржи развој.

За процес математичког мишљења карактеристично је „орерисање искуственим информацијама (опажај, представа, реч, појам), што омогућава да се сазна више од непосредног искуственог доживљаја. Мишљењем се сазнају различите стране објекта, врши се упоређивање по сличности и различитости, успостављају се односи међу објектима, групишу се сличности, уочава се оно што је константно и променљиво" (Дејић, Егерић, 2003: 32). У почетној настави математике сазнање „обично започиње живим опажањем, да би преко процеса апстраховања дошло до апстрактних појмова, до теорија и коначно до праксе" (Pinter i sar. 1996: 20). У наведеном се види да у самом процесу сазнавања у почетној настави математике, у којој су појмови апстрактни, апстраховање, као мисаона операција, има огроман значај. Како су мисаоне операције компоненте логичког мишљења, то говори о важној улози логичког мишљења у процесу сазнавања. Без развијеног логичког мишљења, нема ни апстраховања, а самим тим ни ваљаног сазнавања.

Савремено учење и савремену наставу све више одликује усмереност ка развијању мишљења. У наставном процесу развијању математичког мишљења се поклања све већа пажња. При развијању математичког мишљења „треба имати у виду да су код ученика способности опажања, мишљења, закључивања и уопште учења везане за конкретне ситуације, односно очигледност, и да постоје извесна ограничења за развијање математичког мишљења“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 451).

У почетној настави математике математичко мишљење можемо различито одредити:

„- као садржај или тип мишљења (конкретно, апстрактно, интуитивно, дијалектичко, стваралачко);

- као метод сазнања и математичког истраживања (индуктивно, дедуктивно, аналошко);

- као стил мишљења (гипкост, оригиналност, критичност);

- као субјективно својство карактера личности (тачност, упорност, радозналост)“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 438).

Тако посматрано математичко мишљење у почетној настави математике треба подстицати и даље развијати, што није ни мало лак ни једноставан задатак учитеља. Учитељ све врсте математичког мишљења, мора узети у обзир приликом његовог развијања у настави. „Ако жели да оспособи ученике да мисле и да их образује математички, настава математике мора да се заснива на структури мишљења на појединим ступњевима развоја“ (Prvanović, 1970: 30). У циљу квалитетног подстицања и развијања математичког мишљења у настави, од кључног значаја је упознати интелектуални развој деце. Когниција је процес кроз који појединац стиче знање. Она обухвата перцепције, памћење, учење, машту, мишљење, закључивање, мотивацију, организованост меморије. Когнитивни процеси представљају сазнајне структуре које појединац поседује и које кроз процес учења изграђује. За развој мишљења ученика посебно су важне: Пијажеова, Еблијева, Брунерова теорија и теорија Виготског. У посебном делу рада ћемо указати на наведене теорије учења и развоја указујући на значај који оне имају за развој мишљења ученика у почетној настави математике.

Математичко мишљење има велики значај у времену брзих промена и развоја друштва. Да би се „примерено одговорило на захтеве друштва и најповољније допринело његовом развоју и усавршавању образовања, пред савремену наставу математике као нужност и главни задатак поставља развој математичких способности и математичког мишљења ученика“ (Kurnik, 2001a: 196). У савременом друштву човек се стално налази пред бројним проблемима и стално је у ситуацији да их решава. У том контексту и мишљење добија све већи значај. Развој мишљења, представља важан задатак наставе, а са друге стране „развој мишљења ученика, међутим, не може се ни замислити ако их не оспособљавамо за самостално расуђивање, за вршење анализе, синтезе, упоређивања, уопштавања, које захтева решавање сваког проблема“ (Грандић, Гајић, 1998: 99). „Мишљење има пресудну улогу у спознавању спољњег света, јер на тај начин ученик анализира, издваја, упоређује, апстрахује, генерализује, закључује и тако се математички образује формирајући математичке појмове. Управо се у том процесу и огледа специфичност математичког мишљења“ (Маричић и сар. 2017: 19). Вршећи наведене мисаоне поступке, ученик логички мисли и расуђује. То говори о важности логичког мишљења у процесу математичког образовања.

У подстицању развоја мишљења ученика, „није довољно развијати само критичко мишљење, како се често наглашава. Посебну пажњу заслужују они задаци и активности који подстичу стваралаштво и дивергентно мишљење“ (Ђорђевић, 1999: 38). Наведено говори о важности подстицања свих врста математичког мишљења. „Развијање математичког мишљења ученика представља важан задатак наставе математике у основној школи, који обавезује учитеља да га оствари, а може га остварити једино подстицањем и развијањем свих његових компоненти" (Јовановић, Вуловић, 2021: 325). „Развијање математичког мишљења ученика у почетној настави математике треба да буде засновано на избору одговарајућих математичких садржаја, метода и облика рада, стварању услова који ће да подстичу мисаону активност ученика, негују његову самосталност у учењу и стицању математичких знања" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 451). За стицање математичких знања од посебног је значаја изазивање интелектуалне радозналости ученика. Изазивање радозналости доприноси интелектуалном развоју ученика. Стога, „математичке чињенице не треба да се саопштавају ученицима. Њих ученици морају, уз вешто вођење наставника, да откривају. Само на тај начин остварује се прокламовани циљ наставе математике: развој мишљења код ученика. Уместо задатака које треба урадити, ученицима треба постављати ситуације које треба разрешити" (Дејић, Михајловић, 2014: 16).

1.3.2. Врсте математичког мишљења

У раду смо прихватили дефиницију математичког мишљења, по којој је оно дефинисано као сложена интелектуална активност, коју сачињавају: логичко, критичко, стваралачко и апстрактно мишљење. Овде ћемо, укратко, указати на дефиниције, садржај и кључне способности наведених врста математичког мишљења.

Логичко мишљење се најчешће дефинише као „способност ученика да користи и разуме значење логичких операција (конјункција, дисјункција, негација, импликација и еквиваленција), мисаоних операција (анализа, синтеза, конкретизација, апстракција, генерализација, идентификација, специјализација и друге) и облике закључивања" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 440). Логичко мишљење се заснива на логичким законима и представља „оспособљеност појединца да се користи специфичним логичким методама као што су: анализа, синтеза, индукција, дедукција, аналогија, итд." (Шпијуновић, 1994: 48). Како се у раду бавимо логичким мишљењем ученика у почетној настави математике, његово детаљније разматрање и операционализовање биће дато у посебном поглављу у наставку рада.

Критичко мишљење је најчешће дефинисано преко способности које су операционализацијом издвојене. Критичко мишљење у почетној настави математике је „сложена интелектуална активност у којој долазе до изражаја следеће способности: формулисање проблема, реформулисање проблема, евалуација и осетљивост за проблеме" (Маричић, 2011: 133). На основу тога, могли бисмо рећи да је критичко мишљење особина мишљења која се састоји у свестраној анализи, критичком проверавању чињеница, хипотеза и других података који се усвајају.

Стваралачко мишљење представља „сложену интелектуалну активност у којој долазе до изражаја следеће способности: оригиналност, флексибилност, флуентност, редефиниција, осетљивост за проблеме и елаборација" (Шпијуновић, 1994: 63). Стваралачко мишљење у почетној настави математике дефинисано је преко способности које га сачињавју како би се ефикасније могло подстицати и развијати. Оно представља разне врсте активности у процесу учења које се одликују изналажењем и конструисањем нових и аутентичних путева у решавању нових задатака и проблема.

Апстрактно мишљење се дефинише као мишљење које користи симболе, апстрактне појмове у процесу решавања задатака и проблема (Kvaščev, 1974: 260).

1.4. Сазнајни развој ученика и почетна настава математике

Од развијености одређених логичко-математичких структура зависи и могућност усвајања апстрактних математичких појмова, а тиме и математичко образовање. Од развијености појединих сазнајних способности зависи колико ће ученик бити у стању да логички расуђује о проблемима пред којима се нађе, да их схвати и прими у већ формиране структуре. Стога се на сазнајни процес ученика у почетној настави математике гледа као на сложен процес, чија сложеност „произилази из чињенице да се у тој настави углавном оперише са појмовима, а веома мало са чињеницама. Разлике између чињеница и појмова имплицирају и разлике у начину њиховог сазнавања. Тако је усвајање чињеница резултат емпиријског, а усвајање појмова резултат рационалног сазнавања“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 74–75). Чињенице се могу механички учити, тј. без разумевања, а усвајање појмова захтева разумевање, а то разумевање подразумева низ интелектуалних активности. Разумевање се намеће као кључни чинилац успешног сазнајног процеса у почетној настави математике. Како би се дошло до разумевања у почетној настави математике, важно је познавање когнитивног развоја ученика. Когнитивни развој ученика у великом степену одређује начин и квалитет учења математике у млађим разредима основне школе. Различите теорије учења у центар интересовања стављају различите ствари, па су мање или више погодне за развој мишљења, посебно логичког мишљења. За успешну организацију почетне наставе математике, са аспекта развоја математичког мишљења, најважније су когнитивне теорије учења.

Пијажеова теорија (Jean Piaget, 1977, 1982, 1994) на учење гледа као на активан процес у ком појединац кроз интеракцију са околином изграђује своје сазнајне структуре. Према мишљењу Пијажеа (1994), развој мишљења детета пролази кроз неколико фаза, периода. За сваки период постоје одређене карактеристике, а њихово познавање је предуслов добро организоване и ефикасне наставе. Сваки стадијум има развијене одређене структуре и учење одговара тим структурама. За почетну наставу математике од посебног значаја је *стадијум конкретних операција*, јер се у овом периоду развијају логичко-математичке структуре и дете овладава логичким операцијама: класификација, серијација, реверзибилност и конзервација. У стадијуму конкретних операција „јављају се важне логичке операције које су везане за конкретне објекте и ситуације, због чега се тако и зове. Дете логички мисли али само о оном што опажа, што је конкретно дато. Постепено, дете напушта опажајно-практичне облике мишљења и почињу да се развијају појмови и интелектуалне операције којима се превазилази оно што је опажајно дато“ (Ђорђевић, 1999: 32–33). У овом периоду „јављају се целовите структуре груписања (серијација, класификација, кореспонденција) које омогућавају квантификовање, реверзибилно мишљење и настајање појмова конзервације“ (Брковић, 1996: 70). Све је, још увек, везано за конкретне и очигледне примере. Стога, у почетној настави математике се мора ићи од конкретних примера, примера који су блиски ученику, како би се постепено развијале логичке структуре и како би се на правилан начин ишло ка апстрактном, а самим тим, на правилан начин подстицало и развијало математичко мишљење. Након што овлада класификацијом и серијацијом, дете ће лако оперисати и бројевима, али је још увек потребно да су му пред очима конкретни предмети. У *стадијуму конкретних операција*, постепено се развија и конзервација (броја, дужине, масе, течности и запремине). Учење је „субординирано развоју и може мењати своје механизме у зависности од одређеног нивоа развоја“ (Брковић, 1995: 18). Ученик може усвајати само оне појмове за које су развијене менталне структуре. Према Пијажеу, учење је условљено логичким структурама, тј. потчињено развоју. „То значи да почетна настава математике, заснована на концепцији Ж. Пијажеа, стално каска за развојем ученика и користи само спољашње могућности које пружа развој. То обавезује учитеља да приликом избора садржаја и начина њиховог увођења у почетну наставу математике води рачуна о развијености менталних структура ученика, јер учење је могуће, ако је могућа асимилација нових садржаја у постојеће структуре и њихова адаптација“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 63).

Теорија Виготског (1977) заснована је на тези да учење треба да води и вуче развој. „Учење је само онда добро када претходи развитку. Тада оно буди и изазива цео низ функција које сазревају и налазе се у *зони наредног развитка*“ (Виготски, 1977: 259). *Зона актуелног развоја* подразумева оно што дете може и зна. Када ученик решава задатке без улагања посебног мисаоног напора и без помоћи, само се утврђује његова тренутна зрелост. Задаци из домена зоне актуелног развоја доводе до „тапкања“ ученика у месту. Такви задаци могу да послуже за стицање рутине и ако желимо аутоматизовати неку операцију, али не подстичу даљи интелектуални развој. Уколико желимо подстицати даљи мисаони развој, ученику морамо задавати задатке који за њега представљају тешкоћу, препреку коју он жели да савлада. Морамо му задавати проблеме који ће будити његову радозналост и подстицати га на мисаону активност, а тиме као резултат имати развијање његовог мишљења. *Зона наредног развоја* „означава предуслов да обука, учење води за собом развој; учење може да буди и развија цео низ функција које се налазе у зони наредног развитка ако се деци дају задаци такве тежине који су изазов, нов проблем и које оно може да реши уз малу помоћ и подршку“ (Брковић, 1995: 19). Настава треба да „помогне ученику да усавршава постојеће и развија нове структуре, односно да буде усмерена на будући ученитков развој“ (Вилотијевић, 1999: 238). За наставу која је окренута подстицању и развијању мишљења ученика је значајнија зона наредног развоја. Учење за собом треба да води развој. Учење треба да буди и развија структуре које су у зони наредног развоја и то тако што ученицима треба давати задатке који су изазов и које они могу да реше уз малу помоћ. Према томе, за савремено образовање и умни развој детета важније је „знати шта оно може да реши уз малу помоћ и подршку наставника, него проверавати шта успева без ичије помоћи“ (Брковић, 1996: 76). Задаци који су за ученике тежи и захтевају улагање мисаоног напора вуку за собом развој и подстичу стваралачко испољавање ученика. „Добро осмишљени задаци, примерени сваком појединачном ученику, могу иницирати мисаоне радње које припадају зони наредног развоја мишљења. То значи да наставник треба да инсистира на формирању оних мисаоних карактеристика ученика које се тек назиру, а не оних способности које су већ испољене“ (Пикула, Милинковић, 2015: 21). Учење не мора да буде пратиља развоја, већ треба да иде испред, да га подстиче и убрзава. Наставник треба да поставља такве захтеве који изазивају мисаони (умни) напор ученика и „вуку“ развој напред. Наставник треба да даје захтеве који подстичу формирање мисаоних способности које су у „зони наредног развоја“. Узимајући у обзир теорију Виготског „улога учитеља у почетној настави математике је да пружа помоћ ученицима и да усредсреди пажњу на формирање и обликовање одлика мишљења које се назиру и које тек треба да се појаве“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 66). Улога учитеља, према теорији Виготског, је веома одговорна. „Он треба добро да процени способности сваког свог ученика, да утврди: а) које су му психичке функције развијене; б) које су у развоју и в) које су то функције којима предстоји непосредни развој“ (Виготски, 1977: 239). Само добар учитељ ће то успети правилно да процени и томе да прилагоди наставни процес. Зона наредног развоја је значајна и за подстицање и развијање способности логичког мишљења.

Еблијева теорија (H. Aebli, 1963, 1989) у основи прихвата Пијажеове стадијуме, али само као нужан редослед који узима независно од старости. Посебно се истиче Еблијева *оперативна метода*, по којој су за изграђивање неке операције потребне *поунутарњивање* и *оперативна обрада*. То поунутарњивање се одвија кроз неколико етапа: конкретни ступањ, фигурални ступањ и симболички ступањ. „Захтеви које Х. Ебли има, а односе се на учење у почетној настави математике су да ученик сваку активност изведе самостално на реалној основи, изузев када је сложена, па је показује учитељ" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 70). Само на тај начин ће и логичко мишљење ученика у почетној настави математике бити правилно подстицано.

Брунерова теорија (J. Bruner, 1971) когнитивни развој посматра независно од зрелости појединца. Према Брунеру (1971) когнитивни развој зависи од организованог рада појединца, односно учења, као и од услова средине. Учење и срeдински услови који утичу на когнитивни развој, могу тај развој да убрзају, успоре или, у неким ситуацијама, зауставе. Развој се, према Џ. Брунеру, одвија у интеракцији појединца и средине. „Брунер сматра да ученик сазнаје свет сопственом активношћу - радећи, осећајући и преко симболичких средстава тако што *конструише модел реалности* у коме своја искуства представља на унутрашњем плану" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 67). Управо, то представљање на унутрашњем плану чини основу логичког мишљења. Брунерова теорија говори у прилог чињеници да се под утицајем напора, могу подстицати и даље развијати одређене способности. Дакле, ако логичко мишљење схватимо као скуп различитих мисаоних способности, Брунерова теорија говори и о могућности његовог подстицања и развијања. Брунер разликује три равни развоја. Процес развоја мишљења покреће се услед несклада између равни, а не по етапама које су временски одређене. Несклад покреће појединца на одређену мисаону активност и улагање одређеног мисаоног напора, а услед тога долази и до даљег развоја мишљења. Средина има значајну, односно кључну улогу у изазивању наведених облика представљања. „Ученик је зрео, у интелектуалном смислу, ако флексибилно користи наведене равни апстракције. Уколико постоји несклад између различитих равни апстракције, покреће се процес мишљења" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 67). Са аспекта теорије Џ. Брунера, улога учитеља у наставном поцесу је да помогне ученицима „да уоче разлику између појма неког предмета (или појаве) и акције (радње) у којој се употребљава тај предмет (појава)" (Вилотијевић, 1999: 242). Важна је улога учитеља у стицању и структурисању знања. „Сврха учења није само да се науче чињенице, већ да се класификују у одређене логичке целине" (Вилотијевић, 1999: 245). Подаци и информације које ученик учи треба да се логички повезују у хијерархијску структуру, посебно у почетној настави математике, јер се математички садржаји у прва четири разреда постепено проширују и допуњују. С друге стране, важно је да математички појмови буду правилно формирани, јер само такви представљају основу (темељ) за даље математичко образовање.

2. ЛОГИЧКО МИШЉЕЊЕ - КОНЦЕПТУАЛНИ ОКВИР ЗА ТЕОРИЈСКА ПОЛАЗИШТА

Логика је непобедива, јер да бисмо је победили,
морамо користити логику.
P. Boutroux

У овом делу ћемо кратко указати на развој логике који је од значаја за стварање теоријске основе и полазишта у разматрању логичког мишљења.

2.1. Кратак преглед развоја логике и различита схватања логике и сазнања

Логика је наука о законима сазнања истине и као таква утврђује основна правила по којима човек треба да мисли да би сазнао истину. Као науку, логику је први изложио Аристотел. Логика је наука о методама правилног мишљења. Користи се у различитим наукама, јер се може дефинисати и као наука о закључивању на основу правилног мишљења. Посебно је значајна њена улога у математици (Prešić, 1983; Коларић, 2003).

Још од свог постанка човек тежи да истражи природу и открије истину о различитим стварима. Своја знања о природи човек стиче коришћењем чула и разума. Полазећи од начина на које човек долази до сазнања о природи, можемо разликовати чулно сазнавање и логичко сазнавање или мишљење. Чулно сазнавање означава процес стицања знања ангажовањем чула, док логичко сазнавање или мишљење означава стицање знања ангажовањем менталних способности (Prešić, 1983; Petrović, 1987).

Највећи утицај на развој европске математике и мишљења уопште, извршиле су грчка математика и филозофија. Грци су „први изложили многе проблеме који нас и данас интересују, они су први нашли средства расуђивања којима још и данас оперишемо" (Prešić, 1983: 140). За потребе рада од посебног значаја су та средства којима у процесу мишљења оперишемо. То су заправо сви мисаони процеси који су покренути док мислимо, као и способности које човек у процесу мишљења користи.

Рађање грчке логике везује се за Перменида, Зенона, Сократа, Платона и Еуклида. Грчка логика достиже врхунац појавом радова Аристотела који је успео да систематизује методе расуђивања. Међутим, радови Аристотела нису имали великог утицаја на грчку математику. Оригиналност Грка је у „*свесним* покушајима да се проникне у логику математичких доказа. Докази које налазимо код великих грчких класичара Еуклида, Архимеда, Аполонија у логичком смислу готово да су једнаки данашњим" (Prešić, 1983: 141). Од првих имена која посебну пажњу обраћају на процес доказивања, па све до данас, доказивање лежи у основи математичких теорема.

Посебно ћемо се и кратко осврнути на математичку логику. Математичка логика се „бави исказима (судовима) и операцијама међу њима" (Пикула, Милинковић, 2015: 25). Математичка логика „проучава математичке доказе" (Prvanović, 1970: 732). Математичка логика полази од простих реченица (исказа и предиката), утврђује њихову истинитосну вредност у складу са правилима исправног логичког закључивања. „Међу терминима логичког карактера постоји мала значајна група која се састоји од речи као што су *не, и, или, ако..., тада...* Утврђивање значења и начина употребе тих термина задатак је најелементарнијег и најосновнијег дела логике, који се зове **исказни рачун**, или каткад **пропозиционални рачун**“ (Tarski, 1973: 18). Математичка логика се бави математичким проучавањем логике и применом тих резултата у другим областима математике. Значајна је у свакодневном животу. Она има „тако снажан замах да готово и нема области интелектуалне активности у којој она не налази примене“ (Prešić, 1983: 5). Данас се она посебно користи у свим областима рачунарства.

Логика, као филозофска дисциплина која пручава облике ваљане мисли, „има изванредан значај за све оне врсте човекове делатности у које је укључена његова мисао и у којима је важно да његова мисао буде ваљана“ (Petrović, 1987: 17). „Логика је данас једна од најпримењенијих области математике. Она је једна од главних стубова, ако не главни стуб, теоријског рачунарства. Зато у информатичком добу у којем живимо треба знати нешто о логици... Логика је важна уопште за дисциплину ума и језика, за прецизно и утемељено размишљање и изражавање, које се испољава у највишој мери у математици и науци...“ (Дошен, 2013: 4). Наведене речи сведоче о значају логике и о повезаности логике са математиком.

2.2. Савременија схватања примене логике

У свакодневном говору, често чујемо речи: логично, логика, логички. Значење ових речи, у првом реду, се односи на захтев да треба мислити и говорити смислено. Реч логичан значи „1. који је у складу са законима логике, који се заснива на логици; који нужно проистиче из одређења законитости, природан, јасан, очит. 2. који правилно, разборито расуђује, разуман“ (Клајн, Шипка, 2007: 710). Реч логика у најширем смислу подразумева да када чујемо да у нечему има логике и да је нешто логично, заправо мислимо да то нешто одговара нашем поимању ствари. Сама реч логика потиче од грчке речи *logiké*, што значи проза. „1. филозофска дисциплина, наука о законима и облицима мишљења. 2. унутрашња повезаност, условљеност, међузависност, смисао. 3. начин размишљања, гледања на ствари; схватање, расуђивање“ (Клајн, Шипка, 2007: 710). Дакле, логика се најчешће дефинише као грана филозофије. Бави се проучавањем правилног мишљења. Другим речима, она проучава законитости мишљења и закључивања, тј. све оно што води правилном мишљењу. Стога се за њу често каже да је у основи свих наука.

У последње време, када се говори о логици, све више се мисли на њену примену у решавању логичких проблема. Логика је и „извор забаве при одгонетању загонетки и решавању задатака“ (Dreser, 2015: 12).

Основа логике, „језгро логике, је математика у вези са речима *и, или, ако, не, сви, неки* и *је*“ (Дошен, 2013: 7). Везницима *и, или, ако* и *не* руководи се *исказна логика*, док се наведеним везницима уз укључивање речи *сви*, *неки* и *је* бави *предикатска логика*.

Логика се „традиционално схвата као наука о правилима коректног закључивања. У закључивању са једног скупа реченица прелазимо на нову реченицу. Реченице од којих полазимо су *претпоставке*, а резултат је *закључак*. Такав прелаз је логички исправан ако задовољава услов *salva veritate*: прелазећи од истинитих претпоставки прелазимо на истинит закључак“ (Kovijanić Vukićević, Vujošević, 2009: 9). За логику су посебно значајна правила закључивања у којима се у претпоставкама и закључцима појављују исказни везници. То су тзв. исказни везници: *и, или, ако* и *није*.

Наведене везнике и њихова својства изучава исказна логика (Kovijanić Vukićević, Vujošević, 2009).

Логика је „наука о правилности мишљења, или наука о законима мишљења којима се разум равња да би у својим радњама поштовао правилан поредак. Ту се дакако претпоставља да се разум у својој делатности мора држати неких правила... Предмет логике су радње разума, а не функције осета“ (Macun, 2014: 3). Суштина Мацуновог схватања полази од чињенице да осетима сазнајемо само материјалне, конкретне и појединачне предмете. То је сазнавање свега онога што је доступно чулима (виду, слуху, мирису, укусу, додиру). Са друге стране је спознавање путем разума. „Начин на који ум дохвата своје предмете разликује се од осета. Ум дохвата предмете на општи (универзални) или апстрактни начин, тј. он дохвата бит ствари... Три основне радње ума су: поимање, суђење и закључивање, а као резултат тих радњи добијамо три облика људског спознавања: појам, суд и закључак“ (Macun, 2014: 12). Појам, суд и закључак, дакле, настају радњама ума и стога представљају облике мишљења.

***

Разматрајући различита схватања процеса сазнања, почев од самих зачетака логике, па до савременијих схватања, увиђамо да су у оба случаја кључни појмови *појам, идеја, разум, мишљење.* Оно на шта нас сва разматрања наводе је чињеница да се природа упознаје чулима, односно опажањем, након чега се у разуму одвија низ мисаоних операција и апстракцијом формирају појмови. Дакле, у уму се одвија читав низ радњи које леже у основи логичког мишљења.

2.3. Логика и друге науке

Прихватајући одређење логике као науке о облицима ваљаног мишљења, уочавамо да је она повезана са другим наукама, али и да се од њих разликује. „1. *Логика се разликује од других наука*. Друге науке, наиме, или не разматрају чин разума, или не гледају на његову правилност. 2. *Логика претходи другим наукама*. Све друге науке већ претпостављају неко познавање закона мишљења и метода, јер иначе не би уопште могле научно поступати“ (Macun, 2014: 3).

Логика и математика - Логика као наука о формама ваљаног мишљења и исправног закључивања има специфичан однос са математиком. Основни појмови који су заједнички за ове две науке су: појам, суд, закључак, закључивање, дефиниција, доказ, аксиом, логичке операције, употреба везника *и, или, не* и сл. О специфичном односу логике и математике најбоље сведочи математичка логика. Код свих облика закључивања у математици служимо се и сазнањима логике о исказима и формама исправног закључивања. У математици се користе различите врсте закључивања, а логика, бавећи се радњама разума и формама исправног мишљења, разматра три врсте делатности ума: поимање, суђење и закључивање. Математика је дедуктивна наука, а у наставном процесу (и у почетној настави математике) доминира индуктивни начин закључивања. Отуда је познавање логике веома важно за математику. Такође, у настави математике често користимо и логичке везнике *и, или, није, ако...тада, ако и само ако*, односно у процесу математичког мишљења користимо логичке операције које се заснивају на разумевању и употреби наведених везника. За јасно и прецизно одређење свих логичких операција неопходно је познавање логике.

Логика и психологија - Логика у центар свог интересовања ставља мишљење, које је одређено као „субјективна психичка функција у којој свесни субјект представља, или замишља, садржаје који или стварно постоје или за које се претпоставља да би могли да стварно постоје или који постоје само као замишљени. Тај замишљени садржај назива се логички садржај мишљења“ (Аћимовић, 2012: 342). У психологији мишљење је „ментална симболичка активност којом посредно сазнајемо о стварности увиђањем и откривањем“ (Брковић, 1995: 32). У наведеном се види разлика у схватању мишљења са становишта логике и са становишта психологије. Без обзира на различито поимање способности мишљења, логика и психологија, бавећи се феноменом мишљења, имају и доста заједничког. Психологија се често наслања на сазнања логике која се односе на мишљење, у чему се огледа њихова повезаност. За логику и психологију можемо рећи да се баве проучавањем истог феномена само са различитих становишта. Поред повезаности, јасна је и разлика у приступу. „Психолошка истраживања мисаоних процеса закључивања показују да се свакодневна мисаона активност не одвија по правилима мишљења која налазимо у логици“ (Група аутора, 1989: 56).

2.4. Концептуални оквир у разматрању логичког мишљења

Језик нам омогућава изражавање мисли и комуникацију. Мишљење се развија заједно са језиком са којим је и нераскидиво повезано. Језик има огромну улогу у развоју људског размишљања. Без језика људска мисао не би могла ни настати ни постојати (Виноградов, Кузмин, 1954: 8). С друге стране, могуће је размишљати и без познавања науке логике, као што је могуће и говорити, користити језик, без познавања граматике, али је познавање науке о логици важно како бисмо научили како изразити своје мишљење и правилно користити логичке форме. Изучавање логике је од великог значаја за савладавање нових знања и „помаже у проналажењу и истицању оног главног, основног у материјалу који се проучава, да се боље схвати његов садржај“ (Виноградов, Кузмин, 1954: 9).

Мишљење представља индиректно и уопштено спознавање стварности. Процес когниције започиње сензацијама које настају услед изложности појава чулима. Приликом перцепције, човек не опажа само једно својство предмета, него више њих истовремено, па тако сензације појединачних својстава се у уму вежу у једну слику предмета, тј. перцепцију. У свом мозгу човек обрађује осете, сензације и перцепције и та активност се назива размишљање (Виноградов, Кузмин, 1954: 11). У том процесу размишљања, човек користи различите мисаоне поступке. Он примењује: поређење, анализу, синтезу, апстракцију, генерализацију и сл. Наведене речи указују на значај који логика има у схватању и проучавању логичког мишљења.

Логика се бави „питањем адекватности или доказном вредношћу различитих врста сведончастава“ (Коен, Нејгел, 2006: 40). Суштински циљ логике се постиже „ако можемо да анализирамо разне форме закључивања и да дођемо до систематског начина да разликујемо исправне форме од неисправних“ (Коен, Нејгел, 2006: 55). Према томе, појединац може логички да мисли тек онда када развије начин да разликује правилно од неправилног закључивања.

Полазећи од дефиниције логике, по којој се она често дефинише као проучавање закона мишљења, као неопходни услови за исправно мишљење узимају се три принципа: „*принцип идентитета, принцип противречности* и *принцип искључења* *трећег*" (Коен, Нејгел, 2006: 206). „*Принцип идентитета* тврди: *Ако је било који став истинит, он је истинит. Принцип противречности* тврди: *Ниједан став не може бити истинит и лажан. Принцип искључења трећег* каже: *Неки став мора бити или истинит или лажан*" (Коен, Нејгел, 2006: 206). Ако су наведени принципи прихваћени као логички принципи, онда „предмет логике уопште не чине људске мисли... Наведени принципи су услови исправног мишљења, а услови исправног мишљења сами по себи нису мисли" (Коен, Нејгел, 2006: 206). Решење овог недостатка Коен и Нејгел виде у чињеници да поред ова три традиционална принципа или „закона мишљења", постоје и са њима подједнако право имају и принцип силогизма, принцип таутологије, симплификације, апсорпције и други (2006: 207). Ове принципе, или законе мишљења, можемо универзално применити и „као принципе закључивања њих мора да усвоји свако, иначе би обеснажио сваку мисао" (Коен и Нејгел, 2006: 210). Са друге стране наведени логички принципи су нужни и садрже се у сваком мисаоном процесу. „Логички принципи се потврђују и показују се у сваком закључивању које обављамо, у сваком истраживању које успешно приводимо крају" (Коен, Нејгел, 2006: 211).

Посебно значајно за тему нашег рада је прилика за истраживање и функција истраживања. Човек мора бити покренут на истраживање. Да би био покренут, мора постојати неки проблем који треба решити, а који ће га покренути на истраживање. У самом процесу истраживања човек користи мисаоне операције и мишљење. „Ниједно истраживање не може да почне ако се не *осети нека тешкоћа* у практичној или теоријској ситуацији. То је тешкоћа или проблем који води наше тражење *правилности међу чињеницама* помоћу којих проблем може бити решен" (Коен, Нејгел, 2006: 220). Дакле, када се јави проблем, он представља повод за наше истраживање. Циљ истраживања је да се дође до решења. Осим велике улоге мишљења у решавању проблема, важна је и способност уочавања проблема. „Способност да се у неком сировом искуству опази прилика за постављање проблема, а нарочито проблема *чије решење има значај за решавање других проблема*, није честа особина људи. Јер, немогуће је дати правило помоћу којег људи могу научити да не постављају бесмислена питања. Бити осетљив на тешкоће тамо где мање обдарени пролазе неузнемирени сумњом знак је научног генија" (Коен, Нејгел, 2006: 220). Ове речи указују на појединце који решавањем проблема долазе, не само до решења као таквог, него до решења које може бити схваћено као законитост, правило за решавање других проблема. Када је проблем постављен, следи постављање релевантних хипотеза. Хипотезе представљају неку врсту пробног објашњења. „Таква пробна објашњења сугеришу нам нешто што је у предмету који истражујемо или наше раније знање. Када су та решења формулисана као ставови, називају се *хипотезама*" (Коен, Нејгел, 2006: 221). Следећи корак у решавању проблема је дедуктивно развијање хипотеза, да се „одреди која се од могућих објашњења или решења проблема најбоље слажу са чињеницама" (Коен, Нејгел, 2006: 402). Хипотезе треба да усмере истраживање појединца. Задатак истраживања је да провери које хипотезе могу бити решења проблема. Слично је и у настави математике, тј. у процесу решавања математичких проблема. Током решавања математичких проблема, ученик пролази пут налик на онај који у току истраживања пролази истраживач. Стога је за наставу математике посебно важно правилно логичко размишљање у свим етапама решавања проблема.

Логика представља „учење о умењу мишљења" (Christophu Sigwartu, prema Petrović, 2013: 130). Предмет логике су „процеси, облици и закони мишљења као стваралачког субјективног одражавања објективне материјалне стварности... Предмет логике су облици, процеси, принципи, правила, закони и методе предметносадржајног, логички заснованог и логички вредног мишљења“ (Šešić, prema: Petrović, 2013: 132).

За логику се понекад каже да је „наука о облицима ваљаног *мишљења*“ (Petrović, 1987: 7). Како се у већини наведених дефиниција помиње појам *мишљење,* морамо нагласити да се и сам појам мишљење може различито схватати. Прво схватање се односи на употребу речи ,,мишљење“ у свакодневном говору и тада се реч „мишљење“ схвата врло широко, као заједнички назив за све психичке процесе, спознајне, емоционалне и вољне. То је најшире значење појма *мишљење*. У другом, нешто ужем значењу, мишљење се употребљава као назив за све *спознајне психичке процесе*, од осета, опажања, предочавања и памћења до поимања, суђења и закључивања. У трећем, још ужем смислу, мишљење значи исто што и *апстрактно мишљење*, тј. скуп спознајних процеса чији елементи нису осети, перцепције, него појмови. То су дакле поимање, суђење, закључивање и доказивање. Нешто другачије значење је у четвртом смислу речи *мишљење*. У четвртом смислу, мишљење се не односи на сам процес мишљења, него оно што мислећи мислимо. Овако схваћено мишљење се назива *мисао*. Прихватајући наведена значења речи мишљење и наведену терминологију, психологија проучава *мишљење*, а логика *мисли* (Petrović, 1987: 7–8). Наведене речи сведоче о уској повезаности психологије и логике. За логичко мишљење, од посебног значаја су друго и треће схватање појма мишљење, где се види његова улога у процесу сазнавања и улога у процесу апстрактног мишљења.

3. ЛОГИЧКО МИШЉЕЊЕ УЧЕНИКА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Највиши облик мисли је у математици.
Платон

Готово да нема потребе истицати колико је логичко мишљење ученика важно и значајно за наставу математике, па и за почетну наставу математике. Значај логичког мишљења за математичко, па и целокупно, образовање огледа се у чињеници да „сам процес усвајања математичких појмова није могућ без елемената логичког мишљења" (Маричић и сар. 2017: 39). Логичко мишљење, као облик мишљења, нужно је у свим етапама формирања математичких појмова. Поред самог процеса формирања појмова, логичко мишљење је потребно и при њиховом овладавању, коришћењу и манипулисању њима.

Ако као задатак наставе математике поставимо *развијање ученикове способности логичког мишљења*, јасно је да га морамо и остварити у почетној настави математике. Како би захтев био остварен, потребно је отклонити бројне проблеме који се односе на његову уопштеност и нејасну одређеност, конкретно, у почетној настави математике.

Све више се истиче значај и потреба обраћања пажње на одређења феномена мишљења у логици (Антонијевић, 2014). Полазећи од наведеног става, у раду ћемо поћи од одређења феномена мишљење, као и од тумачења и схватања логичког мишљења које оно има у оквирима логике. Мишљење се најчешће схвата и дефинише као „субјективно стваралачко схватање објективне стварности, природне, друштвене, биолошке и психичко-мисаоне" (Šešić, 1983: 77). Мишљење „обухвата много сложених и суптилних психичких операција, процеса који воде сазнању... Математичко мишљење је логичко мишљење" (Prvanović, 1970: 14). Овде ћемо додати да није оправдано поистовећивати математичко и логичко мишљење, јер математичко мишљење, поред логичког, обухвата и друге врсте мишљења. Оно је комплекснија и још сложенија способност од логичког мишљења.

У схватању и решавању математичких проблема „неопходно је да ученик, осим учења садржаја математике, овлада основним логичким законима и формама мишљења" (Pinter i sar. 1996: 24). Мишљење ученика се заснива на логичким основама и стога су оне посебно важне за почетну наставу математике. Логичке основе у почетној настави математике „могуће је посматрати у оквирима који обухватају:

- логичке операције,
- мисаоне поступке и
- законе закључивања" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 79).

Ваља нагласити да су логичке основе, односно различити мисаони поступци, логичке операције и закони закључивања предуслов решавања математичких проблема и да је њихово подстицање и развијање у почетној настави математике, с разлогом, један од важних задатака. То, свакако, говори о важној улози логичког мишљења у решавању свих математичких проблема. За почетну наставу математике значајне су логичке операције „конјункција, дисјункција, негација, импликација и еквиваленција" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 79). Наведене логичке операције се односе на коришћење речи *и, или, не, ако...тада, ако и само ако*. Приликом решавања математичких задатака наведене операције се веома често користе. У почетној настави математике је од посебног значаја да ученици схвате значење наведених термина и да умеју правилно да их користе.

Иако се развијање логичког мишљења ученика истиче као важан задатак наставе математике, реализацију овог задатка у пракси (у почетној настави математике) прате бројни проблеми. Највећи проблем који стаје на пут развијању логичког мишљења ученика јесте дефинисање самог појма *логичко мишљење* и његово јасно одређење у контексту почетне наставе математике.

У раду ћемо настојати да логичко мишљење операционализујемо преко различитих способности које учествују у процесу логичког мишљења и посебно ћемо их разматрати, како би се јасно могла сагледати комплексност и сложеност овог феномена. Пре свега, ослонићемо се на одређења логике и упориште које логичко мишљење има у самој логици, а које смо изнели на почетку рада. Са друге стране, при операционализацији морамо настојати да она буде усклађена са узрастом ученика млађих разреда, као и са специфичностима садржаја у почетној настави математике.

3.1. Појам логичког мишљења ученика у почетној настави математике

Прихватајући дефиницију по којој је математичко мишљење сложена интелектуална активност у којој долазе до изражаја и међусобно се преплићу и допуњују „логичко, критичко и стваралачко мишљење“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 439), долазимо до закључка да је логичко мишљење само једна од компоненти математичког мишљења.

Логичко мишљење „полази од прецизно формулисаних судова (премиса), затим следи проверавање тачности полазних премиса, а затим утврђивање њихових међусобних односа и извођење закључака на основу тих полазних судова“ (Група аутора, 1989: 56). Наведена дефиниција указује на значај закључивања у логичком мишљењу. Ова дефиниција се ослања на схватања и принципе логике. Разматрајући логичко мишљење, срећемо и схватање да „само логичким мишљењем се долази до сазнања узрочности, зависности, истине“ (Prvanović, 1970: 14). Прихватајући овакво схватање логичког мишљења, можемо рећи да су у логичком мишљењу посебно важне способности уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената о којима се закључује.

Логичко мишљење се најчешће дефинише као мишљење које следи принципе логике. Логичко мишљење се заснива на „одредбама речи и њиховим значењима дефинисаним појмовима и логичким законима; то је најразвијенији тип мишљења“ (Брковић, 1995: 29). Ова дефиниција сведочи о значају језика и одредаба речи за процес мишљења, односно о повезаности језика и мишљења. Логичко мишљење представља „оспособљеност појединца да се користи специфичним логичким методама“ (Шпијуновић, 1994: 48). У оквиру логичког мишљења у настави математике доминирају мисаони поступци: анализа, коју у настави прати синтеза, апстракција и генерализација које доминирају у процесу формирања појмова, а због узраста ученика у почетку математичког образовања значајно место припада и конкретизацији, специјализацији и упоређивању. Од облика закључивања у настави математике значајно место припада индуктивном и дедуктивном закључивању, закључивању по аналогији, а среће се и интуиција. Наведени мисаони поступци и процеси закључивања су од посебног значаја за почетну наставу математике, јер долазе до изражаја у процесу формирања математичких појмова и oперисања математичким појмовима. Без наведених мисаоних процеса и процеса закључивања, нема ни формирања математичких појмова, ни успешног математичког образовања. Другим речима, ако наведене мисаоне процесе и процесе закључивања схватимо као компоненте логичког мишљења, види се његов значај за почетну наставу математике и за математичко образовање уопште. У раду ћемо се посебно и детаљно бавити наведеним мисаоним поступцима. У процесу формирања математичких појмова наведени поступци су повезани, па се логичко мишљење не може једнозначно одредити, већ га треба посматрати као сложену интелектуалну активност. Такође, не смемо занемарити ни логичке операције, које су компонента логичког мишљења.

Логичко мишљење представља „способност ученика да користи и разуме значење логичких операција (конјункција, дисјункција, негација, импликација и еквиваленција), мисаоних операција (анализа, синтеза, конкретизација, апстракција, генерализација, идентификација, специјализација и друге) и облике закључивања (интуиција, аналогија, индукција, дедукција)“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 440).

У литератури се указује на две важне чињенице када је у питању логичко мишљење: да је неоправдано логичко мишљење поистовећивати са математичким мишљењем и да су већином одреднице логичког мишљења, са становишта методике математичког образовања, сувише уопштене и неодређене (Шпијуновић, 1999: 349). За потребе рада смо прихватили широку дефиницију математичког мишљења, по којој је логичко мишљење само једна компонента математичког мишљења, а коју треба јасније и прецизније одредити.

Ако пођемо од наведених схватања логичког мишљења, која смо до сада изнели, и прихватимо да логичко мишљење представља сложену, односно веома комплексну менталну активност у којој долазе до изражаја логичке операције, мисаони поступци и различити облици закључивања, морамо нагласити да су ти елементи вишеструко повезани и да се у процесу мишљења преклапају, допуњују и не могу егзистирати једни без других. Стога, логичко мишљење, условно, можемо представити дијаграмом (Дијаграм 1). На дијаграму се јасно види да наведене компоненте логичког мишљења имају заједничких елемената. То највише долази до изражаја у процесу решавања математичких задатака. Примењујући, на пример, одређене логичке операције и низ мисаоних поступака, ученици долазе до закључака и на тој основи решавају задатак.

Дијаграм 1. *Логичко мишљење*

У процесу логичког мишљења ученика до изражаја долазе различите мисаоне способности: способност ученика да анализира задатак (проблем који добије), анализира елементе у задатку, способност да анализира и успоставља специфичне везе и односе између елемената у задатку, способност успостављања различитих веза и односа између елемената датих у задатку и свог искуства и способност да извлачи закључке на основу тих анализа и успостављених веза. У процесу логичког размишљања ученика до изражаја долазе и способност откривања правила и законитости које владају између елемената и способност закључивања на основу тих уочених правила. Дакле, у процесу логичког мишљења до изражаја долази способност расуђивања о проблему који се решава, његово сагледавање из више различитих углова, као и способност успостављања различитих релација између елемената датих у задатку и способност закључивања на основу тих релација. Такође, током процеса логичког мишљења, често су покренуте и оригиналност, досетљивост и духовитост, способности које помажу у откривању решења и без којих је, често, и немогуће решити неки проблем. За логичко мишљење важно је и увиђање сувишних елемента у задатку који ометају правилно размишљање и ваљани пут решавања проблема. У свему наведеном се истичу различите способности логичког мишљења које се могу идентификовати у различитим фазама решавања математичких задатака у почетној настави математике.

Тако схваћено логичко мишљење је повазано и са интелигенцијом. Х. Гарднер (Howard Gardner, 1993) интелигенцију дефинише преко способности које имају своје место и значај у решавање разноврсних проблема. Према његовом мишљењу, вишеструка интелигенција се састоји из седам различитих карактеристика. За математику је од посебног значаја *логичко-математичка интелигенција* која подразумева добро логичко резоновање и закључивање, успостављање узрочно-последичних веза, способност класификације идеја, способност генерализације, способност упоређивања, способности решавања математичких проблема, извођење основних математичких операција и сл. Ове способности долазе до изражаја у решавању математичких загонетки, мозгалица и сличних математичких проблема. Кључни елемент ове Гарднерове интелигенције јесте логика (логичко мишљење, логичко резоновање, логичко размишљање) која се користи као средство за решавање проблема. Логичко-математичка интелигенција се односи на *логичко организовање података* и *логичко закључивање*. Јасно је да логичко-математичка интелигенција, како је Гарднер одређује, има значајан утицај на логичко мишљење којим се ми у раду бавимо.

Логика је наука о расуђивању, доказима, размишљању и закључивању. Способност разумевања је централна за логичко размишљање. Логично размишљање је камен темељац математике. Математика се заснива на структурама математичког мишљења. У оквиру било које теме у математици постоји много различитих врста исказа који се могу направити. Изјаве/искази које се односе на одређену тему могу се назвати структуром (Watson, Mason, prema: *NRICH*, 2013). Аутори Ватсен и Мејсен (Watson, Mason, 2013) наводе *математичке изјаве/исказе:* 1) дефиниције, примери, претпоставке, симболизација, расуђивање; 2) чињенице, против – примери, проблеми, објашњења, везе; 3) особине, технике, заступање, образложења, односи; 4) теореме, инструкције, нотације, докази, повезаност (Watson, Mason, prema: *NRICH*, 2013).

У настави је могуће постићи различите начине математичког размишљања. Ученици могу да постигну размишљање вишег реда ако су одговарајућим питањима и упутствима вођени од стране наставника (Watson, Mason, prema: *NRICH*, 2013). Аутори Ватсен и Мејсен наводе радње којима ученици могу постићи размишљање вишег реда, које називају математичко мишљење: 1) навођење примера, специјализација; 2) завршавање, брисање, исправљање; 3) поређење, сортирање, организовање; 4) промена, варирање, реверзибилност, измена; 5) генерализација, претпостављање; 6) објашњавање, оправдавање, верификовање, убеђивање, оповргавање (Watson, Mason, prema: *NRICH*, 2013).

Кенет Тобин и Вилијам Капи (Kenneth Tobin, William Capie, 1981), приликом развијања теста логичког размишљања, издвајају пет начина логичког размишљања: контролне варијабле, пропорционално расуђивање, комбинаторно размишљање, вероватноћа и корелационо резоновање.

Овде смо покушали изнети дефиниције логичког мишљења и других појмова који су у блиској вези са логичким мишљењем, а од којих ћемо поћи приликом операционализације појма *логичко мишљење* у почетној настави математике.

3.1.1. Логичко мишљење ученика као задатак почетне наставе математике

До 2018 године, као важан задатак наставе истицано је да настава треба да развија „ученикову способност посматрања, опажања и логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења“ (*Правилник о наставном програму математике,* 7/2010, 3/2011, 7/2011, 1/2013, 11/2014, 11/2016 и 12/2018). Последњих година дефинисан је само циљ учења предмета *математика* „да ученик овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основе апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за даљи развој математичких појмова“ (*Правилници о програму наставе и учења*, 2017: 25; 2018: 72; 2019: 34; 2019: 39). У наведеном циљу наставе математике, развијање логичког мишљења није посебно истакнуто, али је логичко мишљење неопходно за бављење и манипулисање математичким моделима, принципима, системима и знањима. Оно је нужно и за развијање апстрактног мишљења и критичког преиспитивања, као и за примену научених и усвојених математичких знања у свакодневном животу и у сусрету са најразноврснијим проблемима. Посебно је значајна његова улога у даљем развијању математичких појмова. Иако није јасно издвојено као посебан сегмент циља учења предмета *математика*, подстицање и развијање логичког мишљења се намеће као важан задатак наставе математике. Основни недостатак је у томе што логичко мишљење ученика, из наведених разлога, треба развијати, али појам *логичко мишљење* није јасно дефинисан, па није сасвим јасно шта тачно треба развијати и на који начин то чинити у пракси. Другим речима, учитељ зна шта треба да развије као крајњи задатак, али он нема јасну представу шта је то што треба да постигне, а још мање на који начин то може постићи. Са друге стране, услед непостојања јасне дефиниције сваке врсте математичког мишљења, није загарантована једнакост у схватању истих од стране учитеља, па самим тим ни једнакост у остварености овог задатка у настави. Ако се нешто пред учитеље поставља као задатак и очекује његово остваривање, оно мора бити јасно одређено и дефинисано, а не уопштено дато.

У литератури се неретко логичко мишљење истиче као посебан и важан задатак наставе математике и математичког образовања. Из специфичности математике као науке произилазе специфични циљеви наставе математике, међу којима се као посебан циљ истиче формирање логичког мишљења (Матељски, према: Дејић, 2009: 450).

Често се истиче важност подстицања и развијања виших когнитивних способности и вештина ученика, чији развој настава математике мора омогућити, а међу којима важно место припада логичком мишљењу, аргументовању и закључивању (*Курикулум наставног предмета Математика за основне школе и гимназије,* 2019).

Међу задацима савременог математичког образовања истиче се као важност *оспособљавање ученика да мисли* што, између осталог, обухвата и „изграђивање математичког мишљења уопште и посебно оспособљавање за математичко (и логичко) расуђивање“ (Prvanović, 1970: 13). Ученике треба „поступно и примерено научити *анализирати, синтетизовати, конкретизовати, апстраховати, индуцирати, дедуцирати, генерализовати, специјализовати, уочавати аналогије*“ (Kurnik, 2008: 320). Дакле, ученике треба поступно и систематски, од првих корака математичког образовања, навикавати да логички мисле, а то значи континуирано, од првих дана школовања, подстицати и развијати њихово логичко мишљење.

Развијање логичког мишљења ученика „није фраза или идеал коме треба тежити и који ће у процесу математичког образовања бити остварен сам по себи, већ конкретан захтев и обавеза за учитеље и ауторе уџбеника да осмишљено раде на његовој реализацији“ (Шпијуновић, 1999: 350). Наведено јасно указује на одговорну улогу учитеља у подстицању и развијању логичког мишљења, као и на могућност подстицања логичког мишљења различитим задацима. За решавање већине проблема потребно је да особа логички мисли како би решила проблем. Када се каже да у настави ученици треба да логички мисле, не наводе се способности које би тако схваћено логичко мишљење укључивало. Стога се јавила потреба прецизнијег одређења логичког мишљења, односно потреба његове операционализације и јасног одређења, преко одговарајућих способности.

Проблеми који се јављају при разматрању логичког мишљења ученика у почетној настави математике, поред нејасног одређења самог задатка *развијање логичког мишљења* и непостојања прецизног одређења појма *логичко мишљење ученика у почетној настави математике*, настају и услед чињеница да у уџбеницима у области методике наставе математике и приручницима нема јасних и прецизних теоријских и практичних упутстава за подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

Развијање логичког мишљења, као важан задатак почетне наставе математике, наилази на бројне проблеме, који се, у првом реду, односе на тачно и прецизно одређење *логичког мишљења* у почетној настави математике. Како би се наведени проблеми отклонили, веома је важно операционализовати логичко мишљење и на тај начин га прецизније и јасније одредити преко способности које га сачињавају. На тај начин биће лакше и учитељима који ће имати јаснију представу о томе шта и како, којим механизмима да то чине у оквирима почетне наставе математике, како би те способности логичког мишљења развијали код својих ученика, а самим тим и развијали логичко мишљење ученика у целини.

3.1.2. Логичко резоновање и расуђивање у почетној настави математике

Овде ћемо поћи од шеме креативног понашања. Шема креативног процеса, има следећу садржину:

„I **Когнитивне способности,**

II **Конвергентно мишљење,**

III **Дивергентно мишљење,**

IV **Евалуативне способности**“ (Kvaščev, 1975: 124).

У когнитивне способности се убрајају: откривање, препознавање, схватање, разумевање. Ту спадају следеће активности: општа радозналост, захтев за схаватањем узрока, припрема поновног откривања.

У конвергентно мишљење се убрајају: едукација нових идеја и релација, различите способности резоновања, редефиниција, трансформација, откривање најбољих или конвенционалних решења и импровизација. Овде до изражаја долазе следеће активности: трансформација, редефиниција, импровизација, способност да се одаберу најбоље алтернативе, извођење нових идеја на основу датих (Kvaščev, 1975: 124).

Шема креативног понашања укључује у себе елементе логичког мишљења, а то су: резоновање, схватање узрока, стварање нових и ретких идеја полазећи од оних које су дате. Способности резоновања и решавања проблема које спадају у групу когнитивних способности и способности конвергентног и дивергентног мишљења имају посебан значај. У способности резоновања спадају:

„1. способност општег резоновања која има следећу садржину: манипулисање симболима, дефинисање проблема, тестирање хипотеза;

2. способност индуктивног и дедуктивног резоновања;

3. логичко резоновање:

4. едукација перцептуалних и концептуалних релација и едукација корелата“ (Kvaščev, 1975: 125).

Наведене способности резоновања, а пре свега мислимо на способности индуктивног и дедуктивног закључивања и логичко резоновање, су елементи логичког мишљења. Без логичког резоновања нема ни логичког мишљења, а индуктивно и дедуктивно закључивање спадају у способности закључивања које су део (компонента) логичког мишљења.

Што се тиче решавања проблема, ту су откривене следеће способности:

„1. вербално схватање;
2. класификација појмова;
3. едукација релација;
4. опште резоновање;
5. способност предвиђања;
6. флуентност идеја;
7. асоцијативна флуентност;
8. оригиналност;
9. едукација корелата;
10. дедукција;

11. осетљивост за проблеме“ (Kvaščev, 1975: 125).

Већина побројаних способности имају и велику улогу у логичком мишљењу.

Иако Квашчев (1975) говори о креативном понашању личности и о креативним способностима, посебну пажњу нам је привукла способност *логичко резоновање*. Наведена способност директно упућује на логичко мишљење. О повезаности логичког мишљења и креативног понашања сведочи и чињеница да „способност да се критички мисли, критичка свест, способност да се мисли јасно, да се логички резонује, да се решавају проблеми – истицани су током историје као водећи образовни циљеви бројних филозофа и педагога“ (Маричић, Шпијуновић, 2009: 61). У наведеним речима ми подвлачимо *да се мисли јасно* и *логички резонује* и истичемо да су то не само категорије креативности и критичког мишљења, већ истовремено и категорије логичког мишљења.

Другим речима, логичко резоновање можемо одредити и као компоненту логичког мишљења. Резоновање се дефинише као „способност извођења (едукације) корелативних (нових) идеја на основу датих“ (Kvaščev, 1975: 126). Да би дошло до извлачења нових идеја из датих потребно је успостављање узрочно-последичних веза између елемената (датих и нових) и закључивање на основу тих веза, што су компоненте (способности) логичког мишљења.

За логичко мишљење посебно је значајно логичко резоновање. За решавање различитих проблема у почетној настави математике неопходне су различите врсте резоновања:

1. резоновање и решавање проблемске ситуације,
2. резоновање као способност формулисања и откривања структуре проблема,
3. резоновање и решавање проблема,
4. резоновање као манипулисање апстрактним симболима,
5. резоновање о аритметичким проблемима,
6. резоновање као заједнички фактор закључивања на перцептуалном материјалу (Kvaščev, 1975).

Такође, за логичко мишљење од великог значаја је и логичко расуђивање. Концепцију математичких способности чини 30 различитих компоненти математичких способности, од којих се најчешће помињу:

„1. просторни фактор;
2. логичко расуђивање;
3. апстраховање, оперисање апстракцијама;
4. уопштавање, генерализација;
5. способност коришћења симбола;
6. памћење;
7. дедукција;
8. анализа, синтеза;
9. довитљивост;
10. нумерички фактор;
11. брзина мисли;
12. критичко мишљење“ (Дејић, Михајловић, 2014: 40–41).

Од поменутих математичких способности „апстракција и логичка схема мишљења спадају у најважније компоненте које омогућавају бављење математиком“ (Дејић, Михајловић, 2014: 41). Можемо додати да већина наведених математичких способности истовремено имају значај и за логичко мишљење или су чак и способности логичког мишљења.

У овом поглављу, желели смо указати на значајне компоненте логичког мишљења до којих смо дошли проучавањем литературе и узети их у обзир приликом операционализације појма логичко мишљење. Кључни појмови који се помињу у већини поменутих разматрања логичког мишљења су: логичко резоновање, логичко расуђивање, закључивање, апстракција, логичке операције, мисаоне операције и сл. Од наведеног се свакако мора поћи приликом операционализације логичког мишљења.

3.2. Логичке операције у почетној настави математике

У раду смо, узимајући у обзир апстрактност математичких садржаја са којима се сусрећу ученици млађег школског узраста и развојне одлике тог узраста ученика, логичке операције (конјункција, дисјункција, негација, импликација, еквиваленција и знање значења и коришћења термина (и, или, не)) издвојили као посебну компоненту логичког мишљења у почетној настави математике. Када говоримо о логичким операцијама у почетној настави математике, прво помислимо на употребу термина „и“, „или“, „не“, „ако...тада“, „ако и само ако“. Како бисмо јасније разумели поменуте логичке операције у почетној настави математике, прво ћемо размотрити значење ових везника у свакодневном говору и функцију коју имају у настави математике.

У свакодневом говору, па и на часовима математике, често користимо речи „и“, „или“, „не“, „ако...тада“, „ако и само ако“. Таква употреба у свакодневном говору не говори нам много о томе шта је логичка функција наведених речи или је она често различита. На пример, у реченици „Узми или остави“ искључује се трећа могућност, док у реченици „Сви овде присутни имају петицу из математике или српског“, укључује се могућност петице из једног или другог предмета. Таквих примера је неограничено у свакодневном говору.

У настави математике наведене речи „и“, „или“, „не“, „ако...тада“ морају имати јасну и недвосмислену логичку функцију. Стога је важно од првих дана школовања навикавати ученике на правилну употребу поменутих везника. „У изражавању математичких садржаја поменути везници морају имати прецизну логичку функцију, а што значи да је смисао сложене реченице тада једнозначно одређен смислом реченица од којих је састављена“ (Марјановић, 1996: 74). Правилном употребом поменутих везника од стране учитеља код ученика ће се постепено постићи жељени циљ, правилна употреба ових везника у почетној настави математике. Тиме се ствара добра основа за даље развијање логичких операција у даљем математичком образовању. „А и онда када програм математике за ниже разреде не предвиђа тему - речи *и, или, ако... тада*, добро познавање основа математичке логике служи учитељу да исправно користи ове речи, а и да такође развија осећај за значај правовременог рада са изразима у којима се јављају слова у улози непознате или променљиве“ (Марјановић, 1996: 74).

Овде ваља напоменути да код ученика од самих почетака организованог математичког образовања ваља развијати и смисао за логичко вредновање исказа, тј. развијати смисао да исказима додељују једну од вредности „истинит“ или „лажан“. Због узраста ученика, у почетку ваља користити термине „тачан“ и „нетачан“. На тај начин ученике од првих дана математичког образовања припремамо за правилно формирање логичких операција са чијим изучавањем ће се детаљније и више бавити у наставку математичког образовања.

У раду ћемо посебно обратити пажњу на следеће логичке операције: конјункцију, дисјункцију, негацију, импликацију и еквиваленцију. Такође, посебно ћемо се бавити одређењем способности схватања значења речи „и“, „или“, „не“ и њиховим правилним коришћењем у почетној настави математике. Наведену способност смо, за потребе рада, посебно издвојили као способност логичког мишљења, јер као таква је чешће у примени у почетној настави математике, те ју је лакше подстицати и развијати код ученика млађег узраста путем различитих математичких задатака.

3.2.1. Конјункција

Када се говори о логичким основама почетне наставе математике „конјункција (*и*) исказа p и q је исказ p ∧ q (p и q) који је тачан само ако су оба исказа p и q тачна“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 79). „Спајањем двају (или више) исказа речју *и* добија се њихова такозвана **конјункција**, или **логички производ**; тако спојени искази називају се **чланови конјункције**, или **чиниоци логичког производа**... Тврдити истинитост конјункције двају исказа исто је што и тврдити да су оба исказа који је сачињавају истинити. Ако је то заиста тако, конјункција је истинита, али ако је бар један од њених чланова лажан, лажна је и цела конјункција“ (Tarski, 1973: 19).

На пример: *2 је позитиван цео број* и *2 < 3*. Ако су наведени искази спојени, добија се конјункција *2 је позитиван цео број и 2 < 3*.

У почетној настави математике бројни су задаци који од ученика захтевају логичку операцију *конјункцију*, као и задаци код којих се користи везник „и“ да повеже више захтева које ученик приликом решавања задатка истовремено мора узети у обзир. Код таквих задатака, учитељ плански и систематски, најмлађе ученике, од првих дана математичког образовања, уводи у логичку операцију *конјункцију*. У почетној настави математике, када се говори о конјункцији, важно је да учитељ правилно и прецизно користи везник „и“, као и да то захтева од својих ученика, како би спонтано припремио најмлађе ученике за наведену логичку операцију.

У наставку ћемо навести неколико примера задатака у којима се користи конјункција и код којих се од ученика тражи да два или више захтева у исто време узме у обзир како би правилно решио математички задатак. Другим речима, код задатака код којих је присутна конјункција, ученик оба исказа (податка) мора узети у обзир као тачна и користити приликом решавања задатка.

Пример 1. *У датом низу бројева заокружи све парне бројеве дељиве са три.*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

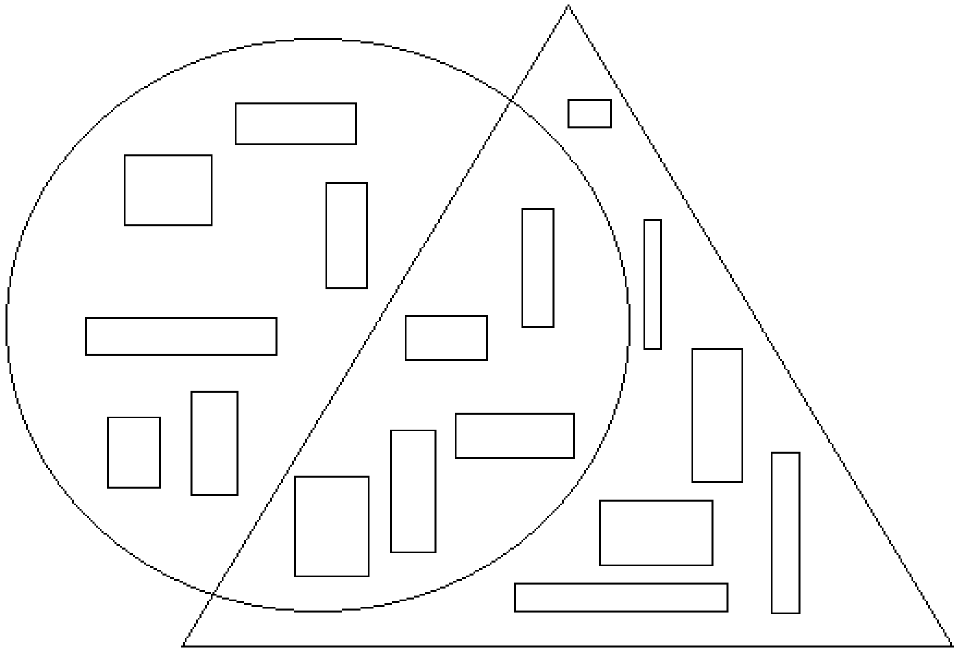
У наведеном примеру конјункција се огледа у два захтева „паран“ и „дељив са три“, која истовремено морају бити задовољена, па ученик међу понуђеним бројевима тражи оне који испуњавају оба услова, чиме показује да је разумео смисао конјункције и на тој основи решава задатак. У наведеном примеру смисао конјункције се огледа у томе да оба исказа дата у формулацији задатка ученик узима истовремено као услове. Идентичан захтев је и у следећем примеру.

Пример 2. *У датом низу бројева заокружи све који су дељиви са четири, а истовремено и са три.*

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40

У наведеном примеру, као и у првом, ученик међу понуђеним бројевима тражи оне који испуњавају оба услова дата у задатку. Конјункција је тачна ако су оба услова тачна. Због чињенице да се формулацијом задатка од ученика захтева истовремено задовољење два услова, решења су они бројеви који истовремено испуњавају оба услова, у чему се огледа смисао конјункције при решавању.

Пример 3. *Обој правоугаонике који се налазе у кругу, а истовремено и у троуглу.*



Формулација наведеног задатка захтева да ученик схватајући суштину конјункције, обоји оне правоугаонике који се налазе у пресеку датог круга и троугла. У овом примеру, конјункција се огледа у схватању да се правоугаоници које треба обојити налазе истовремено у кругу и у троуглу.

Наведени примери задатака, у којима се од ученика захтева истовремено узимање у обзир два или више услова као тачна, су примери стварања добре основе за подстицање конјункције већ у првим разредима основне школе.

Пример 4. *Напиши пет бројева који су дељиви са 5, а истовремено и са 10.*

У примеру 4, ученик је у прилици да поштујући захтеве задатка повезане конјункцијом, долази до решења тако што оба захтева укључује и тиме показује да схвата смисао конјункције као логичке операције. Условом задатка и конјункцијом су повезана два захтева што подразумева да оба захтева истовремено морају бити испоштована решењем. Код овог примера, од ученика се захтева да сам пронађе решења што представља тежи захтев за њега, јер решења нису понуђена.

Пример 5. *Међу парним бројевима седме стотине којима је цифра десетице 4, одреди онај који је истовремено дељив са три и са четири.*

Пример 5 је нешто сложенији и од ученика захтева разумевање конјункције приликом проналаска бројева из тражене стотине који уз то морају испуњавати још два захтева (на месту цифре десетице имају цифру 4 и бити парни). Након тога, другим делом задатка, од ученика се тражи да од тих бројева уз разумевање конјункције издвоји онај број који истовремено испуњава два захтева (дељив и са три и са четири). Таквим схватањем, ученик показује да разуме логичку функцију повезивања и истовременог задовољавања више услова који су дати у формулацији задатка, а самим тим, ученик показује да је схватио конјункцију као логичку операцију. Како је наведени задатак сложен, тј. састоји се из два дела, а сваки део се састоји из два или више захтева повезаних конјункцијом, корисно је да у почетку учитељ навикава ученике да овакве и сличне задатке решавају „корак по корак“, тј. један по један део.

Нешто другачији је пример 6, који од ученика, такође, захтева разумевање логичке операције конјункције.

Пример 6. *Дата су три скупа. Распореди (упиши на одговарајућа места) елементе (бројеве) тако да:*

а) број 1 припада само скупу А,

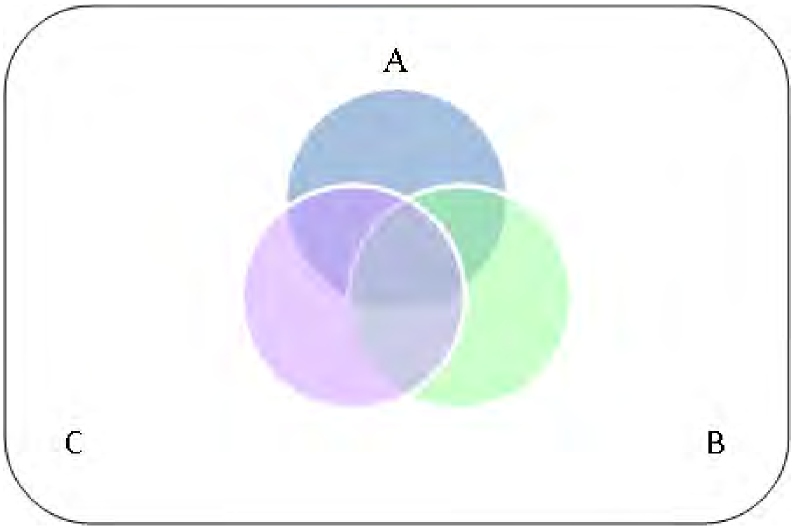
б) 2 припада само скуповима А и В,

в) 3 припада само скупу В,

г) 4 припада само скупу С,

д) бројеви 5 и 6 припадају свим скуповима,

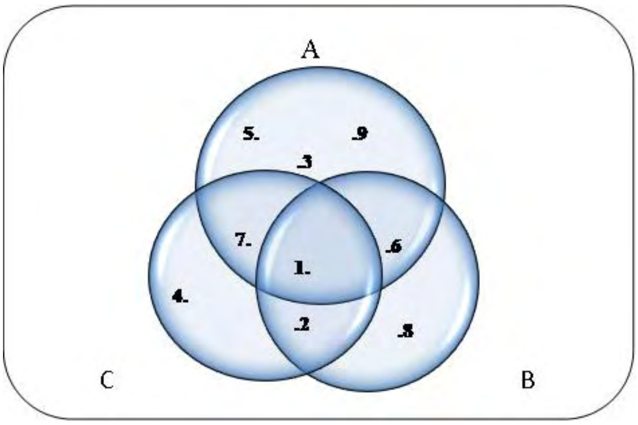
ђ) бројеви 7 и 8 припадају само скуповима А и С.



У наведеном примеру, при уписивању бројева у скупове, морају бити задовољени сви услови задатка у чему се огледа смисао конјункције. Како задатак захтева задовољење више услова, корисно је да ученици раде „корак по корак“, тј. један по један део.

За вежбање разумевања смисла конјункције, користан је и пример 7.

Пример 7. *Према слици за сваки број напиши којим скуповима припада.*



Приликом решавања наведеног задатка и одговарања истицати смисао конјункције, тј. подстицати код ученика схватање да два или више услова истовремено морају бити задовољена.

Математичких задатака који утичу на способност схватања конјункције има у уџбеницима за основну школу. Нисмо радили детаљну анализу уџбеника математике, али ћемо овде навести неке примере математичких задатака којима се успешно може подстицати конјункција, као способност логичког мишљења, а који су заступљени у уџбеницима математике.

Пример 8.

(Маричић, 2018б: 16)

Наведени пример је из радне свеске за први разред основне школе и директно утиче на подстицање правилне употребе везника „и“ у математичким задацима.

У почетку је веома важно ослањати се на говор и употребу везника „и“ у говору ученика. Наведени пример говори у прилог чињеници да се конјункција, као логичка операција, може подстицати од првих дана школовања. У почетку се инсистира на правилној употреби везника „и“ и на разумевању значења овог термина у математичким задацима.

Слично, на правилну употребу конјункције ученик је упућени при решавању следећег задатка (Пример 9).

Пример 9.

Запиши десетице које су веће од 40 и чија је цифра десетице паран број.

____

Запиши десетице које су веће од 40 и чија је цифра десетице непаран број.

____

(Маричић, 2018в: 35)

У наведеном примеру који се налази у радној свесци за први разред, ученик приликом решавања задатка мора истовремено узети у обзир два услова како би правилно решио математички задатак.

На крају, када говоримо о конјункцији у почетној настави математике, важно је нагласити да у почетној настави математике мислимо на следеће способности:

1. способност разумевања смисла конјункције при решавању математичких задатака,
2. способност правилног коришћења и примене конјункције при решавању математичких задатака.

3.2.2. Дисјункција

Дисјункција („или") „исказа p и q је исказ p ∨ q (p или q) који је увек тачан изузев у случају ако су оба исказа p и q нетачна" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 80).

Додатну пажњу, када говоримо о дисјункцији, треба усмерити на „несагласност између значења речи ***или*** у свакодневном говору и значења исте речи у математици, односно логици. У свакодневном говору реч ***или*** најчешће има искључни смисао... У математици и логици, међутим, реч ***или*** (дисјункција) има укључни смисао и укључује обе могућности" (Шпијуновић, 1999: 355).

„Спајањем двају исказа речју *или* добија се **дисјункција** тих исказа, која се назива још и **логички збир**; искази који сачињавају дисјункцију зову се **чланови дисјункције**, или **сабирци логичког збира**. Реч *или* има, у свакодневном језику, бар два различита значења" (Tarski, 1973: 19).

У почетној настави математике је важно да ученици уоче разлику у значењу везника „или" у свакодневном говору и оне коју он има у математици. У почетној настави математике има велики број задатака код којих се реч „или" користи да повеже два исказа. Правилном употребом ове речи и инсистирањем на правилној употреби од стране ученика, учитељ ће плански, поступно и систематски припремати своје ученике за формирање логичке операције *дисјункције* и њено правилно коришћење током даљег математичког школовања. Дисјункција се „чешће може користити у процесу решавања аритметичких и алгебарских задатака, него код решавања геометријских задатака. То су, пре свега, задаци у којима се захтева израчунавање бројевне вредности израза на два или више начина, изражавање исте величине на различите начине, задаци комбинаторне природе и задаци са неједначинама" (Шпијуновић, 1999: 354).

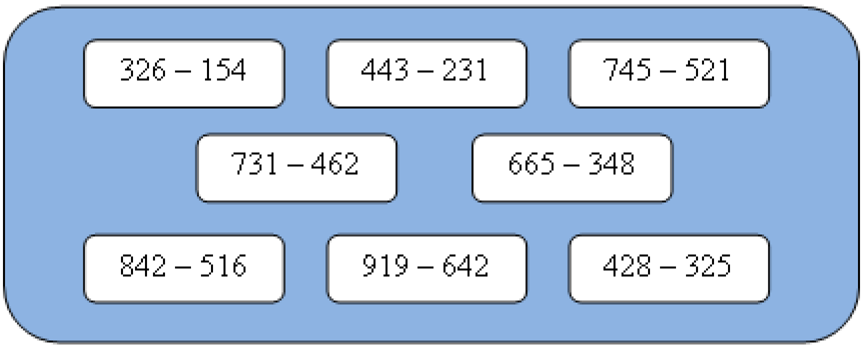
У наставку ћемо навести неколико примера задатака у којима се користи везник „или" и код којих се од ученика захтева да на основу дисјункције реше математички задатак.

Пример 10. *У датом низу заокружи бројеве који су дељиви са три или са четири.*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

У наведеном примеру се види укључни смисао дисјункције. У задатку се од ученика захтева да заокружи оне бројеве који су дељиви са три или дељиви са четири. Довољно је да број задовољава један од наведених захтева. Тачно решење допушта обе могућности.

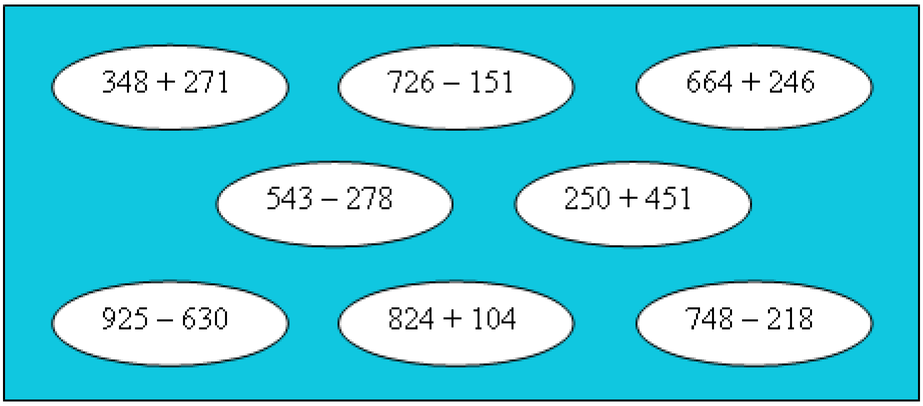
Пример 11. *Зеленом бојом обој поља у којима су одузимања код којих умањеник на месту цифре десетице има цифру два или цифру четири.*



У наведеном примеру (Пример 11), два услова су повезана везником „или“ и оба задовољавају услов задатка, у чему се и огледа смисао дисјункције. Добро познавање основа математичке логике помаже да се исправно користи реч „или“ при решавању математичких задатака. У наведеном примеру смисао дисјункције се огледа у чињеници да је решење тачно у оба случаја.

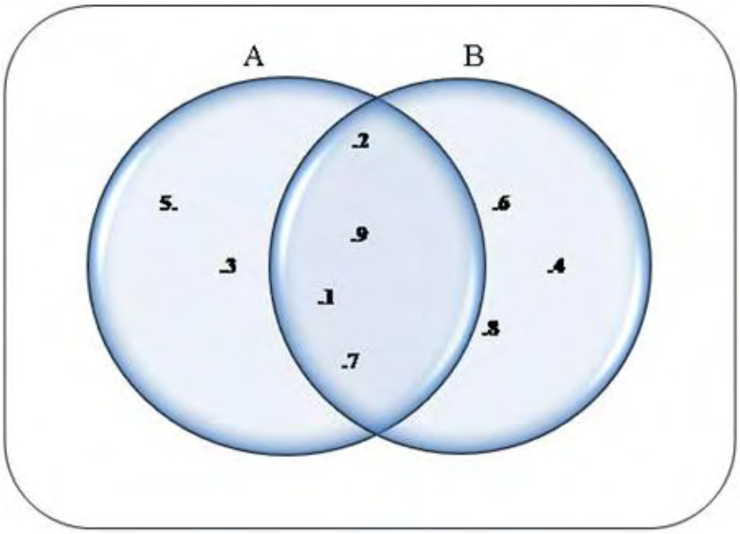
Пример 12 је сличан претходном и код њега се дисјункција огледа у чињеници да ученици треба да схвате „укључни“ смисао и значење речи „или“. Тврдње које су повезане везником „или“ у поставци задатка дозвољавају обе могућности. Смисао сложене реченице одређен је смислом реченица од којих је састављен и ученике од првих дана школовања треба навикавати на такву прецизност, а самим тим и на дисјункцију као логичку операцију.

Пример 12. *Жутом бојом обој поља у којима су резултати дељиви са пет или са десет.*



У примеру 13, дисјункција се, такође, огледа у разумевању „укључног“ значења везника „или“ којим су повезане две тврдње у поставци задатка. Циљ оваквих и сличних задатака је да ученици схвате да су допуштене обе могућности и да се постепено навикавају на јасно и прецизно математичко изражавање. У наведеном примеру смисао дисјункције се огледа у чињеници да је дисјункција тачна, ако је један или други исказ тачан.

Пример 13. *Заокружи бројеве који припадају само скупу А или само скупу В.*



Пример 14. *Дата су два скупа. Распореди (упиши на одговарајућа места) елементе (бројеве) тако да:*

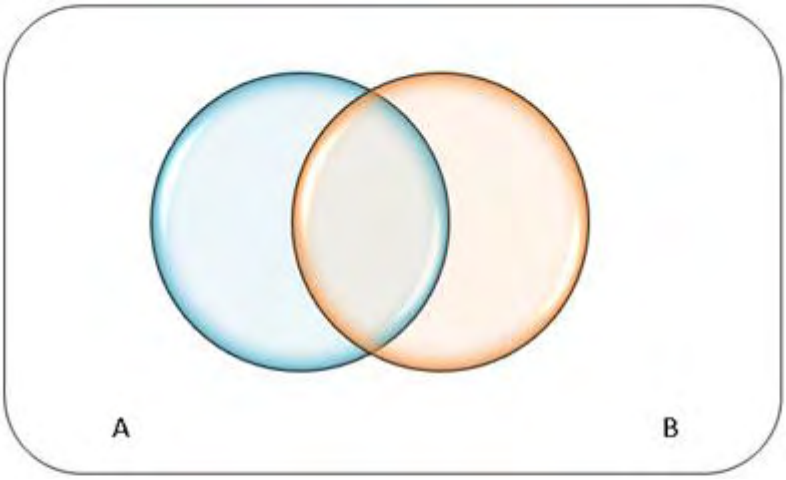
а) број један припада или скупу А или скупу В,

б) бројеви 2 и 3 припадају и скупу А и скупу В,

в) број 4 припада само скупу А,

г) број 5 припада само скупу В.

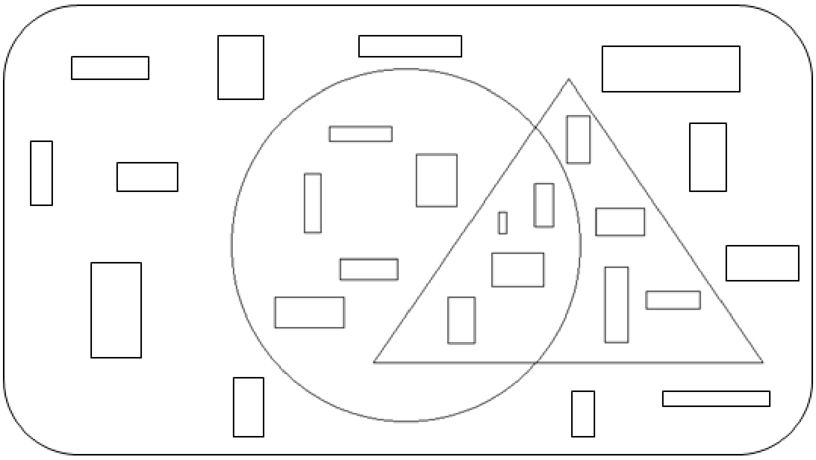
Пронађи оба решења.



У примеру 14 под а) дисјункција се огледа у њеној примени при решавању задатка и чињеници да ученик мора разумети укључни смисао дисјункције. Наведени пример може послужити да ученици, када схвате функцију везника „или“ и када схвате да два исказа која су спојена наведеним везником, оба представљају тачно решење, то примене у оваквим и сличним задацима. Да је ученик схватио смисао дисјункције, види се у проналажењу оба решења (вишеструкост решења). У наведеном примеру имамо и примену конјункције, јер ученик истовремено мора узети у обзир више исказа. Поред исказа под а) који представља примену дисјункције, и сви остали искази морају бити истовремено задовољени, што представља схватање и примену конјункције.

Пример који следи (Пример 15), као и претходни примери, може послужити за јасније схватање логичке операције дисјункције. Овакви и слични примери помажу учитељу да код ученика правовремено ствара добру основу за правилно коришћење дисјункције у почетној настави математике и прецизно схватање њене логичке функције.

Пример 15. *Обој правоугаонике који се налазе само у кругу или само у троуглу.*



Пример 16.

p∨*q: Производ бројева 7 и 8 је 56 или 62?*

p: Производ бројева 7 и 8 је 56. (Тачно.)

q: Производ бројева 7 и 8 је 62. (Нетачно.)

Одговор: Производ бројева 7 и 8 је 56. (Тачно.)

(Шпијуновић, Маричић, 2016: 80)

Примери 16 и 17 говоре у прилог чињеници да у почетној настави математике, већ од првих разреда можемо са ученицима вежбати дисјункцију као логичку операцију.

Пример 17.

p∨*q: Збир бројева 19 и 16 је 35 или 25?*

p: Збир бројева 19 и 16 је 35. (Тачно.)

q: Збир бројева 19 и 16 је 25 (Нетачно.)

Одговор: Збир бројева 19 и 16 је 35. (Тачно.)

Пример 18. a · b = 0 ако је a = 0 или (∨) b = 0

У примеру 18 дисјункција се огледа у чињеници да је производ два броја једнак нули ако је један од чинилаца нула.

Пример 19.

Напиши парне бројеве који припадају трећој или петој стотини и који на месту цифре десетице имају цифру 3. Пронађи сва решења.

У наведеном примеру (Пример 19), при навођењу решења, где ученик мора узети у обзир оба услова задатка, огледа се смисао дисјункције. Дакле, смисао дисјункције се огледа у вишеструкости решења, јер у обзир долазе и они бројеви који припадају трећој и они који припадају петој стотини. Такође, у наведеном примеру имамо и конјункцију јер ученик истовремено мора узети у обзир више услова задатка (парни и на месту цифре десетице имају цифру 3).

Пример 20.

Израчунај површине правоугаоника чије су димензије:

а) a = 5 cm, b = 7 cm	д) a = 9 cm, b = 2 cm
б) a = 9 cm, b = 5 cm	ђ) a = 7 cm, b = 3 cm
в) a = 3 cm, b = 4 cm	е) a = 8 cm, b = 3 cm
г) a = 4 cm, b = 8 cm	ж) a = 6 cm, b = 2 cm

Заокружи слова поред димензија правоугаоника чија је површина већа од 40 cm^2 или мања од 20 cm^2.

Пример 20, у свом другом делу, од ученика захтева схватање логичке функције везника „или“ при заокруживању решења која испуњавају један од услова.

На крају, када говоримо о почетној настави математике и дисјункцији, важно је нагласити да у почетној настави математике мислимо на способности:

1. способност схватања значења појма „или“ у процесу решавања математичких задатака,
2. способност коришћења и примене конјункције при решавању математичких задатака.

3.2.3. Негација

Негација („не“) „исказа p је исказ ˥p (*не p*) који је нетачан ако је исказ p тачан, а тачан, ако је исказ p нетачан“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 80).

Помоћу речи „не“ („није“) „образује се **негација** било каквог исказа; два исказа од којих је први негација другог називају се **противречни**, или **контрадикторни искази**... Сваки пут кад изричемо негацију неког исказа, желимо тиме да искажемо мисао да је тај исказ лажан; ако је исказ заиста лажан, његова је негација истинита; иначе је његова негација лажна“ (Tarski, 1973: 19).

Пример задатка код којег је доминантна негација: „Урош и Стефан су из Ужица и Суботице. Из ког града је који дечак, ако Урош није из Ужица?“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 81). Помоћу оваквих и сличних задатака, ученике од најранијих дана школовања треба учити *негацији*, тј. правилној употреби речи „не“ и „није“ у настави математике. Код ученика постепено треба подстицати и развијати способност разумевања значења и коришћења термина „не“ при решавању математичких задатака.

Када говоримо о почетној настави математике и негацији, важно је нагласити да у почетној настави математике мислимо на следеће способности:

1. способност разумевања термина „не“ у процесу решавања математичких задатака,
2. способност коришћења и примене негације при решавању математичких задатака.

У наставку ћемо навести неколико примера задатака у којима се као захтев у задатку користи негација и код којих се од ученика захтева да на основу разумевања значења негације користе податке супротне датим и на тој основи реше математички задатак.

Пример 21. *Међу понуђеним, обој поља у којима резултати нису непарни бројеви.*

345 – 7	625 – 6	935 – 9
294 – 8	931 – 8	834 – 9
745 – 3	456 – 7	527 – 9

Приликом решавања наведеног задатка ученик је у прилици да примени негацију. Ученик треба прво да израчуна резултате датих израза, а затим да обоји поља у којима резултати „нису“ непарни бројеви. Дакле, од ученика се захтева да схвати негацију и примени је на конкретном примеру. Ако резултат није непаран, он је паран. У томе се огледа суштина схватања негације у овом примеру. Оваквим и сличним задацима, који за ученике не представљају велики проблем, ученике треба навикавати да правилно схвате функцију речи „није“ у математичком задатку. Ово је добар пример који погодује развијању ученикове способности схватања логичког смисла појма „не“ и правилног коришћења у почетној настави математике. Ако желимо подстицати и развијати наведену способност логичког мишљења ученика у почетној настави математике, свакодневно ћемо инсистирати на правилној употреби речи „не“ и „није“ и повремено примењивати задатке који то од ученика захтевају. У почетној настави математике треба да буду присутни задаци у којима се од ученика експлицитно захтева разумевање значења термина „не“ и „није“.

Пример 22. *Међу понуђеним, прецртај изразе чија вредност није већа од 465 и није мања од 459.*

$459+9$ $\quad$ $469-9$ $\quad$ $467-9$

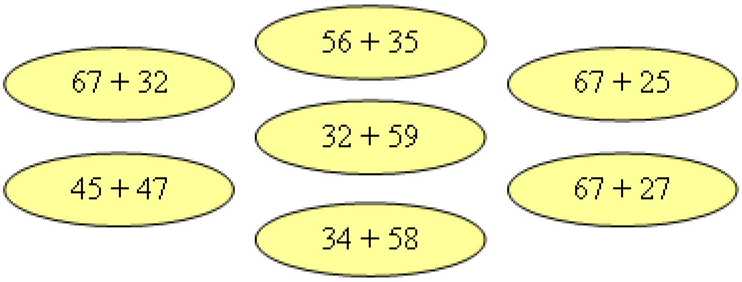
$469-7$ $\quad$ $465-4$

$465-5$ $\quad$ $465+5$ $\quad$ $466-8$

$469-8$

У наведеном примеру, применом негације на два дела у задатку ученик редефинише текст задатка. У том поступку до изражаја долази способност разумевања употребе негације и способност редефиниције задатка. Тек након тога, ученик долази до сазнања да се од њега захтева да прецрта изразе чија је вредност мања од 465 или једнака 465 и, истовремено, већа од 459 или једнака 459. Такође, овим задатком се од ученика захтева и конјункција, тј. способност разумевања значења и коришћења везника „и“ и дисјункција, тј. способност разумевања значења и коришћења везника „или“. Ово је добар пример који погодује развијању способности логичких операција у почетној настави математике, јер од ученика захтева способност схватања и примене термина „не“, „и“ и „или“. Да би ученик правилно применио наведене термине, мора схватати њихов логички смисао.

Пример 23. *Жика бележи само сабирања у којима резултати нису парни бројеви. Међу понуђеним, прецртај поља у којима су изрази које Жика није могао записати.*



У наведеном примеру ученик је два пута у прилици да примени способност разумевања значења и коришћења термина „не“. Први пут када констатује да је Жика записао само сабирања у којима резултати *нису парни* бројеви. Дакле, непарни су. И други пут, када треба да прецрта поља са изразима које Жика није могао записати. Ученик долази до закључка да је Жика записао изразе у којима су резултати непарни бројеви и да, стога, није записао изразе у којима су резултати парни бројеви.

Наведни примери помажу ученицима у навикавању на правилну употребу термина „не“ у настави математике и подстичу и развијају способност схватања логичке функције и правилне примене појма „не“ у почетној настави математике. Такође, оваквим и сличним примерима се од најранијих дана школовања ученици правилно уводе у логичку операцију - *негација* са којом ће се више сретати током даљег математичког образовања.

Математичких задатака који утичу на способност правилног разумевања значења и коришћења термина „не“, а самим тим и на правилно формирање негације, има у уџбеницима математике за основну школу. Нисмо радили детаљну анализу уџбеника, али ћемо овде навести пример математичког задатка којим се успешно може подстицати негација, као способност логичког мишљења, а који налазимо у уџбенику математике за основну школу.

Пример 24. *Напиши све десетице:*

- *које нису веће од 40;*
- *које нису мање од 40, а мање су од 100;*
- *које нису веће од 90 и нису мање од 20.*

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018г: 19)

Наведени задатак захтева од ученика разумевање значења и коришћења термина „не“, тј. разумевање негације у решавању математичког задатка. Примери су намењени ученицима првог разреда и не изазивају веће тешкоће при решавању. Поред негације, од ученика се очекује и разумевање конјункције и дисјункције.

Како често помињемо да у почетној настави математике треба стварати добре основе за даље математичко образовање, а помињали смо приликом навикавања ученика на конјункцију, дисјункцију и сада на негацију, то говори о значају почетне наставе математике и значају правилног формирања свих математичких појмова. Чини нам се да се улога почетне наставе математике, у пракси, често погрешно тумачи и оспорава јој се њен значај. Њен значај је огроман јер се тада стварају темељи за даље математичко образовање и грешке нису допустиве. Једном начињене грешке у стварању математичких темеља се тешко могу, или уопште не могу, исправити (Prvanović, 1970).

3.2.4. Импликација

Импликација се односи на употребу речи „ако...онда“. Када говоримо о почетној настави математике, морамо нагласити да импликацији припада значајно место. „Осим што је једна од најважнијих логичких операција, импликација је и једна од операција које се најчешће користе у уџбенику. То се посебно односи на садржаје везане за законе рачунских операција (комутативност, асоцијативност, дистрибутивност), промену резултата у зависности од промене компоненти рачунских операција, олакшице у рачунању, попуњавање таблица, математичке ребусе, разне текстуалне задатке и тако даље“ (Шпијуновић, 1999: 356). Из наведеног се види огроман значај импликације за почетну наставу математике, посебно у извођењу закључака. У наставном процесу, ученици су неретко у ситуацији да користе речи „ако...онда“.

Импликација подразумева да „ако комбинујемо два исказа помоћу речи *ако..., тада...* добићемо сложен исказ који се назива **импликација**, или **условни исказ**. Зависна реченица којој претходи реч *ако* зове се **антецедент**, а главна реченица пред којом је реч *тада* (или *онда*) зове се **консеквент**. Тврдећи импликацију тврдимо да се не може десити да антецедент буде истинит а консеквент лажан. Импликација је, дакле, истинита у било којем од следећа три случаја: (1) и антецедент и консеквент су истинити; (2) антецедент је лажан а консеквент истинит; (3) и антецедент и консеквент су лажни; само у четвртом могућем случају, кад је антецедент истинит а консеквент лажан, цела импликација је лажна“ (Tarski, 1973: 21-22).

Важно је нагласити да је за математику и математичко расуђивање важно да „ученик може да доказује чињенице на сваком ступњу, па и на најнижем“ (Prvanović, 1970: 84). У процесу расуђивања, ученик ће доказивати, а у процесу доказивања, он ће користити термине „ако ... онда“. Већ у почетној настави математике има мноштво примера у којима ученик од најранијих дана организованог математичког образовања користи термине „ако ... онда“.

Примери:

Ако је $x + 5 = 8$, онда је $x = 3$

Ако је $x + 5 = 8$, онда је $x = 8 - 5$

Ако је $x + 5 = 8$, онда је и $5 + x = 8$

Ако је $x \cdot 5 = 40$, онда је $x = 8$

Ако је $x \cdot 5 = 40$, онда је $5 \cdot x = 40$

За наставу математике, односно за математичко образовање у којем се као важан задатак намеће развијање логичког мишљења ученика, важно је подстицати математичко расуђивање. Колико год то било тешко, са његовим подстицањем треба кренути од најранијих дана математичког образовања. „Ученик који није у основној школи увођен прво у једноставна и конкретна, затим у ригорознија математичка расуђивања, тешко ће после моћи да изврши ма какво расуђивање“ (Prvanović, 1970: 86). Ученике од првих корака у математици треба навикавати на правилну употребу термина „ако ... онда“, посебно у долажењу до закључака.

Импликација је једна од „најважнијих логичких везника којим се индиректно доказују тврђења која нису експлицитно исказана. Помоћу овог бинарног везника, који прати пут логичког размишљања типа *ако-онда*, доказује се велики број теорема. Логичка импликација се свакодневно примењује у људском расуђивању, закључивању и решавању проблема у реалним животним ситуацијама“ (Пешић, 2013: 24). То, свакако, говори колико је импликација важна и у свакодневном животу и у настави математике. Иако Д. Пешић (2013) у свом раду наводи и анализира примере задатака са тестова које решавају ученици који желе да упишу седми разред у гимназији, примери које анализира могу послужити за израду сличних задатака који се могу применити за процену математичких способности ученика млађих разреда, као и користити за подстицање и развијање математичких способности ученика млађих разреда при чему пре свега мислимо на способност импликације.

Речи „ако..., тада...“ („ако..., онда...“) спадају међу логичке изразе који се најчешће користе у математици. Математичке теореме, посебно оне које су универзалног карактера, теже да узму облик импликације; антецедент се у математици зове **претпоставка**, или **хипотеза**, а консеквент **тврђење**, или **закључак**... *Ако је x позитиван број, тада је 2x позитиван број*. У наведеном исказу је *x је позитиван број* претпоставка, а *2x је позитиван број* је закључак (Tarski, 1973: 26).

Импликација као способност се често спонтано користи у почетној настави математике. Способност коришћења речи „ако...онда“ ученици могу користити приликом изношења закључака на основу датих примера. Учитељ у почетној настави математике мора инсистирати на правилној употреби наведених речи, као и правити околности које ће од ученика захтевати закључивање по принципу „ако...онда“. Наводимо неколико примера којима се ученици могу оспособљавати за разумевање и правилну употребу речи „ако...онда“ у почетној настави математике.

Пример 25.

Допуни реченице тако што ћеш на црту уписати одговарајућу реч из заграде.

$2 + \boxed{}$

Ако у празно поље упишемо паран број, резултат је _______________ број.
(паран/непаран)

Ако у празно поље упишемо непаран број, онда ће резултат бити

_______________ број.
(паран/непаран)

У наведеном примеру (Пример 25) ученик је у прилици, не само да користи речи „ако...онда“, већ и да долази до закључака који у почетку треба да буду једноставни, а касније све сложенији. Како би открио решење, ученик треба да изврши неколико примера код којих ће у празно поље писати парне бројеве, а затим и неколико примера код којих ће у празно поље уписивати непарне бројеве. Приликом извођења тих провера од ученика треба тражити да, увек, језички изрази закључак до којег дође тако што ће користити речи „ако...тада...“. На тај начин ученици се поступно уводе у логичку операцију *импликацију* и код њих се постепено развија способност разумевања значења термина „ако... онда...“ у процесу изношења закључака.

Пример 26. *Посматрај пример па допуни реченицу.*

Сабирци су бројеви 12 и 16. Збир је 28.
Сабирци 12 и 16 су парни бројеви. Збир бројева 12 и 16 је 28 и он је паран број.

Ако су сабирци парни бројеви, онда је и збир ____________ број.

Код наведеног примера речи „ако...тада...“ су већ уписане у формулацију задатка, па се овим примером само увежбава способност коришћења импликације у процесу долажења до нових закључака. Имамо један исказ, а због неке особине важи други исказ. Од ученика се може захтевати да, након овог примера, наведу и неки свој пример којим ће доћи до истог закључка. Дакле, својим примерима да поткрепе закључак. Такође, и код овог примера треба увек инсистирати на језичком изражавању импликације, тј. употреби речи „ако...тада“.

Пример 27. *На основу примера допуни реченицу тако што ћеш на црту уписати одговарајућу реч из заграде.*

$5 \cdot 2 = 10$ $15 \cdot 2 = 30$ $123 \cdot 2 = 246$ $234 \cdot 2 = 468$

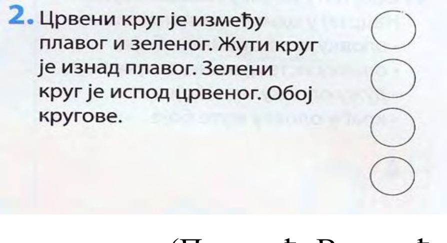
Ако је један од чинилаца број 2, онда је резултат ________________ број.
(паран/непаран)

Слично, претходном примеру, закључак је и овде (Пример 27) већ изнет и већ су употребљене речи „ако...тада“, али се њиме успешно може вежбати способност ученика да долазе до закључака уз употребу импликације. Такође, и овде треба тражити од ученика да на основу урађених примера наведу неколико својих, којим ће доћи до истог закључка, а све у циљу увежбавања способности импликације и коришћења термина „ако...тада...“, као и правилног језичког изражавања импликације.

У наставку ћемо указати на неке примере задатака који су заступљени у уџбеницима математике за основну школу, а који могу позитивно утицати на подстицање и развијање импликације у почетној настави математике. Код ученика морамо подстицати правилну употребу термина „ако ...тада...“, као и разумевање самог процеса закључивања које иде у правцу „ако... тада...“, јер је то од пресудног значаја за извлачење многих закључака у математици.

Једна врста математичких задатака код којих је ученик у прилици да, у првом реду, успоставља везе и односе између елемената у задатку, али и да користи импликацију и до закључка долази по правилу „ако...тада...“, јесу следећа два примера (Пример 28 и 29) које проналазимо у уџбенику математике за први разред.

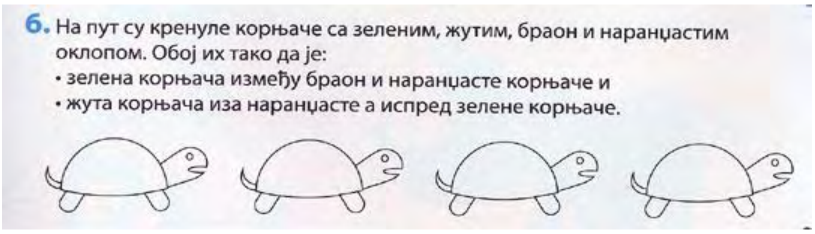
Пример 28.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 39)

Код успостављања веза и односа приликом решавања наведеног задатка, ученик мора вршити и закључивање по принципу импликације: *ако је црвени круг између плавог и зеленог и ако је зелени испод црвеног, а жути изнад плавог, онда је...* . Овде имамо три исказа из којих следи које боје је који круг.

Пример 29.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 39)

У овом примеру, поред успостављања веза и односа између елемената у задатку, ученик је у прилици и да врши закључивање по принципима импликације: *ако је жута корњача иза наранџасте а испред зелене и ако је зелена корњача између браон и наранџасте, онда су и жута и зелена корњача између браон и наранџасте*. У извођењу тог закључка се огледа смисао импликације. Тај закључак олакшава даље решавање проблема.

Пример 30.

2. Доврши попуњавање табеле.

+		7	9	6	
4		11	13		
				13	
				15	17
		12			
8	13				

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018в: 48)

Код неких математичких задатака где је ученик у прилици да уочава правила и законитости, паралелно се одвија и способност закључивања у правцу „ако...тада...“. И код класичних задатака дешифровања, размишљање ученика и закључивање иде у правцу „ако... онда...“, јер у највећем делу, ученик мора да размишља по принципу *ако је Б цифра ...., онда је...* (Пример 31).

Пример 31.

25. Дешифруј сабирање и одузимање. Различита слова замени различитим цифрама, а иста слова истим цифрама.

а) ВВЕ + Е = ВЕВ; б) АВВ – А = DCA.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2017а: 63)

Пример 32.

9. Дешифруј сабирање и одузимање. Различита слова замени различитим цифрама, а иста слова истим цифрама. Пази, у трећем примеру има више решења.

а) ABC + BC = 48C; б) ABB – AB = 4AB; в) ABC – 8A = 1CB.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 75)

Код задатака дешифровања импликација се огледа у самом процесу закључивања при изналажењу решења. Ученици су у прилици да размишљају и закључују полазећи од претпоставки „ако је...“ и закључују „тада је...“.

Пример 33. а) Дешифруј ребус: АР + РАК = АКР

б) Дешифруј ребус: КТО + КОТ = ТОК

в) Дешифруј ребус: БРА + БАР = РАБ

г) Дешифруј ребус: ВАР · Р = ДАР

д) Дешифруј ребус: УДАР + УДАР = ДРАМА

(*Клуб младих математичара*, 2005: 4)

Наведени пример, осим што је интересантан за ученике и буди њихову радозналост и мотивацију за рад, подстиче и логичку операцију импликацију. У самом процесу решавања, размишљање ученика иде у правцу „ако..., тада...“. Ради јаснијег сагледавања утицаја оваквих и сличних задатака на правилно подстицање импликације у почетној настави математике, навешћемо и објашњење процеса решавања неких примера.

У примеру под а), при решавању полазимо од размишљања ако (како) је Р + К = Р, тада је К = 0, па ребус гласи: АР + РА0 = А0Р. Тада је А = 5, а Р = 4. Слично је и у осталим примерима. Осврнућемо се и на процес решавања примера под д). У поменутом примеру, најпре закључујемо да је Д = 1, како је у питању збир два четвороцифрена броја, тада резултат не може бити већи од 19 999. Тада ребус добија следећи облик: У1АР + У1АР = 1РАМА. Трећа цифра збира (А) може бити или 2 или 3. Даље размишљање иде у правцу: Ако цифра А стоји и на крају збира и представља збир два једнака сабирка, тада она мора бити паран број. Тада закључујемо да је А = 2. Ребус сада гласи: У12Р + У12Р =1Р2М2. Ако се збир Р + Р завршава цифром 2, тада је Р = 1 или Р = 6. Како је Д = 1, тада Р не може бити 1, па закључујемо да је Р = 6. Тада је М = 5. Слово У може бити или 3 или 8. Ако је збир петоцифрен број, тада У мора бити 8 (*Клуб младих математичара*, 2005: 29). Овакав процес решавања математичких ребуса у почетној настави математике је тежак за ученике, па треба почети са једноставнијим примерима и постепено прелазити на сложеније. Они ученици код којих процес размишљања следи принципе импликације, уз одговарајућа математичка знања могу разумети и примењивати наведени процес решавања.

Када говоримо о импликацији у почетној настави математике, важно је нагласити да у почетној настави математике мислимо на следеће способности:

1. способност разумевања термина „ако...тада“ при решавању математичких задатака,
2. способност коришћења и примене речи „ако...тада“ при решавању математичких задатака,
3. способност коришћења и примене речи „ако...тада“ при закључивању.

3.2.5. Еквиваленција

Еквиваленција („ако и само ако“) два исказа је „исказ који је тачан ако су оба исказа тачна или оба исказа нетачна“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 81). Израз *ако и само ако* је израз који се ретко среће у обичном говору и „кад се помоћу тог израза споје два исказа, добија се сложен исказ који се назива **еквиваленција** или **еквивалентност**. Два тако спојена исказа зову се **лева страна и десна страна еквиваленције**. Тврдећи еквиваленцију двају исказа искључујемо могућност да један буде истинит, а други лажан; еквиваленција је строго истинита ако су њена лева и десна страна или обе истините или обе лажне, а иначе је лажна“ (Tarski, 1973: 29). Еквиваленција је „комплексна логичка операција која је у уџбенику математике посебно апострофирана у процесу израчунавања бројевних вредности израза, решавања једначина и неједначина, одређивања међусобног односа геометријских фигура и тако даље“ (Шпијуновић, 1999: 358).

Навешћемо пример који показује могућност примене еквиваленције у почетној настави математике:

„p: Број 15 је дељив са 3. (Тачно.)
q: Збир цифара броја 15 је дељив са 3. (Тачно)
Еквиваленција p <=> q: Број је дељив са три *ако и само ако* му је збир цифара дељив са 3. (Тачно.)“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 81).

Како би стварао добре основе за развој еквиваленције у почетној настави математике, учитељ може захтевати од ученика да након овог примера наведу још неколико сличних којим ће потврдити исти закључак. При томе, веома је важно да захтева правилну употребу термина „ако и само ако“, тј. правилно језичко изражавање еквиваленције. У почетној настави математике се, оваквим и сличним примерима, успешно може увежбавати логичка операција еквиваленција или бар стварати добра основа за њено даље подстицање и развијање током даљег математичког образовања. Важно је на почетном ступњу математичког образовања инсистирати на правилном коришћењу термина „ако и само ако“, као и на правилном језичком изражавању еквиваленције од стране ученика. У почетној настави математике ученици ће се сретати са оваквим и сличним задацима, где ће спонтаном употребом еквиваленције, односно речи „ако и само ако“, стварати основу за даље математичко образовање и подлогу за формирање логичког мишљења.

Идентично наведеном примеру, наводимо још неколико у којима ће ученици бити у прилици да користе логичку операцију *еквиваленцију*.

Пример 34.

Број 25 је дељив са 5. (Тачно.)
Број 30 је дељив са 5. (Тачно.)
Број 35 је дељив са 5. (Тачно.)
Број 40 је дељив са 5. (Тачно.)

Број је дељив са пет ***ако и само ако*** *се завршава цифром 0 или цифром 5.*

У наведеном примеру ученик потврђује да је сваки наведени исказ тачан. Након тога, увиђа да се наведени бројеви завршавају цифром нула или цифром пет, што га наводи на закључак о дељивости бројева са пет. Осим правилно извршене еквиваленције и доласка до закључка о дељивости бројева са 5, ученик има прилику да користи везник „или“ (разуме логички смисао коришћења појма „или“) у његовом укључном смислу (код уочавања да је број дељив са пет ако се завршава цифром нула ***или*** цифром пет).

Пример 35.

Број 27 је дељив са 9. Збир цифара броја 27 је дељив са 9. (Тачно.)
Број 36 је дељив са 9. Збир цифара броја 36 је дељив са 9. (Тачно.)
Број 45 је дељив са 9. Збир цифара броја 45 је дељив са 9. (Тачно.)

Број је дељив са девет ***ако и само ако*** *му је збир цифара дељив са 9.*

Наведеним примером се ученици успешно могу уводити у правилно извршавање еквиваленције. Важно је инсистирати на поступности у раду и правилном језичком изражавању еквиваленције, тј. правилној употреби термина „ако и само ако“.

Пример 36.

Број 30 је дељив са 10. (Тачно.)
Број је 50 дељив са 10. (Тачно.)
Број 350 је дељив са 10. (Тачно.)
Број 400 је дељив са 10. (Тачно.)

Број је дељив са десет ***ако и само ако*** *се завршава цифром 0.*

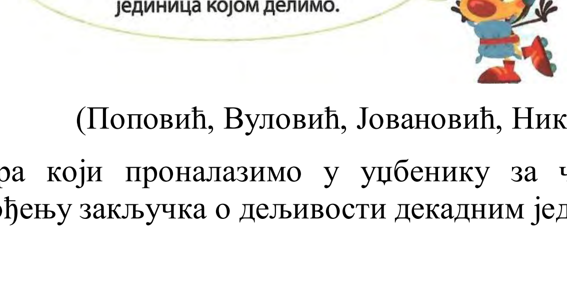
Слично као и код закључивања о дељивости бројева са пет (Пример 34), и овде, код закључивања о дељивости бројева са десет (Пример 36), ученик прво увиђа да су сви наведени искази тачни. Након тога увиђа да се сви бројеви дати у примерима завршавају цифром нула. То га наводи на закључак о дељивости бројева са десет. Приликом доласка до закључка, важно је инсистирати на правилној употреби термина „ако и само ако“, тј. на правилној употреби логичке операције еквиваленције. У наведеним примерима од ученика се захтева правилна употреба речи „ако и само ако“ приликом изношења закључака на основу датих примера.

Пример 37.

Учио/ла си да делиш са 10 и 100. Знаш да је рецимо 320 : 10 = 32 и 700 : 100 = 7. Научимо да делимо и осталим декадним јединицама.

450 : 10 = 45,	јер је	45 · 10 = 450
4 500 : 10 = 450,	јер је	450 · 10 = 4 500
45 000 : 10 = 4 500,	јер је	4 500 · 10 = 45 000
4 500 : 100 = 45,	јер је	45 · 100 = 4 500
45 000 : 100 = 450,	јер је	450 · 100 = 45 000
4 500 000 : 100 = 45 000,	јер је	45 000 · 100 = 4 500 000

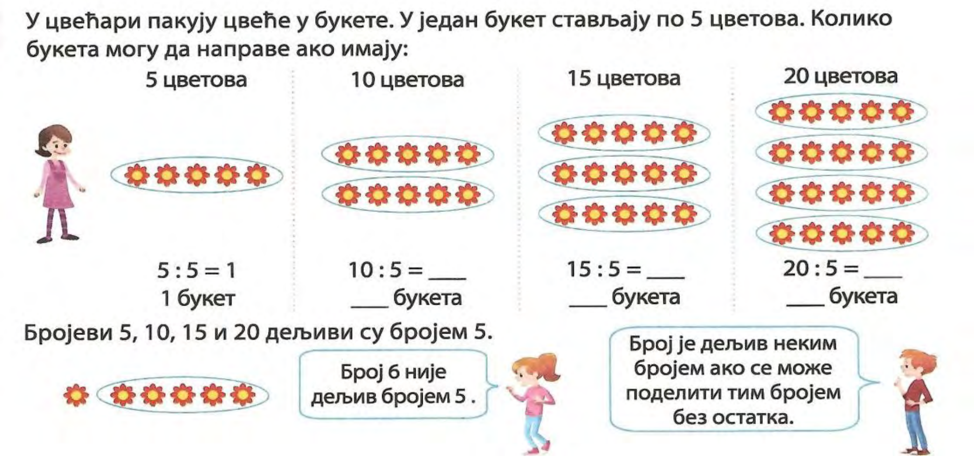
Као што смо множећи неки број декадном јединицом том броју додавали са десне стране онолико нула колико их има та декадна јединица, тако и број делимо неком декадном јединицом тако што му са десне стране изостављамо онолико нула колико их има та декадна јединица.



(Поповић, Вуловић, Јовановић, Николић, 2016г: 64)

Код наведеног примера који проналазимо у уџбенику за четврти разред, еквиваленицја се огледа у извођењу закључка о дељивости декадним јединицама.

Пример 38. *Дељивост бројева*



(Маричић, Ђуровић, 2019а: 101)

У наведеном примеру (Пример 38) еквиваленција се огледа у извођењу закључка о дељивости бројева. Овакви и слични примери могу послужити за спонтано схватање еквиваленције као логичке операције при извођењу закључака у почетној настави математике.

Када говоримо о почетној настави математике и еквиваленцији, важно је нагласити да у почетној настави математике мислимо на следеће способности:

1. способност разумевања термина „ако и само ако“ у процесу решавања математичких задатака,
2. способност правилног коришћења и примене речи „ако и само ако“ при решавању математичких задатака,
3. способност правилног коришћења и примене речи „ако и само ако“ при закључивању.

3.3. Мисаони поступци у почетној настави математике

За решавање математичких задатака, односно, за целокупно математичко образовање посебно су важни мисаони поступци. „Ефикасност процеса математичког образовања немогуће је замислити без познавања суштине мисаоних поступака који се у том процесу користе“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 82). Почетна настава математике „заузима доминантно место у изградњи и развијању мишљења ученика. Стицање и усвајање математичких знања и вештина остварује се низом мисаоних активности“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 39).

Математика је апстрактна наука и за њено разумевање неопходно је мишљење. За стицање математичких знања и решавање математичких задатака неопходни су мисаони поступци. Основни задатак наставе математике је „изградња (развој) мисаоних операција“ (Пикула, Милинковић, 2015: 21). Г. Петровић (1987) говорећи о методама спознаје, методама формирања и експлицирања појма, помиње анализу, синтезу, апстракцију, генерализацију и специјализацију. Његове речи сведоче о значају мисаоних поступака за процес спознаје и усвајања појмова. Другим речима, да би се формирали математички појмови, неопходни су мисаони поступци.

У разматрању појма логичког мишљења важно је издвојити основне мисаоне поступке (мисаоне активности): анализу и синтезу, апстракцију и генерализацију, конкретизацију и специјализацију и упоређивање (компарацију).

Сви наведени мисаони поступци се не примењују изоловано у почетној настави математике. Они се, у процесу изграђивања математичких појмова, орерисања математичким појмовима, у процесу стицања математичких знања и решавању математичких проблема, математичких задатака, јављају повезано. Од наведених мисаоних поступака међусобно супротни поступци биће, у раду, разматрани заједно, ради лакшег сагледавања њихове суштине.

Када се говори о мисаоним поступцима, уочљиве су тешкоће на које се наилази у разматрању мисаоних поступака, а које се односе на њихово дефинисање. „Дефинисање мисаоних операција није могуће, а тиме и њихова прецизна класификација“ (Пикула, Милинковић, 2015: 22). Стога, већина аутора полази од општеприхваћене класификације и разматрају: анализу и синтезу, апстракцију и генерализацију, конкретизацију и специјализацију, аналогију, интуицију, упоређивање, диференцијацију и идентификацију (Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016). У литератури налазимо и да се анализа, синтеза, индукција, дедукција и аналогија убрајају у методе математичког мишљења и да је свака од тих метода у суштини мисаона операција или низ мисаоних операција које су значајан чинилац у стваралачком раду (Prvanović, 1970: 19).

Посебна важност мисаоних поступака за математичко образовање огледа се у чињеници да се мисаони поступци користе за:

1. формирање математичких појмова и коришћење тих појмова у математичком образовању,
2. усвајање математичких садржаја који су по својој природи апстрактни, али и при утврђивању и увежбавању истих,
3. решавање математичких задатака и математичких проблема.

Како се мисаони поступци јављају у свим сегментима математичког образовања, развијање мисаоних поступака у почетној настави математике намеће се као важан задатак свих који се баве образовно-васпитним радом. Методе мишљења се примењују у настави математике јер: „(1) Оспособљавати ученика да мисли значи оспособљавати га да примењује методе мишљења. (2) У математику се улази само путем математичког мишљења и ниједним другим. (3) Само знања стечена математичким мишљењем могу бити трајна и активна, тј. корисна и за даље математичко образовање и за професионални рад“ (Prvanović, 1970: 29). Овде се пре свега мисли на математичка знања која морају бити стечена математичким мишљењем.

3.3.1. Анализа и синтеза

Реч *анализа* је грчког порекла (грч. analysis) и значи рашчлањивање, растављање на саставне делове (Клајн, Шипка, 2007). „Свако рашчлањивање сложених целина (предмета, појава, процеса итд.) на делове можемо назвати *анализом у ширем смислу*... А*нализом у ужем смислу* називамо рашчлањивање *мисаоних* творевина (појмова, судова, закључака, система појмова, судова и закључака итд.) на њихове елементе“ (Petrović, 1987: 134).

Анализа је код различитих аутора слично дефинисана. Анализа представља „процес растављања целине на делове. Анализом се објект мишљења раставља на једноставније делове“ (Брковић, 1995: 6). Анализа је „мисаоно рашчлањивање објеката (предмета, процеса, појава) на саставне одредбе (својства)“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 47). Анализа представља мисаоно рашчлањивање целине на саставне делове (Дејић, Егерић, 2003: 46; Пикула, Милинковић, 2015: 22). Анализа значи (буквално) растављање на састојке и као операција мишљења игра важну улогу при формирању појмова (Prvanović, 1970: 24).

Анализа је „метода истраживања код које се од последица долази до узрока, анализа је проналажење, анализа је стварање плана, анализа је метода решавања уназад, анализа је извођење од краја к почетку, анализа је регресивно закључивање“ (Kurnik, 1999: 55).

Овде ћемо искористити прилику да укажемо на значај који анализа има за логичко мишљење ученика. *Анализа* са методичког аспекта „има смисла ако се растављање целине на делове врши са циљем да се утврде релације које постоје међу деловима“ (Шпијуновића, Маричић, 2016: 84). Тако извршена анализа има значајну улогу у уочавању и успостављању узрочно-последичних веза и односа међу елементима у задатку и закључивању на основу тих веза и релација. „Пример математичких садржаја где је *анализа* важна јесу *школски текстуални задаци*... Сваки такав задатак састоји се заправо од два задатка“ (Kurnik, 2008: 326). При решавању текстуалног задатка, ученик је у прилици да анализира податке дате у задатку, врши растављање на делове, а затим да на основу тих делова уочи релације међу деловима и постави израз, формира једначину и на крају дође до решења задатка. У првом делу таквих задатака доминира анализа и у почетној настави математике морамо инсистирати на анализи. Са друге стране, свако растављање на делове има смисла само ако нам помаже да уочимо везе које постоје међу елементима задатка и које су од значаја за постављање математичког израза који нас води до решења.

Мисаони поступак супротан анализи је синтеза. У литератури наилазимо на сличне дефиниције синтезе.

Реч *синтеза* је грчког порекла (synthesis) и значи састављање, спој, спајање. Представља спајање више делова у целину (Клајн, Шипка, 2007). „Свако спајање већег броја предмета, појава или процеса у једну целину можемо назвати *синтезом у ширем смислу*... а *синтезом у ужем смислу*, спајање једноставних мисаоних творевина у сложене и сложених у још сложеније“ (Petrović, 1987: 134).

Насупрот анализи, синтеза се дефинише као „спајање делова у целину; целина која је настала спајањем делова“ (Брковић, 1995: 56). Она представља „спајање појединих одредби у погодне целине“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 47). *Синтеза* представља мисаоно састављање, обједињавање делова у целину (Дејић, Егерић, 2003: 46; Пикула, Милинковић, 2015: 22). Синтеза је „спајање, уједињавање“ (Prvanović, 1970: 24).

Као операције мишљења анализа и синтеза „играју важну, незамењиву улогу при формирању појмова“ (Prvanović, 1970: 24). Анализа и синтеза се често користе у решавању математичких задатака, при формирању математичких појмова и при изградњи математичких теорија. Отуда је јасно зашто налазе своје место у почетној настави математике.

Најчешће слабости наставе математике се огледају у чињеници да „у настави математике *синтези* најчешће не претходи *анализа*, а то утиче на јасноћу поучавања и разумевања проблема, што знатно умањује спознајну вредност наставе“ (Kurnik, 2008: 326).

За анализу и синтезу, „слободно се може рећи да су анализа и синтеза најзначајније методе у научном истраживању. Најчешће се примењују комбиновано, као аналитичко-синтетичка метода и тада најбоље осветљавају пут ка решењу проблема“ (Pinter i sar. 1996: 28). Као метода научног истраживања и доказивања „анализа се састоји у томе што се претпостави да је оно што се тражи нађено, па се доводи у везу са оним што је познато и из тога изводи истинитост. Синтеза повезује оно што је дато (а што се може повезати) и тако налази оно што се тражи“ (Prvanović, 1970: 24).

На основу свега наведеног о анализи и синтези, можемо закључити да мисаони поступци *анализа* и *синтеза* имају значајно место и улогу у почетној настави математике. Без наведених мисаоних поступака нема ни решавања математичких задатака. Стога, важно је од првих дана школовања, односно, од првих дана организованог математичког образовања, навикавати ученике да правилно извршавају поменуте мисаоне поступке. Успешна анализа задатка и елемената у задатку предуслов је за успешну синтезу, а самим тим и предуслов за правилно решавање математичког задатка. Посебно погодан начин за подстицање и развијање анализе и синтезе у почетној настави математике јесте навикавање ученика да „корак по корак“ анализирају дате елементе задатка, уочавају релације које владају међу датим елементима, деловима и на основу тих релација долазе до решења. У почетку је препоручљиво да то буде пропраћено записивањем издвојених елемената (података) датих у задатку и издвајањем оног што се у задатку тражи, после чега следи синтеза издвојених елемената и решавање задатка.

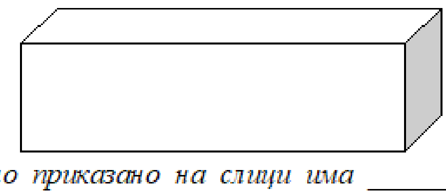
У почетној настави математике, при решавању математичких задатака и формирању математичких појмова, анализа и синтеза се увек примењују.

Пример 39. *Из колико стотина, десетица и јединица је састављен број 357?*

Анализом записа броја 357 и растављањем на збир производа броја и декадне јединице, ученици ће установити да се дати број састоји из 3 стотине, 5 десетица и 7 јединица.

Пример 40.

Посматрај слику, па допуни реченицу.



Геометријско тело приказано на слици има ____________________ *страна,* ________________ *ивица и* ______________________ *темена.*

Ученици ће вршити анализу датог геометријског модела и тако откривати из којих делова је састављено приказано тело.

Пример примене анализе јесте и у процесу формирања бројева кад ученици посматрају конкретне скупове и цртеже скупова који имају одређени број елемената (у зависности појам ког броја се усваја), врше анализу скупова и уочавају њихову бројност.

У наведеним примерима доминантно место има анализа, док у следећем примеру доминира синтеза.

Пример 41. *Запиши број који садржи 3 стотине, 5 десетица и 7 јединица.*

Синтезом датих података ученици ће доћи до записа $3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 300 + 50 + 7 = 357$ и на тај начин решити задатак.

Анализу и синтезу не треба посматрати одвојено, јер се ова два мисаона поступка међусобно преплићу. Њихова повезаност посебно долази до изражаја у решавању математичких задатака. Повезане, анализа и синтеза, примењују се у решавању готово свих математичких задатака. И код решавања најједноставнијих текстуалних задатака срећемо повезаност анализе и синтезе. Када добије текстуални задатак, ученик прво врши анализу, анализира садржај задатка и рашчлањује га на податке дате у задатку. Такође, издваја и питање, оно што се од њега тражи и утврђује релације које постоје међу деловима. После анализе, синтезом врши (мисаоно) спајање података, на основу утврђених релација, и тако долази до решења задатка. Основни проблем на који се наилази при разматрању анализе и синтезе јесте тај што их је тешко, или скоро немогуће, посматрати одвојено. Сваки такав покушај треба условно схватити.

Пример 42. *Који број треба додати броју 3 да би се добио број 9?*

Наведени пример показује како се анализа и синтеза заједно примењују у решавању готово свих задатака. Анализа се састоји у идентификовању два сабирка и збира, док је синтеза у формирању једначине $3 + X = 9$, помоћу које ће ученик лако наћи тражени број.

Пример 43. *Влада има 5 црвених кликера и 7 плавих кликера. Колико укупно кликера има Влада?*

У наведеном примеру први корак у решавању задатка представља анализа података и издвајање бројевних података 5 и 7, као и издвајање питања. Други корак представља синтеза којом се врши спајање података, формирање израза и добијање решења.

Анализа и синтеза имају значајну примену и при извођењу рачунских операција.

Пример 44. *Израчунај збир бројева 254 и 423.*

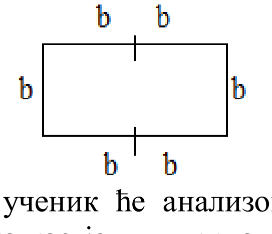
При решавању наведеног задатка анализа се огледа у рашчлањивању бројева на стотине, десетице и јединице. Синтеза има значајну улогу у спајању (здруживању) стотина, десетица и јединица сабирака, чиме се долази до збира, тј. решења задатка.

Пример 45.

Обим правоугаоника је 108 cm, а његова дужина је два пута дужа од ширине. Израчунај површину правоугаоника.

Анализа: $O = 108$ cm

$a = 2 \cdot b$



Помоћу слике и методом дужи ученик ће анализом, односно растављањем, представити једну страницу правугаоника као једну дуж, а другу, дужу, као две такве дужи. *Синтеза* у наведеном задатку доминира при уочавању веза између датих података.

$6 \cdot b = 108$ cm	
$b = 108$ cm $: 6$	$P = a \cdot b$
$b = 18$ cm	$P = 36$ cm $\cdot$ 18 cm
$a = 2 \cdot 18$ cm	$P = 648$ cm^2
$a = 36$ cm	

Овим примером је показано како се током решавања математичких задатака анализа и синтеза међусобно преплићу. Са друге стране, увек треба инсистирати на анализи како би ученици јасно сагледали податке које имају, који су дати у задатку како би тачно утврдили релације које постоје између датих елемената, као и да би на тај начин синтеза била успешна.

Разматрањем последња три примера, можемо видети значај и улогу анализе и синтезе у математичком задатку. Поред тога што наведени примери показују улогу анализе и синтезе у решавању математичког задатка, они представљају и потврду да се мисаони поступци не јављају изоловано у процесу решавања математичких задатака, већ се више мисаоних поступака преплиће у том процесу. Конкретно, при решавању задатака ученик врши и посматрање датих података из другог угла, успостављање различитих веза и односа између датих елемената и закључивање на основу датих и уочених веза, као и многе друге.

3.3.2. Апстракција и генерализација

Реч *апстракција* потиче од латинске речи *abstraction* и представља (филоз.) мисаону радњу којом се од неког појма одбацују споредни, случајни елементи, а задржава оно што је битно (Клајн, Шипк, 2007). „Једна од основних операција мишљења је операција апстракције (од лат. *abstrctio - далеко од стварности*). Уз њену помоћ, сталне, најважније особине предмета или појава, издвајају се из гомиле и такав *концентрисани збир* само значајних особина улази у појам. Друге, мање важне особине човек не узима у обзир (апстрахује их)“ (Група аутора, 2007: 126). „Поступак којим се од низа предоџаба, остављајући по страни њихове специфичне елементе и задржавајући само оно што им је заједничко, уздижемо до појмова, назива се *од-лучивањем* или *апстракцијом*“ (Petrović, 1987: 135).

Бавећи се почетном наставом математике, већина аутора прихвата сличне дефиниције апсракције и генерализације, које ћемо навести у наставку рада ради јаснијег сагледавања поменутих процеса и значаја који ови мисаони поступци имају у почетној настави математике.

„*Математичка апстракција* је издвајање и замишљање онога што у реалности не постоји“ (Prvanović, 1970: 15). *Апстракција* представља „мисаоно издвајање суштинских својстава, веза и односа и истовремено одбацивање небитних и мање битних својстава... Приликом апстраховања не врши се само задржавање битних и одбацивање небитних својстава, већ се врши и *идеализација* тих својстава, прелази се на граничне форме које више не постоје у стварности“ (Дејић, Егерић, 2003: 47). Она представља „способност интелекта да издваја (занемарује) оне особине објекта и бића реалног окружења које одвојено не могу егзистирати“ (Пикула, Милинковић, 2015: 22).

Апстракција представља „издвајање битних карактеристика конкретних појава и стварање новог идеализованог система“ (Pinter i sar. 1996: 24). То је „мисаоно одбацивање небитних својстава по којима се објекти разликују и задржавање суштинских карактеристичних по којима се објекти могу идентификовати, поистоветити“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 16). Она представља „мисаоно одвлачење општег битног својства посматраног објекта или појаве од осталих својстава, небитних за одређено проучавање, и одбацивање тих небитних својстава“ (Kurnik, 2000d: 12). Апстракција је „мисаони поступак којим се из једног или више сродних елемената, примера издвајају одређена својства, а сва остала одбацују. На тај начин се омогућује формирање апстрактног појма који ће, сем посматраних, обухватити и све остале примере са задржаним својствима“ (Pinter i sar. 1996: 26).

Апстракција је „мисаони поступак којим се из једног или више сродних случајева, односно примера, нека својства издвајају и задржавају, а остала одбацују. То је први корак у формирању математичких појмова“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 82). Њом се „одстрањују нематематичка и небитна својства објеката и задржавају битна“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 49).

Апстракција је „једна од темељних мисаоних процеса. У науци, а посебно у математици, апстракција означава делотворан и логички разрађен поступак за теоретско упознавање предмета и практично овладавање њиме“ (Kurnik, 2000d: 12).

Апстракција се дефинише и као „мисаона активност којом се једнострано фиксира нека страна посматраног објекта изван везе с његовим другим странама“ (Kurnik, 2007: 203). „Способност ка апстраховању садржана је у основи формалних логичких операција. Она се развија тек у школском узрасту“ (Група аутора, 2007: 126).

Значај апстракције се огледа у чињеници да „сви математички појмови који се формирају код ученика у почетној настави математике имају полазиште у материјалним примерима у реалном окружењу, реалним моделима, конкретним ситуацијама на основу којих се процесом апстракције трансформишу у идеализоване математичке појмове који су лишени сваке материјалности“ (Маричић и сар. 2017: 56). Апстракција, стога, има огроман значај за почетну наставу математике.

За апстраховање је важна чињеница да „на нижем нивоу менталног развоја или на нижем нивоу класификовања ова мисаона операција се остварује свакодневно препознајући један објекат као објекат који смо раније видели. Како не постоје две потпуно исте ситуације у којима долази до осећања надражаја на потпуно исти начин, јер се објекти виде под разним угловима, на разним растојањима, различито су осветљени, различитих су величина, облика, од различитих су материјала, различите боје итд., то се од различитих улаза ***апстраховањем*** (а то значи издвајањем и задржавањем у меморији неких инваријантних својстава и занемаривањем представа посебних објеката) долази до продукта који се зове ***класа*** или ***појам***“ (Вуковић, 2008: 38). Апстраховање се манифестује кроз препознавање објеката који су раније били у искуству субјекта. Добар пример за апстраховање је формирање појмова правоугаоника, квадрата, троугла, круга, квадра, коцке, лопте, ваљка, купе у првом разреду. Ученицима се приказује „одређен број примера или слика, модела (нпр. коцке различите величине, боје, од различитог материјала). Ученици ће моделе моћи не само да виде из различитих углова, већ и да их опипају па ће на основу информација које приме путем више чула моћи да одбаце небитно, да апстрахују некарактеристична својства а мисаоно издвоје општа, заједничка својства“ (Вуковић, 2008: 67). У наведеном се види значај апстракције у процесу формирања, не само наведених, већ свих математичких појмова.

Из наведених дефиниција се види значај који апстракција има за почетну наставу математике, будући да су појмови у настави математике, по својој природи, апстрактни. Такође, види се и значај који апстракција има у самом процесу формирања математичких појмова. То следи из чињенице да су математички појмови „***апстрактни појмови***, тј. појмови који су апстраховани (ослобођени) од свих својстава материјалне стварности, изузимајући својства из подручја просторних облика и квантитативних односа“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 49). „Коректно апстраховање прати операција *уопштавања* на основу *упоређивања*, *поистовећивања* и *разликовања*“ (Група аутора, 2007: 126).

Поред огромне улоге коју апстракција има у процесу формирања математичких појмова, значајна је и улога апстракције у процесу решавања математичких задатака. У процесу решавања математичких задатака ученици су у прилици да реалне проблемске ситуације преводе на математички језик. Тако, када се пред ученика постави проблем: *Мара има 5 бомбона и од баке је добила још 3*. *Колико бомбона сада има Мара?* Он преводећи ову ситуацију на математички језик долази до записа 5 + 3.

Као лоша страна апстракције, поред низа добрих, истиче се „удаљавање од неких својстава објеката, неважних за одређено проучавање. Тиме се може изгубити целовита слика објекта“ (Kurnik, 2000d: 15).

Навођењем дефиниција које посматрају и дефинишу апстракцију у контексту наставе математике, уочавамо њихову сличност и суштину апстракције која се огледа у одбацивању нематематичких, небитних својстава посматраних објеката, а задржавању само битних при чему настају математички појмови који су лишени сваке материјалности. Важно је нагласити и да апстракцији претходи посматрање примера у реалном окружењу и реалних модела.

Условно смо, одвојено посматрали апстракцију, а у наставку ћемо указати на неке дефиниције генерализације, иако се ове две мисаоне операције у самом наставном процесу јављају заједно, тј. након апстракције следи генерализација. О томе сведочи и чињеница да је формирање математичких појмова једино могуће у јединству апстракција и генерализација (Шпијуновић, Маричић, 2016: 83).

Реч *генерализација* значи логички прелаз од појединачног ка општем, уопштавање, уопштену тврдњу (Клајн, Шипка, 2007). „Генерализацији супротан поступак неки називају *детерминацијом* или *ограничењем*, а неки *специјализацијом* или *упосебљењем*. То је поступак којим се додавањем ознака неком појму добија појам богатији по садржају, али ужи по опсегу - »посебнији« (одатле назив »специјализација«) и »ограниченији« (одатле назив »детерминација«)“ (Petrović, 1987: 135).

Када су апстракцијом одвојена битна својства посматраног објекта онда се „*генерализацијом* (уопштавањем) повезују у једну целину и та целина представља критеријум проширивања на све елементе са тим својством“ (Дејић, Егерић, 2003: 47). *Генерализација* је „прелаз са испитивања појединих елемената на испитивање множине (скупа) који садржи те елементе, или са испитивања подмножине на испитивање множине. Генерализација је одговор на питање: Да ли то важи уопште?“ (Prvanović, 1970: 23).

Генерализација (уопштавање) је „неопходна функција мишљења у математици. У ствари, онде где нема генерализације, нема ни математичког мишљења, нема математике. Генерализација је проширивање појмова (и читавих структура)“ (Prvanović, 1970: 15). Ове речи најбоље сведоче о генерализацији као важном мисаоном поступку од пресудног значаја за оперисање апстрактним математичким појмовима и о њеном значају за математичко мишљење.

Генерализација или поопштавање је „прелаз с разматрања датог скупа објеката на одговарајуће разматрање његовог надскупа. Полази се од неког појма којем је придружен одређени скуп објеката, његов опсег и установљава неко својство свих елемената задатог скупа. Затим се посматра општији појам и својство преноси на све елементе добијеног надскупа или се изграђује општије својство“ (Kurnik, 2000b: 147).

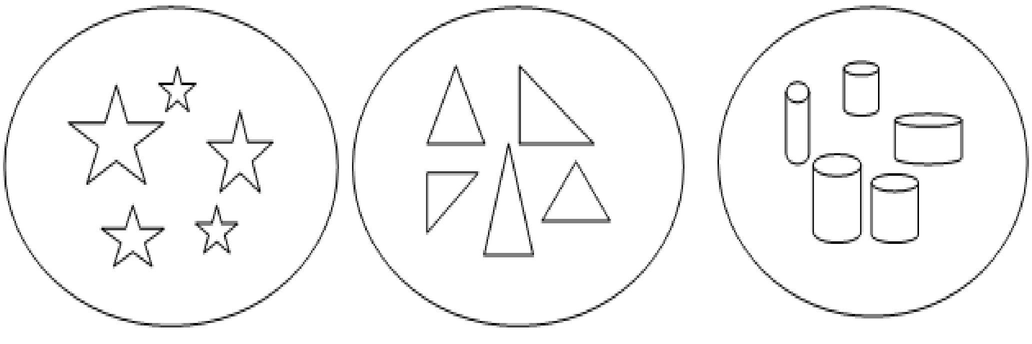
Генерализација је мисаони поступак којим се уочена и задржана својства неког ужег скупа проширују на објекте изван посматраног скупа, на најшири скуп елемената са тим својством (Шпијуновић, Маричић, 2016: 83; Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 49; Pinter i sar. 1996: 26). *Генерализација* или *уопштавање* представља приписивање одређених карактеристика свим објектима неког најширег скупа. Генерализација представља „мисаоно уопштавање - преношење идентификације датог скупа на све реалне предмете који поседују истакнуто карактеристично својство, формирање најопштијег математичког појма“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 16).

Из наведених дефиниција генерализације види се да сама апстракција без генерализације није довољна за формирање математичких појмова те да у том процесу значајно место припада и генерализацији. Тек у јединству апстракције и генерализације налазимо се на добром и правилном путу формирања математичких појмова. Правилно формирани математички појмови су предуслов за добро оперисање тим појмовима, што је од кључног значаја за квалитетно математичко образовање.

Помоћу апстракције и генерализације формирамо све математичке појмове у почетној настави математике. Осим у процесу формирања математичких појмова, апстракција и генерализација имају значај и у „коришћењу математичког језика, извођењу закључака, решавању задатака и у свим случајевима у којима се небитна својства одбацују, а битна задржавају“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 83).

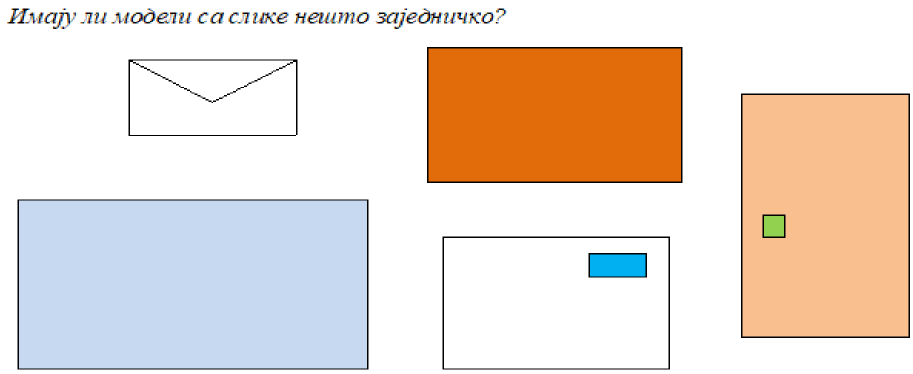
У наставку ћемо кроз примере покушати да укажемо на улогу и значај апстракције и генерализације у почетној настави математике.

Пример 46. *Посматрај слику па одговори. Шта је заједничко за дате скупове?*



Поступком апстракције, ученици ће занемарити сва небитна својства посматраних скупова, остаје само њихова истобројност. Када су апстракцијом издвојили суштинско својство – истобројност, ученици су извршили и генерализацију. Овакав поступак се примењује у процесу формирања бројева у почетној настави математике.

Пример 47. *Формирање појма правоугаоника.*



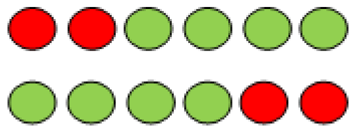
При одговарању, ученици ће апстракцијом занемарити небитна својства приказаних модела (боја, величина, маса), а као битно својство остаје облик правоугаоника.

Пример 48. *Према запису постави текст задатка: 5 + 3 = 8.*

У поменутом примеру, ученицима треба указивати на природу апстракције кроз чињеницу да наведени запис може означавати мноштво ситуација. Нпр. *Марко има 5 сличица. Добио је још три сличице. Колико сличица сада има?* или *Бојана има пет плавих шналица и три црвене шналице. Колико шналица укупно има Бојана?* Од ученика се очекује да разумеју да се „математички модели добијају математичком апстракцијом" (Дејић, Егерић, 2003: 47).

У настави математике, приликом усвајања правила о замени места сабирака, ученик је у прилици да користи низ мисаоних поступака (анализу, конкретизацију индукцију, генерализацију, аналогију и др.), а посебно место припада апстракцији.

Пример 49. *Која сабирања су представљена сликама?*



На основу слика ученик долази до записа 2 + 4 = 6 и 4 + 2 = 6. Након овог задатка, ученицима се може дати задатак: *У корпи су 4 јабуке и 3 крушке. Колико је укупно воћки у тој корпи? Израчунај на два начина.* После неколико задатака где су конкретни објекти оловке, балони, жетони и слично, ученик долази до једнакости:

2 + 4 = 4 + 2 4 + 3 = 3 + 4 9 + 1 = 1 + 9

На тај начин, ученик уочава да је небитна природа предмета, а као битно својство апстракцијом издваја однос међу бројевима. Применом апстракције долазимо до закона комутативности: *Ако сабирцима заменимо места, збир се не мења.*

Пример 50. *Помоћу бројева 2, 5 и 10 напиши сва могућа множења и дељења.*

Након исписивања једнакости 2 · 5 = 10, 5 · 2 = 10, 10 : 2 = 5 и 10 : 5 = 2, ученик апстракцијом може да закључи да чинилац може израчунати тако што ће производ поделити другим чиниоцем.

Пример 51. *Израчунај колико укупно ногу имају:*

а) четири мачета, *б) три ласте,* *в) три прасета.*

У наведеном примеру, при увођењу појма множења, ученици кроз конкретне примере и на основу слика рачунају укупан број ногу животиња записујући га као сабирање и као множење. На тај начин, постепено одбацују небитна својства (природу бића), а као битно својство апстракцијом усвајају појам множења. Наведени пример говори у прилог чињеници да се више мисаоних поступака допуњују при формирању математичких појмова.

Своју примену и присутност у почетној настави математике апстракција и герализација остварују тек у јединству. Тек заједничким деловањем апстракције и генерализације могуће је формирање математичких појмова (Маричић и сар. 2017). Ова два мисаона поступка тек у јединству добијају свој пуни смисао.

Извођење *генерализација* представља „критично место наставе математике, јер прелаз с *конкретног* и појединачног к општем неки ученици тешко савладавају“ (Kurnik, 2008: 327). Ова слабост оправдана је јер се ученици у почетној настави математике још увек налазе на нивоу конкретних операција, а сваки прелазак на апстрактно може представљати тешкоћу за њих. Друга слабост је та што „многи математички садржаји омогућују разматрање *генерализација*, али наставници математике најчешће пропуштају искористити такве ситуације. То је велика штета за математичко образовање ученика, јер су генерализације врло погодне за развој математичког мишљења ученика“ (Kurnik, 2008: 327). Друга слабост се односи, више на личност учитеља/наставника, а последице њиховог пропуста могу бити веома штетне за развој математичког мишљења ученика, а, самим тим, штетне и за целокупно математичко образовање ученика.

3.3.3. Конкретизација и специјализација

Реч конкретизација значи остваривање, реализација; ближе, подробније одређивање (Клајн, Шипка, 2007). Велики значај конкретизације у почетку математичког образовања заснива се на чињеници да су деца узраста од првог разреда до 11 година још увек на нивоу конкретних операција, о чему је било речи у одељку *Сазнајни развој ученика и почетна настава математике*.

Конкретизација је „мисаони поступак којим се идентификује пример са својствима неког општег појма. У суштини конкретизација представља материјализацију апстрактног појма“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 83). Тако схваћена, конкретизација је веома блиска ученицима млађег школског узраста, јер се њихове представе, још увек, везују за конкретне примере. Циљ конкретизације „јесте да се деци омогући да лакше могу да усвоје сложене апстрактне и логичке структуре... Конкретизација се врши када се апстрактно-општа својства употпуњују (одсликавају) преко конкретно-појединачног“ (Дејић, Егерић, 2003: 48).

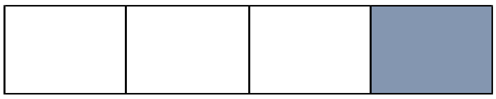
Конкретизација „подразумева сагледавање општег става на конкретним случајевима из опште врсте... Апстрактни појам количник два броја приближава се ученику кроз дељење шест бомбона двојици дечака, дванаест јабука четворици другара и слично“ (Пикула, Милинковић, 2015: 23). Конкретизација је једна од основних активности мишљења и истраживања, „мисаона активност при којој се поглед једнострано усредсређује на једну страну посматраног изван везе са његовим другим странама“ (Kurnik, 2007: 148). Конкретизација „је мисаони поступак којим се идентификује пример са својствима неког општег појма, става или задатка“ (Pinter i sar. 1996: 27). Конкретизација подразумева примену издвојених карактеристика на конкретне појаве. Има значај „у олакшавању процеса усвајања математичких појмова и омогућава ученицима да усвоје сложене апстрактне и логичке структуре“ (Маричић и сар. 2017: 61).

Дакле, можемо рећи да се конкретизација огледа у преласку са општег на појединачно, односно, са апстрактног на конкретно. Конкретизација је мисаони поступак којим се својства неког општег појма употпуњују (одсликавају) на тачно одређени конкретан пример. Конкретизација има велики значај при формирању математичких појмова у почецима математичког образовања, јер је дечја мисао везана за оно што је конкретно и усмерена на конкретне примере.

Са друге стране, мисаони поступак супротан конкретизацији јесте специјализација. Специјализација значи усмеравање нечега само у једном правцу (Клајн, Шипка, 2007). Специјализација је мисаони поступак помоћу којег се „својства неког генералног скупа преносе на елементе његовог правог подскупа“ (Пикула, Милинковић, 2015: 23; Шпијуновић, Маричић, 2016: 84). Она је „мисаони поступак преношења својстава елемената неког генералног скупа на елементе његовог правог подскупа“ (Pinter i sar. 1996: 27).

У наставку ћемо навести неколико примера математичких задатака где конкретизација и специјализација долазе до изражаја.

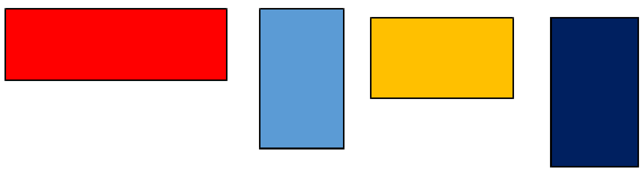
Пример 52. *Посматрај слику па одговори на питање: Шта представља обојени део?*



Појам разломка, у овом случају, ученици посматрају преко конкретног примера, а могу направити траку (модел правоугаоника од папира) и поделити је, како је показано, на четири једнака дела. Обојени део представља једну четвртину. На тај начин, ученици преко конкретног дељења целине, усвајају појам разломка. Извршена је конкретизација.

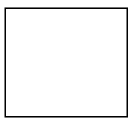
Пример 53.

Пажљиво посматрај слику и допуни.



На слици су приказани ______________________. Правоугаоник има ______________ странице и ________________ угла. Углови правоугаоника су _________________. Правоугаоник има два пара ________________________ страница.

Сада посматрај слику.



На овој слици је приказан још један _____________________. Он има ______________ странице и ________________ угла. Његове странице су ___________________. Овај правоугаоник назива се __________________.

У овом примеру се карактеристике које одређују правоугаоник преносе и на квадрат и на тај начин се врши специјализација. Својства ширег скупа преносе се на његов прави подскуп.

Слично је и код обима правоугаоника и квадрата. Обим правоугаоника се израчунава по обрасцу О = $2 \cdot a + 2 \cdot b$ и то је својство генералног скупа. Специјализацијом се долази до обрасца за обим квадрата О = $4 \cdot a$.

Како конкретизација представља материјализацију апстрактних математичких појмова, ученици се још увек везују за материјалне представе, јасно је да конкретизација има значајно место као мисаона операција у почетној настави математике. Стога је важно да учитељи у наставном процесу користе конкретне примере који су блиски и разумљиви ученицима.

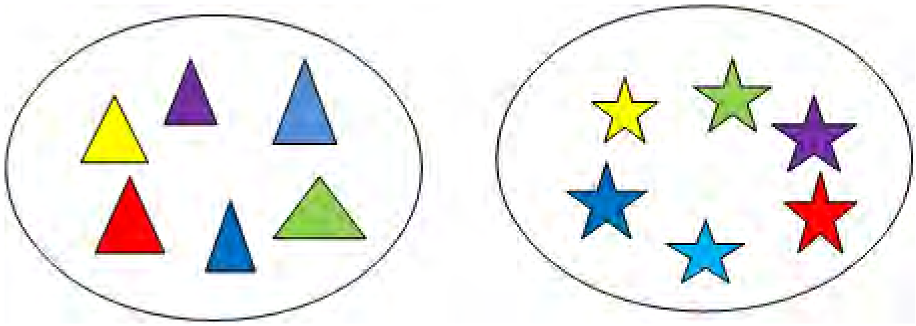
3.3.4. Упоређивање (компарација)

Реч компарација значи поређење, упоређивање, сравњивање (Клајн, Шипка, 2007).

Компарација је мисаони поступак „којим се установљавају исте или различите одредбе објекта са циљем да се утврде сличности и разлике између тих објеката“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 47). То је мисаони процес откривања особина по којима су појаве које се посматрају и упоређују сличне или по којима се те појаве разликују. Упоређивање лежи у основи осталих мисаоних поступака, јер ученици прво упоређују конкретне објекте (уочавају сличности и разлике), па тек онда врше друге мисаоне поступке (апстракцију, генерализацију и сл.). У почетној настави математике учитељ је тај који уводи ученике у систематска и планска посматрања и упоређивања објеката. Он је покретач који наводи ученике да посматране објекте упоређују, да уочавају сличности међу посматраним објектима, као и разлике међу њима. То се у наставном процесу може чинити на различите начине. Наводимо пример.

Пример 54. *Посматрај скупове и заокружи тачан одговор.*

а) први скуп има већи број елемената од другог скупа
б) скупови имају једнак број елемената
в) први скуп има мањи број елемената од другог скупа



Да би решили наведени задатак, ученици морају извршити упоређивање датих скупова. Из наведеног примера се види да упоређивање лежи у основи готово свих мисаоних поступака. Такође, наведени пример показује да са навикавањем ученика на мисаони поступак упоређивања можемо почети од првих дана школовања, јер наведени задатак је примерен ученицима првог разреда. Не само што оваквим примером наводимо ученике на посматрање и упоређивање посматраних објеката, већ их уводимо и у друге мисаоне поступке у чијој основи је упоређивање. Ученик ће и у самом процесу формирања математичких појмова стално бити у прилици да конкретне примере упоређује, да уочава сличности и разлике између упоређиваних објеката како би правилно извршио апстракцију и генерализацију.

Када се говори о упоређивању као мисаоном поступку, добро је задавати задатке у општијем виду, о чему сведочи следећи пример. „Од ученика се тражи да опишу шта уочавају у следећем низу израза: 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, 6 + 1, 7 + 1.

Ученици уочавају да је свуда сабирање, да се додаје 1, али прави квалитет ће се исказати када уоче да је низ првих сабирака 1, 2, 3, 4, ... нарушен, јер недостаје израз 5 + 1" (Дејић, Егерић, 2003: 49).

Овакви и слични задаци се могу осмислити у почетној настави математике, чиме ће ученици вежбати своју способност посматрања, уочавања сличности и разлика, тј. упоређивања. Такође, у самим примерима, ученике треба наводити на упоређивање и подстицати да језички изражавају сличности и разлике које уочавају између посматраних објеката. На пример, када се пред ученике постави задатак да упореде неке објекте, то треба да буде пропраћено следећим захтевима: *наведи сличности, наведи разлике*. Таквим радом и подстицањем код ученика ће се постепено изграђивати способност упоређивања, при чему ће они бити све самосталнији у извођењу овог мисаоног поступка.

3.4. Способности закључивања у почетној настави математике

Овде ћемо поћи од самог појма закључивање и закључак. Закључивање је „мисаони процес којим изводимо један суд из једног или више других судова. Закључак је на одређени начин структурирана сложена мисао... Закључивање је психички процес, закључак - логичка творевина" (Petrović, 1987: 73). Закључивање подразумева „мисаони процес, посредством кога заснивамо или изводимо један суд (закључни суд или конклузија) из једног или више претходних или предњих судова (премиса)" (Коларић, 2003: 99). Наведена одређења појмова закључак и закључивање, дефинишу наведене појмове са аспекта логике.

Изношење закључака и судова су „мисаони процеси којима долазимо до нових сазнања на основу постојећих, раније усвојених" (Група аутора, 1989: 56). У закључивању се полази од претпоставки (премиса) и на тој основи се изводи закључак. „Суд је закључни део процеса закључивања" (Група аутора, 1989: 56).

Како се математички појмови изграђују и формирају одређеним мисаоним поступцима, у настави математике значајно место припада и формирању математичког тврђења. До математичких тврђења се долази математичким закључивањем. Под математичким закључивањем ,,подразумева се мисаона операција, ментални поступак, којим се из једног или више датих исказа формира нови исказ – закључак ... Ученике треба оспособити да сами одређују тачност добијеног закључка, да закључак могу исказивати речима тачан, нетачан" (Дејић, Егерић, 2003: 60). Временом ученике треба оспособити и да самостално закључују.

Веома је важно учити ученике да доказују. „Учити доказивати значи учити расуђивати... Образовање ученика није потпуно ако он током школовања није упознао и схватио доказе неколико стандардних математичких теорема“ (Kurnik, 2008: 324–325).

„Процес успостављања односа међу математичким појмовима назива се математичко суђење. Плод математичког суђења јесте математички закључак или математички суд. Језички код математичког суда јесте математички исказ, а логички код суда јесте формула, односно судове исказујемо специјалним реченицама, а симболички их представљамо формулама... Закључивање је успостављање веза међу појмовима, односно одређених карактеризацијама тих појмова“ (Пикула, Милинковић, 2015: 24–25). „Математичко закључивање је врхунац математичког размишљања које укључује формирање, уопштавање и извођење исправних закључака о идејама и о томе како су оне повезане“ (O`Daffer, Thornquist, prema: Petrović, 2002: 45). Математичко закључивање је „мисаона операција, ментални поступак којим се из једног или више датих исказа формирају нови искази“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 24).

У раду Р. Квашчева (1969) срећемо тест закључивања који се састојао од 20 задатака и који је био намењен проверавању способности испитаника да уоче разлике у нивоима тачности или нетачности или степенима вероватноће закључака који су изведени из приказаних података и чињеница. Аутор је од испитаника очекивао да за сваки закључак који је био изведен на основу података (изнесених чињеница) датих у тексту, искажу да ли је он тачан, вероватно тачан, да су подаци недовољни, вероватно погрешан или погрешан. Поменути рад може послужити и у почетној настави математике као основа за израду задатака којима би се вежбала ученикова способност закључивања и способност процењивања тачности закључака. Такође, у раду поменутог аутора (1969) срећемо и тест дедукције (25 задатака) који је био намењен проверавању способности за дедуктивно расуђивање из датих премиса, за уочавање односа импликације између пропозиција, за утврђивање да ли је заиста оправдано оно што личи на импликацију или на нужни закључак који следи из једне пропозиције у другу. Пред испитанике су постављане вежбе које су се састојале из два исказа (премисе), после којих је следило неколико закључака. Задатак испитаника је био да поред сваког закључка напишу да ли је он правилан или неправилан, односно да одреде да ли произилази из датих исказа или не. Посебну пажњу привлачи и тест уопштавања, којим се од испитаника захтевало да на основу датих чињеница, њиховим уопштавањем, изведу одговарајући закључак. Наведени примери које је користио Р. Квашчев (1969) у својим испитивањима, иако су намењени старијим ученицима, могу послужити као полазиште за израду сличних задатака за вежбање способности расуђивања и закључивања у почетној настави математике, или бар за стварање подлоге и основе која претходи дедуктивном закључивању, уз уважавање специфичности садржаја наставе математике који су апстрактни, као и уважавање развојних карактеристика и интелектуалних способности ученика тог узраста. Закључивање и закључци имају значајно место у почетној настави математике, јер од првих дана школовања ученике треба навикавати да долазе до закључака на основу датих исказа. У почетку то треба да буду једноставнији закључци, а постепено да се прелази и на сложеније. У подстицању ученика на закључивање треба инсистирати када год за то има простора и времена.

У почетној настави математике разликујемо индуктивно и дедуктивно закључивање, као и закључивање по аналогији. Често се у процесу сазнавања, поред наведених облика закључивања, примењује и интуиција.

3.4.1. Индуктивно и дедуктивно закључивање

Реч индукција (лат. inductio) значи „облик закључивања од појединачног ка општем" (Пикула, Милинковић, 2015: 25). Индукција је „начин закључивања којим се из двају или више појединачних или посебних судова добија нови општи суд, а као метода индукција је метода истраживања којом се при проучавању неког скупа објеката посматрају посебни објекти из тог скупа и утврђују код њих она својства која се затим приписују читавом скупу" (Клајн, Шипка, 2007: 203).

Индуктивно закључивање је „закључак од појединачног и посебног на опште... То је закључак којим закључујемо да оно што вреди за низ појединачних случајева једне врсте вреди за све случајеве те врсте. Или: индуктиван закључак је закључак којим се из две или више појединачних (посебних или мање општих) премиса изводи општа (или општија) конклузија" (Petrović, 1987: 98–99). У класичној логици индукција се дефинише као мисаони ход од појединачног ка општем (Коларић, 2003: 100). У савременој логици се под индукцијом „подразумевају сви они закључци код којих премисе мање или више наводе на конклузију, чине је мање или више вероватном, одн. мање или више конформишу или потврђују конклузију" (Коларић, 2003: 107). Наведена одређења појма индукције, дефинишу наведени појам са аспекта логике.

У педагогији и психологији, наилазимо на слична одређења. О индуктивном закључивању говоримо када „од појединачног знања о елементима класе појава долазимо до неке правилности која важи за све елементе те класе" (Група аутора, 1989: 56). Индуктивно мишљење се дефинише као „мисаони ток који полази од појединачног и посебног а у закључку се изводи општи став; индукција је поступак генерализације" (Брковић, 1995: 20).

У складу са темом рада, нас највише занима како је индукција дефинисана у контексту наставе математике и још прецизније у контексту почетне наставе математике, у којим то ситуацијама има примену и како ученика навикавати на индуктивно закључивање. Посебно нас занима и да ли се на индукцију као способност закључивања може деловати са циљем њеног развијања и унапређивања у почетној настави математике и, ако је могуће, на који начин се то може чинити.

Индукција означава „закон закључивања, којим се општи закључак изводи на основу појединачних случајева" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 87). Индуктивно закључивање „јесте закључивање из посебног ка општем, тј. извођење општег тврђења из два или више посебних тврђења" (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 52). У литератури срећемо и термин закључивање из више претпоставки. „Закључивање из више појединачних претпоставки од тачних тврђења о појединачним математичким појмовима изводимо тврђење о општем појму чији обим сачињавају појмови у претпоставкама. Овакво закључивање назива се индуктивно закључивање" (Радојевић, Радојевић, 1984: 27).

На основу изнетих дефиниција видимо да индукција представља мисаони поступак код којег се општи закључак изводи из појединачних случајева. Дакле, имамо појединачне случајеве – премисе и из њих изводимо општи закључак. Индуктивно закључивање има своје место и примену у почетној настави математике.

Настава математике у основној школи, посебно у прва четири разреда, је претежно конкретна и индуктивна. Зато је индуктивно закључивање најзаступљенији облик закључивања у почетној настави математике. „Учитељ математике долази до апстрактних поставки, до генерализација, разматрањем конкретних објеката и конкретних примера и индуктивним закључивањем. Тај начин је близак и примерен ученицима тог узраста. Индуктивни поступак састоји се од низа индуктивних корака којима се долази до схватања општег. Почиње се с конкретним објектима и специјалним случајевима, индуктивни закључци нижу се аналогијом, а посматране чињенице настоје се генерализовати" (Kurnik, 2008: 321). Наведено указује на тесну везу индукције са конкретизацијом, специјализацијом, аналогијом и генерализацијом. Из наведених речи следи закључак да ученике у наставном процесу можемо навикавати на индуктивно закључивање.

У зависности да ли су индуктивним закључивањем обухваћени сви могући појединачни случајеви или пак нису, разликујемо потпуну и непотпуну индукцију. Код потпуне индукције обухваћени су сви појединачни случајеви и тек тада је изведен општи закључак. Овако изведени закључци, потпуном индукцијом, апсолутно су тачни. Недостатак који се ставља на терет потпуној индукцији је тај што „закључивањем потпуном индукцијом у математици се ништа ново не доказује. Она служи само јаснијем сагледавању проблема и концизнијем формулисању ставова. Зато нема посебан образовни значај и ретко се користи у почетној настави математике" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 87). Други разлог ретке примене потпуне индукције у почетној настави математике јесте често велики број премиса које треба користити.

Код непотпуне индукције, општи закључак је изведен из једног броја могућих појединачних случајева. Како непотпуном индукцијом нису обухваћени сви појединачни случајеви, закључак изведен на такав начин може довести до тачног или, пак, нетачног закључка. Стога, непотпуна индукција је непоуздана, али са дидактичко-методичког аспекта вредна, јер долазимо до новог закључка, а тако добијени закључци, непотпуном индукцијом, се доказују, што опет има велики значај у процесу подстицања мишљења ученика. Код непотпуне индукције је важно изабрати репрезентативне појединачне примере – премисе, као и узети и посматрати што већи број примера. Степен поузданости закључивања непотпуном индукцијом зависи од: „броја појединачних случајева на основу којих се изводи закључак – што је већи број појединачних случајева, већи је степен поузданости закључка; репрезентативности појединачних случајева из којих се изводи закључак – репрезентативнији појединачни случајеви резултирају већом поузданошћу закључака; чињенице да ли је закључак изведен на основу битних, суштинских карактеристика појединачних случајева" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 88).

Ради јаснијег сагледавања индукције, тј. њене примене у почетној настави математике, навешћемо неке примере закључивања индуктивним путем у почетној настави математике.

Пример 55. *Посматрај примере. Шта закључујеш?*

$2 + 3 = 3 + 2$ $\qquad$ $5 + 8 = 8 + 5$ $\qquad$ $13 + 7 = 7 + 13$

Докажи свој закључак на још два примера.

У овом примеру ученик посматра неколико појединачних случајева и непотпуном индукцијом долази до закључка да се збир два природна броја не мења ако сабирци замене места. У почетној настави математике непотпуна индукција има веома широку примену. Готово сва правила и алгоритме у почетној настави математике ученици изводе путем индуктивног закључивања и то непотпуном индукцијом, након посматрања неколико репрезентативних и добро одабраних примера.

Пример 56. *Посматрај дати низ бројева и заокружи бројеве дељиве са два.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Шта закључујеш? Допуни реченицу.

У блоку бројева до десет са два су дељиви бројеви ____________________.

У датом примеру ученик посматра све појединачне случајеве бројева, у блоку бројева до десет, и на основу свих могућих случајева у овом блоку, потпуном индукцијом, долази до општег закључка.

Предности индуктивног закључивања су: „остварење начела од лакшег ка тежем, од једноставног ка сложеном, проучавање нових апстрактних појмова и изрека преко посматрања и проверавања, навођење ученика на нове појмове, исказивање нових тврдњи и др." (Kurnik, 2008: 321). Поред наведених предности, индуктивно закључивање у почетној настави математике има и низ недостатака. „У индуктивној настави потребан је примерен број конкретних и посебних случајева. Учитељ математике често разматра премали број таквих случајева, па изведене тврдње постају неуверљиве и нејасне, а последица је мањкаво знање ученика. Чест је и други пропуст учитеља да не даје прилику већем броју ученика да учествују у изградњи индуктивног низа" (Kurnik, 2008: 327). Наведени недостаци су, нажалост, још увек присутни у наставној пракси, а пропусти који том приликом настају, често, су ненадокнадиви.

Реч дедукција (лат. deductio) представља „облик закључивања од општег ка посебном" (Пикула, Милинквоић, 2015: 26).

Дедуктивним закључивањем долази се до дедуктивних закључака. „Дедуктивни закључци су дакле такви закључци код којих није могуће да премисе буду истините, а закључни суд или конклузија неистинита. Другим речима, код дедукције, премисе поткрепљују или пружају подршку конклузији, о чему сведоче и индикаторске речи: дакле, стога, отуда, због тога, према томе и тсл." (Коларић, 2003: 114). У класичној логици, дедукција се дефинише као мисаони ход од општег ка појединачном (Коларић, 2003: 100). У савременој логици се под дедукцијом подразумева „свако оно закључивање где конклузија логички нужно следи из премиса, тј. свако оно закључивање чија је логичка основа релација импликације" (Коларић, 2003: 114).

О дедуктивном закључивању говоримо када „раније сазнате принципе примењујемо на нове елементе искуства и на тај начин сазнајемо њихове карактеристике" (Група аутора, 1989: 56). „То је кретање мисли од општег ка посебном... Дедукција увек гарантује истинитост закључка, ако је тачна премиса" (Група аутора, 2007: 126). Дедуктивно закључивање представља „начин размишљања који полази од премиса или пропозиција из којих се изводи валидан закључак; дедукцијом утврђујемо да оно што важи уопште – важи и у појединачним случајевима" (Брковић, 1995: 12).

Дедукција најчешће представља „низ мисаоних операција којима се истинитост неког тврђења изводи из истинитости раније утврђених (или прихваћених) општих истина" (Prvanović, 1970: 22). То говори у прилог чињеници да су закључци до којих се долази дедукцијом увек истинити.

Дедукција је „закон закључивања којим се истинитост неког тврђења изводи из истинитости раније прихваћених и утврђених истина. Другим речима, дедукцијом се из става о општем долази до става о посебном и појединачном и на тај начин се опште обогаћује" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 89). Дедуктивно закључивање се темељи на чињеници да из оног што је уопштено произилази појединачно. То је извођење посебних из општих тврђења, тј. закључивање од општег ка посебном (Malinović, Malinović Jovanović, 2002; Пикула, Милинковић, 2015). Дедукција представља „облик закључивања при којем се од једног општег суда и једног посебног или појединачног суда добија нови, мање општи, посебан или појединачан суд“ (Kurnik, 2009b: 5). Поједини аутори говоре о непосредном дедуктивном закључивању које представља „облик закључивања из једног исказа у којем се од тачног тврђења о математичком појму из претпоставке изводи тврђење о другом појму који је мање општи, врсни појам од појма у исказу - претпоставци“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 24).

Дедукција је облик закључивања код којег се од општег закључује појединачно. Дедукција може бити посредна и непосредна. Код непосредне дедукције из једне претпоставке (општег закључка) се изводе посебна тврђења. Посредна дедукција се заснива на две или више премиса.

Овде ћемо поменути и дедуктивну методу. Дедуктивна метода „у ширем смислу служи у науци за више различитих сврха, међу осталим:

1. за објашњавање утврђених чињеница и закона,

2. за предвиђање будућих догађаја,

3. за откривање нових чињеница и закона,

4. за доказивање постављених теза,

5. за проверавање хипотеза,

6. за излагање науке“ (Petrović, 1987: 182).

Карактеристике дедукције, као закона закључивања, су:

„(1) Сваки закључак се изводи из раније утврђених (или прихваћених) истина.

(2) сви су закључци логички повезани и низ закључака има крај. Крај је последњи закључак који је у ствари дато тврђење.

(3) ако су тврђења из којих следе поједини закључци истинита, коначни закључак је обавезно истинит“ (Prvanović, 1970: 22).

О важности индукције и дедукције доста говори и чињеница да је математика дедуктивна наука, а да је настава математике претежно индуктивна, тј. заснована на индуктивном закључивању. Стога, важно је подстицати индуктивно закључивање код ученика и тиме их наводити на правилности у процесу закључивања. Важно је ученике поступно оспособљавати за правилно закључивање.

3.4.2. Закључивање по аналогији

Реч аналогија значи делимичну сличност између две појаве или појма, истоврсност, подударност. Аналогија, дакле, представља сродност, подударност две упоређене појаве, два случаја и сл. (Клајн, Шипка, 2007).

Закључивање по аналогији је у суштини закључивање по сличности. Аналогија представља „објашњавање и/или решавање проблема упоређивањем нечега са нечим другим сличним“ (Брковић, 1995: 6).

Аналогија је „делимична сличност између два предмета (где се реч *предмет* узима у најширем смислу). Ако се из једне познате истине изводи друга истина по делимичној сличности предмета, онда кажемо да се закључује по аналогији“ (Prvanović, 1970: 27). Аналогија представља закључивање које се заснива на заједничким својствима посматраних објеката. Ако су две или више појаве или објекта слични и подударају се у одређеном броју својстава, закључује се да ће они бити слични и подударати се и у осталим својствима (Malinović, Malinović Jovanović, 2002; Курник, 2000а; Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016). „Закључивање по сличности, по аналогији јесте облик закључивања из једног исказа у којем се од тачног тврђења о математичком појму из претпоставке изводе тврђења о другом појму који има нека заједничка својства са појмом у исказу претпоставке“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 25).

Закључивање по аналогији „можемо дефинисати као поступак по којем из претпоставке да се одређена својства нека два процеса или објекта подударају, закључујемо да посматрани процеси или објекти имају још и неко друго заједничко својство. Мало прецизније, ако објект a има особине A, B, C и X, и ако објект b има особине A, B и C, онда b има, вероватно, и особину X“ (Борчић, 1998: 1). Аналогија је „закључивање по (делимичној) сличности математичких објеката (појмова односно дефиниција, теорема и њихових доказа, операција и њихових својстава, геометријских фигура и њихових обележја, теорија и аналогија). Аналогија прожима целокупно човеково мишљење“ (Вуковић, 2008: 126). Аналогија представља мисаони поступак заснован на компарацији, односно утврђивању сличности или разлика између појмова, доказивања неких ставова или решавања математичких задатака. Аналогија поред релативно мале педагошке вредности, има велики значај са аспекта развоја креативности ученика (Pinter i sar. 1996: 25). Аналогија је мисаони поступак код којег се закључак изводи на основу сличности. Она подразумева већ утврђену сличност између појмова. Полазећи од те сличности, ако су појмови слични у неколико случајева (својстава), закључујемо да су слични и у осталим случајевима (својствима) и долазимо до закључака који, ако важе за први појам, важе и за тај други појам.

Закључивање по аналогији у почетној настави математике је чест облик закључивања код сабирања троцифреног и двоцифреног броја, које се изводи по аналогији са сабирањем двоцифрених бројева. Овде можемо додати и низ других математичких садржаја који се усвајају по аналогији са неким претходним, већ усвојеним сличним математичким садржајима. У почетној настави математике, у прва четири разреда основне школе, математички садржаји усвајају се по принципу концентричних кругова и неке од њих ученици могу усвојити по принципу аналогије са раније обрађеним садржајима.

Пример 57. *Пажљиво посматрај примере.*

$2 + 3 = 3 + 2$	$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
$5 + 6 = 6 + 5$	$5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$
$10 + 5 = 5 + 10$	$10 \cdot 5 = 5 \cdot 10$

У првом случају важи правило да ако сабирци замене места, збир се не мења.

Уочаваш ли сличност у примерима из прве и друге колоне?

Шта можеш закључити за множење?

Посматрајући сличне примере, ученик на основу закључка за комутативност сабирања, изводи закључак и за комутативност множења. У овом примеру, закључак изведен аналогијом је тачан.

Могућности примене аналогије су бројне већ од првих дана школовања. Већ у првом разреду основне школе и један од првих примера аналогије јесте „бројање у другој, трећој и било којој десетици које се остварује аналогно са бројањем једноцифрених бројева“ (Вуковић, 2008: 127).

Закључивање по аналогији обухвата „две основне операције:

1) апстракција дате ситуације или конкретног садржаја,

2) конкретизација која подразумева тражење модела који подржава дату апстракцију, који се када је идентификован преноси на модел реалности почетног стања и проверава да ли је адекватан“ (Маричић и сар. 2017: 68).

Аналогија је „једна од најдалекосежнијих и најплодотворнијих мисаоних операција (односно метода у математици као науци). И у настави је аналогија, као наставни поступак, веома значајна“ (Вуковић, 2008: 125). Применом аналогије у настави математике, наставник постиже значајно боље резултате у: разумевању математике, квантитету запамћивања математичких садржаја, трајности знања и креативности у закључивању и исказивању математичких ставова и решавању задатака (Вуковић, 2008).

Основни недостатак аналогије је тај што закључивање по аналогији може довести и до погрешног закључка. Закључивање по аналогији је, дакле, проблематично. Подударност појмова у неком својству не значи увек и подударност у другим својствима. Стога је закључивање по аналогији неопходно доказивати. И поред тих недостатака, закључивање по аналогији има честу примену и значај у откривању математичких истина.

Међу слабостима наставе математике, истиче се да „аналогија није довољно искоришћена, иако је она најбоље средство за брже откривање и усвајање нових математичких истина“ (Kurnik, 2008: 327). Основни недостатак аналогије је то што „мисао остаје на истом нивоу општости. Закључује се од појединачног ка појединачном, од посебног ка посебном, од општег ка општем. Осим тога, она подстиче развијање репродуктивног мишљења и не доприноси развијању креативности ученика“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 86).

Како би се избегли недостаци аналогије и повећала поузданост аналогије потребно је: да постоји што већи број сличних обележја међу примерима који се посматрају, да слична обележја конкретних примера буду суштинска, да постоји минималан број различитих обележја, да различита обележја конкретних примера буду небитна (Шпијуновић, Маричић, 2016: 87).

Када говоримо о предностима и недостацима закључивања по аналогији важно је нагласити и да „је главна предност метода закључивања по аналогији његова плодност и широка примењивост, а главна његова мана је непоузданост“ (Борчић, 1998: 3).

3.5. Интуиција у почетној настави математике

Реч интуиција (од латинске речи intuitio према intueri – гледати унутра) значи способност непосредног опажања, схватања, непосредне спознаје, без помоћи искуства и рационалног закључивања. Наведени термин се дефинише и као осећај, предосећај, слутња (Клајн, Шипка, 2007). „Човек, пре свега, може непосредно да схвати истину - понекад сасвим неочигледну и која противречи здравом смислу - путем директног закључивања без основе и доказа (нејасно је како). Друго, он може да изађе из оквира сопственог искуства путем мисаоног озарења - инсајта - и на тај начин да стекне знање које никад није имао (нејасно је откуд)“ (Група аутора, 2007: 145). Интуиција подразумева да „ми знамо нешто, а да притом не знамо како смо то сазнали“ (Берн, према: Група аутора, 2007: 145).

У математици, интуиција представља извесно „предосећање“, извесно наслућивање, предвиђање да овде или онде постоји одређена истина, да се одређени задатак може решити на одређени начин и да мора имати тачно такво решење. Многа велика открића у математици дошла су интуицијом (Prvanović, 1970; Шпијуновић, Маричић, 2016). Интуиција „није, строго узев, научна метода, али игра важну улогу (чак врло важну улогу) при утврђивању математичких чињеница“ (Prvanović, 1970: 28). Интуиција, иако није облик закључивања, већ више облик наслућивања решења, има велики значај у математици. Интуиција у настави математике представља наслућивање решења, без неког посебног дубљег улажења и схватања процеса. „У почетној настави математике интуиција има важну улогу. Она проистиче из природе мишљења ученика, али и чињенице да ученици не поседују велики обим математичких знања, која би користили у процесу егзактнијих облика закључивања. Зато су идеје које ученик има и које испољава у процесу решавања математичких задатака најчешће засноване на интуицији, наслућивању, а не на строго логичкој процедури мишљења“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 92). Интуиција представља скраћено закључивање. Интуиција није облик закључивања, већ облик сазнања којим се до математичких истина долази наслућивањем, предосећањем, без директног ослањања на чулна или мисаона искуства (Malinović, Malinović Jovanović, 2002; Радојевић, Радојевић, 1984). Интуиција представља „способност предвиђања и схватања пре накнадних спознаја и процеса мишљења. Таква спознаја не ослања се на формално-логички доказ, ни на експеримент као методу откривања научне истине“ (Kadum, 2006а: 83). У математици се под интуицијом често схвата „предвиђање или наслућивање неке математичке истине, односно њено глобално сагледавање“ (Kadum, 2006а: 84). Интуиција представља сазнања до којих се долази на основу наслућивања, а не путем искуства. Стога је, тешко објаснити како се до тог сазнања дошло. Интуитивним предосећањем ученици у почетној настави математике некада долазе до открића и решења задатка, а да ни сами нису свесни како су до тог открића дошли.

Интуиција се дефинише као „субјективни потенцијал за извођење закључака, налажење решења или наслућивање одређеног исхода, ослањајући се на чулне и мисаоне способности, као и на сопствено искуство“ (Pinter i sar. 1996: 31). Интуиција је „конструкција. Тајна разумевања математике јесте логички дух, али се до њега не може доћи ако се не пође од интуиције“ (Песталоци, према: Пикула, Милинковић, 2015: 23). Интуицијско закључивање је извођење закључака непосредно, на основу предосећаја, по моделу „синула ми је идеја“ („упалила ми се сијалица“), а да ни њему самом није јасно како је до тога дошло. Та способност се развија, као и све друге способности, различитим интелектуалним активностима. Интуицију треба развијати код ученика добро осмишљеним задацима (Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016).

Интуиција није поуздан начин долажења до сазнања, и сазнања наслућена интуицијом, се морају проверити и доказати. Без обзира на тај недостатак, интуиција у почетној настави математике има одређену значајну улогу која се огледа у чињеници да ученици у почетку стичу интуитивну слику о неким математичким појмовима.

Пример 58.

А = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99

Б = 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 100

Који је број већи (А или Б) и за колико?

У наведеном примеру интуитивно долазимо до закључивања које нас води до тачног решења, не треба да сабирамо низ бројева.

У почецима математичког образовања, интуиција игра важну улогу. Позитивна страна интуиције се огледа у проверавању онога што се интуицијом наслути и коришћењу идеја које се наслуте. У настави се често спутава развој интуитивног мишљења кроз „начин оцењивања, при чему се тражи тачан одговор; фаворизовање конвергентног мишљења (мишљење које води логички тачном одговору) уместо дивергентног мишљења (мишљење које води оригиналном решавању проблема); строго коришћење уџбеника од стране наставника итд.“ (Дејић, 2009: 447–448). Насупрот томе, настава треба да подстиче интуитивно мишљење и ученике треба подстицати у оригиналном решавању проблема. У почетној настави математике важно је подстицати слободу мишљења, подстицати ученике да слободно размишљају и износе своје идеје, дозволити им да проналазе различите путеве доласка до решења и проналазе више решења задатка и сл.

3.6. Операционализација појма логичко мишљење у почетној настави математике

Раније смо поменули да се развијање логичког мишљења ученика суочава са бројним проблемима који се, пре свега, односе на дефинисање самог појма, као и на његово јасно одређење. Да би учитељи у наставном процесу могли успешно да подстичу и развијају логичко мишљење својих ученика, њима мора бити јасно и једнозначно дефинисано шта је то *логичко мишљење*, шта тачно представља тај појам и које способности укључује. Једино јасно и прецизно одређено логичко мишљење ученика се може подстицати и развијати у почетној настави математике. „Реч мишљење обухвата много сложених и суптилних психичких операција, процеса који воде сазнању... Математичко мишљење је логичко мишљење... Логичким мишљењем се долази до сазнања узрочности, зависности, истине“ (Prvanović, 1970: 14). И Т. Малиновић и Н. Малиновић Јовановић логичко мишљење поистовећују са математичким мишљењем и истичу да оно служи за изграђивање математичких појмова, манипулисање тим појмовима и за проналажење односа који владају између тих појмова (2002: 44). Тако схваћено, логичко мишљење ученика има значајно место приликом решавања математичких задатака у почетној настави математике и представља: различите мисаоне операције, анализирање елемената датих у задатку, логичко резоновање о датим елементима, успостављање различитих узрочно-последичних веза и односа између елемената у задатку, закључивање, сагледавање елемената и проблема из више различитих углова и расуђивање, уочавање сувишних, тзв. ометајућих података, оригиналност, досетљивост, повезивање података датих у задатку са искуством и знањем које ученик поседује и успостављање релација између датих података и искуства и сл.

Логичко мишљења представља „**сложену интелектуалну активност у којој до изражаја долазе, пре свега, следеће способности:**

-описање исказима, константама, променљивим величинама, формулама;

- извођење основних логичких операција (конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција, негација);

- употреба квантификатора (за сваки, постоји);

- примена закона закључивања (модус поненс, редуцтио ад абсурдум, правило контрапозиције, закон искључења трећег и тако даље);

- дефинисање и доказивање“ (Шпијуновић, 1999: 350).

Како се подстицање логичког мишљења намеће као важан задатак наставе математике, а са друге стране, често се логичко мишљење изједначава са матемтичким мишљењем, очекивали смо да је, због важности, јасније одређено и операционализовано у педагошко-психолошкој и дидактичко-методичкој литератури. Нажалост, у нама доступној педагошкој, психолошкој, дидактичкој и методичкој литератури појам логичког мишљења није јасно дефинисан и нисмо успели пронаћи операционализацију појма *логичко мишљење* конкретно извршену за почетну наставу математике. Стога смо се определили за бављење проблемима везаним за могућности подстицања и развијања логичког мишљења у почетној настави математике.

Да би се на логичко мишљење могло деловати и да би се оно развијало и унапређивало, мора се јасно операционализовати преко способности које га ближе одређују. То одређење мора бити усклађено са узрасним карактеристикама ученика и уважавати их. Са друге стране, то одређење мора уважавати специфичности математике, односно апстрактност математичких садржаја. У складу са свим наведеним особеностима, треба издвојити оне способности логичког мишљења које ће га најбоље одредити. Пре него што логичко мишљење одредимо преко способности које га сачињавају, навешћемо дефиницију способности. Способности су „особине појединаца које омогућавају да се непосредно изведу телесне и/или менталне операције са успешним исходом у датој ситуацији“ (Брковић, 1995: 57).

При операционализацији логичког мишљења ученика треба поћи од следећих чињеница:

- логичко мишљење је сложен феномен, сложена интелектуална активност коју сачињава више способности које су по својој природи такође сложене и тешко да се могу посматрати изоловано једна од друге,

- операционализација појма логичког мишљења треба да буде усклађена са специфичностима наставе математике, у складу са њеном апстрактношћу и специфичним садржајима,

- операционализација појма логичког мишљења ученика мора бити у складу са развојним карактеристикама ученика.

Полазећи од наведених специфичности, прихватамо дефиницију по којој оно представља „способност ученика да користи: *логичке операције* (конјункција, дисјункција, негација, импликација и еквиваленција), *мисаоне поступке* (анализа и синтеза, апстракција и генерализација, конкретизација и специјализација, упоређивање (компарација)) и *способности закључивања* (индуктивно и дедуктивно закључивање, закључивање по аналогији и интуиција)“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 440).

Након детаљног разматрања логичких операција, мисаоних поступака и способности закључивања, чији смо преглед дали у претходним поглављима, и сагледавајући специфичне ситуације у којима их ученик користи у настави математике, у раду ћемо прихватити одређење појма *логичко мишљење* у почетној настави математике, преко следећих способности:

„1. Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не) у почетној настави математике,

2. Способност уочавања узрочно-последичних веза и закључивање на основу успостављених веза,

3. Способност откривања законитости и правила и закључивање на основу утврђених правила,

4. Способност уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку (оштроумност) и закључивање на основу уочених елемената“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 327).

Како бисмо логичке операције конјункцију, дисјункцију и негацију прилагодили узрасту ученика и лакше сагледали, одредили смо их као једну способност која је усмерена на схватање логичког смисла појмова *и, или, не* и њихову правилну примену у почетној настави математике. Као што се из наведене поделе види, на основу широко прихваћених и у литератури помињаних облика закључивања (индуктивно, дедуктивно и аналогијско закључивање), за потребе рада, издвојили смо три способности закључивања које у почетној настави математике, тј. при решавању математичких задатака у поменутом периоду, ученике наводе на закључке који су од значаја за решавање задатака. Један од разлога за издвајање наведених способности закључивања јесте специфичност узраста ученика и специфичност математичких садржаја у прва четири разреда основне школе. Са друге стране, тако издвојене способности закључивања пружају могућност истраживања, јер су заступљене у процесу решавања математичких задатака и ближе развојним карактеристикама ученика. Тако дефинисане способности закључивања су предмет нашег истраживања, јер их је могуће јасно сагледати, подстицати различитим врстама задатака и пратити њихов развој. Другим речима, за потребе рада и нашег истраживања смо их тако дефинисали, ради систематичнијег посматрања и деловања на њихово подстицање и развијање. Даље у раду ћемо се свим наведеним облицима закључивања детаљније бавити са посебним освртом на њихово јасно одређење и различите начине позитивног деловања на развијање способности закључивања.

Полазећи од схватања логичког мишљења као комплексног појма дефинисаног преко различитих компоненти које су даље операционализоване на способности, морамо указати на чињеницу да се у процесу решавања математичког задатка те способности преплићу, прожимају и допуњују једна другу. У једном делу решавања математичког задатка могуће је издвојити способност логичког мишљења која је доминантна, али је она у том процесу допуњена и другим способностима и тек заједничким деловањем различитих способности задатак може бити решен. Сваки покушај навођења примера који утичу на развијање једне способности логичког мишљења треба условно схватити, јер у процесу решавања математичких задатака мора бити активирано више различитих способности и само њиховим заједничким деловањем, све фазе решавања задатка могу бити успешно обављене. Операционализација коју износимо у раду је само једна могућност, јер су компоненте и способности логичког мишљења, које смо за потребе рада издвојили, такође, веома сложене интелектуалне активности и могу бити даље операционализоване. Разлог за наведену операционализацију условљен је потребама истраживања. У истраживању смо пошли од претпоставке да тако издвојене способности логичког мишљења у почетној настави математике можемо подстицати и развијати одговарајућим задацима, да их можемо пратити и истраживати.

3.6.1. Способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не) у почетној настави математике

Како се логичке операције у почетној настави математике користе углавном као разумевање и употреба термина *и, или, не,* и веома су присутне, као такве, у математичким задацима, за потребе рада издвојили смо *способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не)* као посебну способност логичког мишљења. Она представља способност ученика да разумеју значење наведених речи и на прави начин користе наведене речи (термине) приликом решавања математичких задатака. Другим речима, наведена (издвојена способност) представља логичке операције дисјункцију, конјункцију, негацију, али само на нивоу разумевања значења термина и коришћења тих термина примерено узрасту ученика, тј. у почетној настави математике. Од ученика овог узраста (прва четири разреда основне школе) очекује се да схватају значење термина *и, или, не* и да правилно, прецизно и тачно користи термине *и, или, не* приликом решавања математичких задатака. Дакле, за потребе рада и истраживања, уз максимално уважавање развоја и узраста ученика, логичке операције (конјункцију, дисјункцију, негацију) спојили смо у *способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не) у почетној настави математике.*

У раду смо се посебно бавили сваком наведеном логичком операцијом и навели појединачне примере за сваку логичку операцију. У наставку ћемо навести неколико примера задатака у којима се као захтев у задатку користи више логичких операција, односно, истовремено захтева разумевање конјункције, дисјункције и негација на нивоу схватања значења појмова *и, или, не*. У задацима који следе, од ученика се захтева добро разумевање значења речи „и“, „или“, „не“, схватање њихове логичке функције у математичким задацима и њихово правилно коришћење.

Пример 59. *Међу понуђеним, прецртај поља у којима резултати нису већи од 675 и нису мањи од 596.*

653 + 28 567 + 39 537 + 56

574 + 57 587 + 98

569 + 26 609 + 76 589 + 91

Наведени пример од ученика истовремено захтева и способност разумевања значења и коришћења термина „не“ и способност разумевања значења и коришћења термина „и“, као и способност разумевања значења и коришћења термина „или“. Ученик, да би решио наведени задатак, мора добро познавати значење термина „не“ у задатку и на тој основи открити да бројеви који *нису већи од 675*, јесу мањи од 675 или су једнаки броју 675. На исти начин, помоћу негације *нису мањи од 596*, закључује да се траже већи бројеви од 596 или пак једнаки броју 596. Током закључивања, на основу негације, ученик је у прилици и да користи способност разумевања значења термина „или“. Тек када уз помоћ негације и дисјункције редефинише податке дате у задатку, помоћу способности разумевања значења и коришћења термина „и“ (конјункција) ова два наведена услова доводи у везу (важе истовремено).

Пример 60. *Броју седме стотине којем је цифра десетице пет и који је паран додај најмањи број треће десетице који није паран. Нађи сва решења.*

Способност схватања функције коју имају појмови „и“, „или“ и „не“ вишеструко долази до изражаја у наведеном примеру. Ученик на основу доброг разумевања значења поменутих термина открива да се ради о троцифреном броју, да је тај број из седме стотине, дакле, почиње цифром шест. Затим, да тај број има цифру 5 на месту десетице. Везником „и“ се наводи и да је тај број паран, дакле на месту цифре јединице може имати цифру 0, или цифру 2, или цифру 4, или цифру 6, или цифру 8. У самом процесу решавања долази до изражаја употреба термина „или“. Тиме је откривено да има пет таквих бројева. У другом делу задатка ученик открива да се ради о двоцифреном броју из треће десетице, који је најмањи. Везником „и“ наведен је још један услов за тај број. Овде се ученик среће и са негацијом. Број *није паран*, дакле, непаран је. Како тај број мора бити најмањи и непаран, а истовремено из треће десетице, ученик открива да се ради о броју 21. Када открије први сабирак (пет могућности) и други сабирак, наводи пет решења. Оно што се може замерити оваквим и сличним задацима, јесте чињеница да садрже више захтева, што, некада, може довести до погрешног закључка о развијености способности разумевања логичког смисла појмова „и“, „или“ и „не“. Другим речима, ученик можда добро разуме и схвата употребу везника „и“, али не разуме добро негацију и слично. Са друге стране, циљ оваквих задатака у почетној настави математике је навикавање ученика на правилну употребу термина „и“, „или“ и „не“, на разумевање њихове логичке функције у задацима и кроз поступност у њиховом решавању ученици то успешно савладавају.

Пример 61. *Ната је записивала одузимања код којих је умањеник број из пете или седме стотине, а разлика не већа од 234. Међу датим изразима прецртај одузимања која Ната није могла записати.*

432 – 268	**648 – 389**
634 – 386	**621 – 399**
454 – 268	**425 – 156**

Код наведеног примера правилном употребом везника „или“ ученик открива да је умањеник број који припада петој или седмој стотини (укључни смисао везника „или“). Разумевањем негације, ученик тражи резултате који нису већи од 234, дакле, мањи су или су једнаки 234. Таква одузимања, према услову задатка, Ната записује. Како се условом задатка од ученика захтева да прецрта одузимања која није могла записати, ученик закључује да ће прецртати преостале записе који не испуњавају дате услове да буду записани. Како се ради више о језичком и логичком разумевању употребе термина „и“, „или“ и „не“, ученици брзо савладавају суштину и навикавају се на поступност у раду, чиме лако савладавају и способност разумевања значења и коришћења наведених термина при решавању математичких задатака.

Пример 62. *Маша је записала број који има две стотине и који је паран. Том броју је додала троцифрени непаран број којем је цифра десетице 2 или 4. Међу датим изразима прецртај изразе које Маша није могла записати.*

245 + 349 **368 + 643**

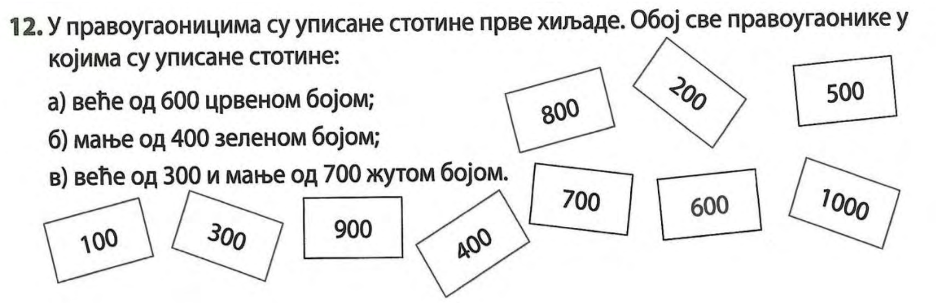
288 + 623 **294 + 449** **268 + 343**

459 + 521 **386 + 246**

Поступном израдом наведеног задатка ученик прво мора схватити смисао конјункције, тј. у првом делу задатка дата су два податка која су повезана везником „и“ и која ученик истовремено мора узети у обзир да важе како би открио све могућности које се односе на први сабирак. У другом делу задатка, ученик се, такође, среће са конјункцијом, јер истовремено важи више података (троцифрени, непаран број и којем...). У другом делу задатка, ученик се среће и са дисјункцијом и неопходно је да схвати укључни смисао дисјункције који се огледа у допуштању обе могућности (на месту цифре десетице је цифра 2 или цифра 4). Тек на крају, у трећем делу задатка, ученик се среће са негацијом. Када је идентификовао изразе које је Маша могла записати, мора да схвати негацију и да се од њега захтева да прецрта оне изразе који не испуњавају захтеве да буду записани.

Математичких задатака који утичу на способност правилног схватања значења и коришћења појмова „и“, „или“ и „не“, као што смо већ помињали, има у уџбеницима математике за основну школу. Овде ћемо још једном указати на примере задатака из уџбеника математике који могу извршити повољан утицај на развој поменуте способности логичког мишљења.

Пример 63.


12. У правоугаоницима су уписане стотине прве хиљаде. Обој све правоугаонике у којима су уписане стотине:

а) веће од 600 црвеном бојом;

б) мање од 400 зеленом бојом;

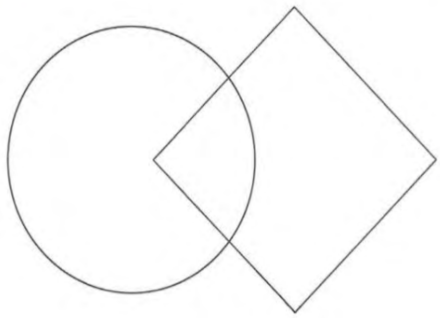
в) веће од 300 и мање од 700 жутом бојом.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019а: 26)

Наведени пример на једноставан начин код ученика подстиче правилну употребу везника „и“ (у примеру под в) у решавању математичких задатака и на тај начин припрема ученике за правилно разумевања значења и коришћења наведеног термина, односно правилно разумевање конјункције у математичким задацима.

Пример 64.

5. На слици су нацртани круг и квадрат. Доцртај тачке *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M* и *N* на следећи начин:



а) на кружници и ван квадрата су *D, G* и *K*;

б) на кружници и у квадрату су *B* и *L*;

в) у унутрашњости круга и ван квадрата су *A, M* и *N*;

г) у унутрашњости квадрата и ван круга су *C* и *E*;

д) преостале тачке су и ван круга и ван квадрата.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019б: 33)

Приказани пример, такође, подстиче способност конјункције, тј. правилног разумевања значења и коришћења термина „и“.

Пример 65.

Живко је сабрао један троцифрени број седме стотине и један једноцифрени број. Добио је збир 708. Које бројеве је Живко сабрао?

Одговор: Живко је сабрао бројеве _____ и _____ или _____ и ____.

Које је бројеве Живко могао да сабере ако је добио збир:

а) 706; Одговор: _____ и ____ или _____ и ____ или _____ и ____ или _____ и ____.

б) 704; Одговор: ______________________________

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019б: 14)

Како у наведеном примеру задатак има више решења, ученик је у прилици да, при навођењу решења, схвати укључни смисао термина „или“, односно да схвати функцију наведеног везника, чија се суштина огледа у допуштању више решења и навођењем свих случајева задатак је тачан.

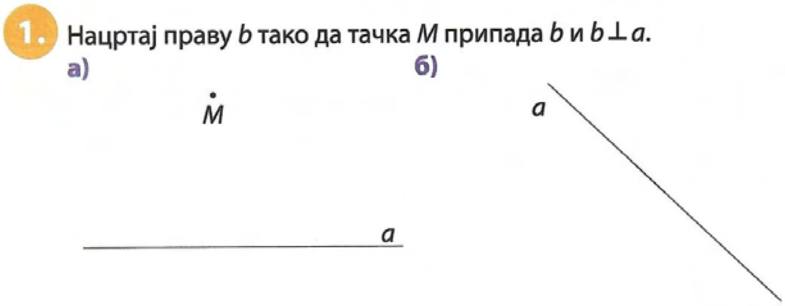
Пример 66. *Дат је низ бројев: 8, 16, 24, 32, 40, 48, ... Који од бројева 664, 736, 792, 834 и 984 се не налази у овом низу?*

Одговор: ____

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 38)

У поставци наведеног задатка ученик се среће са негацијом. У процесу решавања ученик мора да открије правило по којем су дати бројеви у низу (сваки следећи члан низа је за 8 већи), а затим да дође до закључка како ће међу понуђеним пронаћи оне који задовољавају услов да буду у низу (број у низу мора бити дељив бројем 8). На крају, онај број који не задовољава услов, да буде у низу, издваја као одговор на постављено питање, што представља решење задатка.

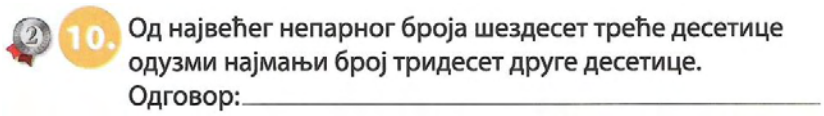
Пример 67.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019б: 40)

Наведени пример (Пример 67), подстиче способност конјункције, тј. правилног разумевања значења и коришћења термина „и“. Док црта задату праву *b*, ученик мора узети у обзир оба захтева које та права мора истовремено испуњавати – мора садржати тачку М и бити нормална на праву *a*.

Пример 68.


10. Од највећег непарног броја шездесет треће десетице одузми најмањи број тридесет друге десетице.
Одговор:______________________________

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 71)

Поред елементарних математичких знања, наведени задатак захтева и разумевање конјункције. Ученик при одређивању умањеника укључује три услова истовремено. Број је из шездесет треће десетице, највећи и непаран. И у другом делу задатка неопходно је резумевање и примена конјункције.

Способност схватања значења и правилне примене појмова и, или, не је сложена интелектуална способност која утиче на развијање логичког мишљења ученика. Решавајући задатке који од ученика захтевају разумевање значења везника „и“ у математичким задацима, ученик је у прилици да различите податке, који истовремено важе, узима у обзир при доласку до решења тако што оба захтева укључује. Применом задатака који то захтевају од ученика, ствара се добра подлога за подстицање и развијање конјункције. Како је конјункција једна од логичких операција, њеним подстицањем и развијањем директно се утиче и на подстицање и развијање логичког мишљења. Слично је и код разумевања значења везника „или“. Схватањем и разумевањем значења везника „или“ у математичким задацима и схватањем његове логичке функције, да тачно решење допушта обе могућности, подстиче се и развија дисјункција. Како је дисјункција логичка операција, њеним подстицањем и развијањем, подстичемо и развијамо логичко мишљење ученика. Негација је логичка операција и њеним разумевањем у почетној настави математике, подстицањем и развијањем кроз различите математичке задатке, утичемо и на подстицање и развијање логичког мишљења. Ако различитим задацима утичемо на подстицање и развијање различитих логичких операција, а оне су део логичког мишљења, ми тим задацима утичемо на развијање логичког мишљења ученика. Навели смо само неке типове математичких задатака којима се то може постићи у почетној настави математике, а могућности подстицања способности схватања значења и коришћења појмова (и, или, не) у почетној настави математике су велике.

3.6.2. Способност уочавања узрочно-последичних веза и закључивање

Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената датих у задатку и закључивање на основу откривања датих веза представља анализирање и сагледавање података датих у задатаку са различитих становишта (из различитих углова) и откривање релација и веза између података, тј. довођење у везу различитих битних информација и откривање последица њихове повезаности, те закључивање на основу њихових веза и последица те повезаности. Способност увиђања узрочно-последичних веза и односа између елемената датих у задатку укључује и способност елаборације. Елаборација представља способност стваралачког мишљења „која долази до изражаја у ситуацијама када ученик на бази уочавања односа и услова датих у задатку открива нове идеје и предвиђа редослед корака који омогућавају постепен и систематски долазак до решења" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 444). Такође, способност уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената у задатку укључује и способност реформулисања проблема, која се у литератури дефинише као способност критичког мишљења под којом се, између осталог, подразумева и „извођење закључака на основу уочавања веза и релација у садржају задатка образложених јасним аргументима и уочавање односа међу условима задатка и враћање сазнајног пута у обрнутом смеру" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 448). Суштина ове издвојене способности је у анализирању елемената датих у задатку и сагледавање тих елемената у новим односима које је потребно открити. Наведено говори о уској повезаности способности уочавања узрочно-последичних веза и способности елаборације, као и повезаности са способношћу редефинције. Могли бисмо рећи да елаборација и редефиниција прате способност уочавања узрочно-последичних веза између елемената, или, чак, да је уочавање узрочно-последичних веза у задатку често услов за успешну редефиницију и елаборацију.

Када говоримо о способности уочавања узрочних веза и последичних односа између датих елемената и закључивању на основу тих односа, важно је нагласити да та способност обухвата низ других мисаоних активности: анализирање елемената који су дати и анализирање веза и односа који су експлицитно дати и откривање нових релација које нису експлицитно дате, уочавање имплицитних веза, извођење закључака и сл. Другим речима, подаци и информације дате у задатку се посматрају из више различитих углова и на тај начин се откривају релације које међу њима владају, а нису видљиве директно, те врши закључивање на тој основи и долази до решења задатка. Наведена способност долази до изражаја у решавању логичких задатака, решавању задатака помоћу Веновог дијаграма, табела, графикона, итд. Дакле, у свим оним задацима код којих се из експлицитно датих података морају открити имплицитне релације међу њима.

На основу реченог, сматрамо да *способност уочавања и успостављања узрочно-последичних односа и закључивање на темељу уочених веза* јесте сложена интелектуална активност која обухвата следеће способности: уочавање веза и релација међу елементима, уочавање специфичних веза и релација које нису експлицитно дате и закључивање о последицама повезаности елемената на основу уочених релација.

Колики је значај ове способности у решавању задатака најбоље сведочи чињеница да „кључни моменат за решавање проблема јесте сагледавање и разумевање унутрашњих структура веза и односа између непознатог у проблему и дате проблемске ситуације и њених делова. У том процесу учествују операције: груписања, организације, редефинисања, прегруписања и друго" (Маричић и сар. 2017: 249). За способност уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената у задатку, можемо рећи да, често, представља основу за почетак решавања неких текстуалних задатка, као и тзв. проблемских задатака.

Различити типови задатака, који повољно делују на подстицање способности увиђања узрочних веза и последичних односа између елемената датих у задатку, позитивно делују и на систематичност у раду. Код решавања задатака усмерених на подстицање способности уочавања узрочно-последичних веза, ученици се навикавају и на графичко представљање елемената, као и на поступност у раду, а све то заједно води до систематичности. Чак и код једноставних задатака код којих су подаци дати обрнутим редом, ученик је у прилици да уочава везе и односе између елемената. Код задатака, где се од ученика захтева размишљање у супротном смеру од датог, заступљен је висок степен резоновања и логичко, критичко и стваралачко мишљење.

Пример 69. *Књига и свеска коштају укупно 740 динара, а две такве свеске и књига 906 динара. Колико кошта свеска, а колико књига?*

Наведени пример се може једино решити уз уочавање релације која влада између два податка експлицитно дата у задатку. Ученик мора поћи од упоређивања датих података и откривања односа међу тим подацима. Мора поставити питање: *У каквом су односу дати подаци?* Први податак је да цена једне свеске и једне књиге износи 740 динара, а други податак је да две такве свеске и једна књига коштају 906 динара. Упоређивањем датих података, ученик уочава однос који влада између датих података, а то је чињеница да у другом податку имамо једну свеску више. На тај начин ученик је на добром путу решавања задатка и проналази цену једне свеске (906 – 740). Када открије цену свеске и доведе је у везу са првим податком, проналази и цену књиге. У почетку, за решавање оваквих задатака учитељ се може послужити и методом дужи како би проблем приближио ученицима. На тај начин, ученици ће јасније сагледати у каквој релацији су дати подаци.

За подстицање и развијање способности уочавања узрочно-последичних веза, посебно су значајни сложени текстуални задаци. Код већине сложених текстуалних задатака ученик је у прилици да уочава или успоставља везе и односе између елемената датих у задатку и онога што он треба да пронађе.

Пример 70. *Марко има три албума са сличицама фудбалера. Укупно је залепио 879 сличица. У другом и трећем албуму укупно је залепио 664 сличице, а у првом и другом 344 сличице. Колико сличица је у сваком од албума?*

Приликом решавања наведеног примера, ученик мора прво да анализира дате елементе у задатку чиме долази до следећег:

I податак – Први, други и трећи: 879

II податак – Други и трећи албум: 664

III податак – Први и други албум: 344

Упоређивањем наведених података, ученик уочава у каквом су односу први и други податак, као и какве везе владају између првог и трећег податка. Први и други податак се разликују за број сличица који је залепљен у први албум и, проналажењем разлике тих података, открива број сличица у првом албуму. Први и трећи податак се разликују за број сличица који је залепљен у трећи албум и, проналажењем разлике тих података, открива број сличица у трећем албуму. Уочавањем тих релација, ученик лако долази до решења. Корисно је и код ове врсте задатака у почетку, када се ученици први пут срећу са оваквим задацима, користити графички приказ како би односи који владају између података били очигледнији и јаснији ученицима.

Пример 71. *На три тацне је укупно 72 колача. На првој тацни је два пута више колача него на другој, а на трећој тацни је дупло више колача него укупно на прве две тацне. Колико колача је на свакој тацни?*

Сам задатак је на први поглед сложен, али се процес решавања може учинити једноставнијим ако се решава методом дужи и постављањем једначине. Да би дошли до постављања једначине, метода дужи служи за јасније сагледавање односа који владају између датих података.

Способност уочавања веза и односа између елемената датих у задатку има своју примену у решавању многих математичких задатака. Поред наведених, овде ћемо указати на неке које смо пронашли у уџбеницима математике за основну школу. Морамо нагласити да у уџбеницима математике има доста задатака који од ученика захтевају наведену способност, а ми ћемо указати само на неке.

Пример 72.

(Маричић, 2018б: 8)

Наведени пример је пример задатка за први разред. Решавајући наведени задатак, ученик је у прилици да, успостављањем веза и односа између датих елемената, дође до закључка да је у питању лоптица за тенис која је већа од лоптице за стони тенис, која припада Николи, а мања од лопте за фудбал, која припада Урошу. Овај задатак је погодан и за навикавање ученика на поступност у раду. У почетку је, стога, важно подстицати ученике да своје кораке у решавању представљају скицом, све док не буду способни за решавање на чисто менталном плану. Оно што ученицима првог разреда олакшава решавање оваквих и сличних примера, јесте илустрација која прати задатак, јер им слика помаже да оно што замишљају, тј. што се дешава на менталном плану, представе и на конкретном цртежу (вежу за конкретно).

Пример 73.

(Маричић, 2018в: 39)

Успостављањем задатих веза између цифара, ученик изналази решења задатка. Како се наведени задатак налази у радној свесци из математике за први разред, реч је о задатку који је за ученике тог узраста захтеван. Задатак захтева, поред способности уочавања веза и односа између елемената, и низ других способности логичког, критичког и стваралачког мишљења.

Пример 74.

(Маричић, 2018б: 80)

Како би решио наведени задатак, ученик мора успоставити везу између податка који му је саопштио дечак и онога што се од њега захтева. На тај начин долази до сазнања (закључка) да девојчица има за два мањи број од дечака. Приликом решавања овог задатка, у основи јесте успостављање веза, али и импликација, јер ученик закључује у правцу: *ако дечак има за два већи број, тада је код девојчице за два мањи број*.

Пример 75.

1. У три кутије има 99 кликера. У првој кутији има 35 кликера, а у другој за 13 кликера мање него у првој. Колико има кликера у трећој кутији?

Прва: ____

Друга: ___ – ___ = ___

Трећа: ____

Одговор: ____

(Маричић, 2018в: 79)

Наведени пример захтева способност успостављања узрочно-последичних веза и односа између датих елемената. Проблем настаје што у почетку неки ученици имају тешкоћу у уочавању и схватању односа да када од укупног броја одузму оно што је дато (број кликера у првој и другој кутији), остаје оно што се тражи (број кликера у трећој кутији). Ово временом постаје јасно већини ученика и представља добру основу за подстицање наведене способности логичког мишљења.

Поред наведеног примера, има и оних чије решавање захтева уочавање сложенијих односа.

Пример 76.

5. Ако брат да сестри 26 динара, обоје ће имати по 50 динара. Колико динара има брат, а колико сестра?

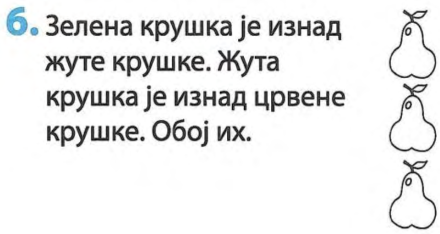
____

Одговор: ____

(Маричић, 2018в: 79)

Код наведеног задатка (Пример 76) у процесу увиђања веза и односа који владају између елемената у задатку, суштина је у мисаоном враћању уназад. Ученици треба да увиде да ће брату, када да сестри 26 динара, остати 50 динара и да враћањем уназад дођу до закључка како ће израчунати колико је имао пре него што је дао сестри. Слично је и ако користе податак да сестра, тек када јој брат поклони 26 динара, има 50 динара и да, такође, враћањем уназад треба да израчунају колико је имала пре него што је од брата добила новац. У почетку је корисно, приликом решавања оваквих и сличних задатака, мисаоно водити ученике представљањем ситуације помоћу графичког приказа.

Пример 77.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 21)

Као што смо већ помињали у примеру 72, и овде је, приликом решавања, ученик у прилици да успостављањем веза и односа између датих елемената дође до закључка. Такође, ученици имају олакшицу, јер се од њих захтева да oбоје дату слику према задатим односима. Важно је само инсистирати на томе да повезују исказе дате у задатку.

Пример 78.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 21)

Суштина решавања наведеног примера је у откривању чињенице да је услов задатка испуњен и када се између црвеног и жутог листа налази зелени, а да је при томе испоштован захтев да се жути лист налази изнад црвеног листа. Стога, можемо рећи да наведени пример, поред способности успостављања веза и односа између датих елемената, подстиче и способност откривања удаљених (скривених) елемената у задатку (оштроумност).

Пример 79.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2017а: 83)

Наведени задатак (Пример 79) је веома захтеван за ученика првог разреда и захтева, поред способности успостављања узрочно-последичних веза и односа између датих елемената, висок степен логике и висок ниво логичког закључивања.

Пример 80.

3. Упиши у сваки ◯ знак · или + тако да добијеш тачну једнакост.

а) 90 ◯ (7 ◯ 2) = 810 б) (8 ◯ 10) ◯ 4 = 8 ◯ 4 ◯ 10 ◯ 4

в) (50 ◯ 30) ◯ 4 = 320 г) (60 ◯ 40) ◯ 7 = 60 ◯ 7 ◯ 40 ◯ 7

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 9)

Наведени пример може послужити за подстицање способности уочавања узрочно-последичних веза и односа између датих елемената. Овде ученик треба да увиди у каквом односу су лева и десна страна једнакости и на који начин треба да добије оно што се очекује. Овакав тип задатака од ученика захтева висок ниво логичког размишљања.

Сличан захтев срећемо и у примеру који следи (Пример 81). Ученику су дате цифре, а њиховим комбиновањем ученик треба да добије бројеве које ће затим уписати на одговарајућа места тако да добије тачна сабирања или одузимања. Овакав тип задатака, поред способности успостављања веза и односа између елемената, захтева висок ниво логике и способност закључивања на високом нивоу. Ученик не само да треба да доведе у везу цифре, већ и да размишља унапред како ће бројеве које добије довести у везу, а да његов захтев буде испуњен.

Пример 81.

11. У свако поље упиши по једну од датих цифара тако да добијеш тачна сабирања и одузимања. Погледај урађене примере.

а) 2, 3, 4, 4, 8;
34 + 8 = 42

б) 3, 4, 5, 6, 7;
☐☐ + ☐ = ☐☐

в) 0, 2, 2, 3, 3;
☐☐ + ☐ = ☐☐

г) 6, 7, 7, 8, 9;
☐☐ − ☐ = ☐☐

д) 0, 1, 5, 6, 9;
☐☐ − ☐ = ☐☐

ђ) 0, 4, 6, 7, 8;
☐☐ − ☐ = ☐☐

е) 1, 2, 2, 3, 7, 9;
72 + 21 = 93

ж) 2, 4, 5, 7, 9, 9;
☐☐ + ☐☐ = ☐☐

з) 1, 2, 3, 4, 5, 9;
☐☐ + ☐☐ = ☐☐

и) 2, 3, 3, 4, 8, 9;
☐☐ − ☐☐ = ☐☐

ј) 1, 2, 2, 3, 5, 7;
☐☐ − ☐☐ = ☐☐

к) 0, 3, 4, 4, 6, 8;
☐☐ − ☐☐ = ☐☐

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2016а: 72)

Пример 82.

9. Бака је поделила 30 бомбона унуцима Марини и Слоби. Слоба је добио 2 пута више од Марине. Колико је бомбона добио Слоба, а колико Марина?

Слоба: ____________________

Марина: ____________________

Одговор: ____

(Маричић, Ђуровић, 2019в: 55)

Наведени пример (Пример 82) подстиче способност уочавања веза и односа између елемената у задатку. Од ученика се захтева да уоче да ће Слоба добити два, а Марина један део, што га води до закључка да број бомбона треба поделити на три дела.

Пример 83. *Колико различитих правоугаоника има обим 14 cm ако су им дужине страница изражене у центиметрима?*

____

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019г: 29)

Решавајући наведени пример, ученик је, поред елементарних математичких знања о обиму правоугаоника, у ситуацији да на основу успостављене везе да је $a + b = 7$, проналази бројеве који задовољавају дати услов. На тај начин долази до решења да су могуће дужине страница правоугаоника: 1 cm и 6 cm, 2 cm и 5 cm, 3 cm и 4 cm.

Пример 84. *Марта је помоћу цифара 0, 1, 2, 3, 4 и 5 записала два троцифрена броја. Она је употребила све цифре. Које бројеве је Марта записала ако је збир добијених бројева:*

а) најмањи могућ; *б) највећи могућ?*

Одреди сва решења.

Одговор: ____

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 64)

Ученик је код овог примера у прилици да успоставља узрочно-последичне везе које треба да владају између бројева састављених од датих цифара. При исписивању бројева мора да распоређује цифре у броју тако да задовољи услов задатка, тј. да добије најмањи/највећи збир. Тај услов му одређује како ће распоредити дате цифре у оба броја. Само тачним распоредом цифара, који доводи до записа два најмања броја од тих цифара, ученик долази до решења да је најмањи могући збир 339. Даљом заменом цифара, између та два броја у оквиру исте месне вредности, долази до свих могућих решења, односно закључује да се ради о бројевима: 104 и 235, 105 и 234, 134 и 205, 135 и 204. На сличан начин ученик долази и до закључка да је највећи могући збир бројева записаних задатим цифрама 951 и да се ради о бројевима: 531 и 420, 530 и 421, 521 и 430, 520 и 431.

Пример 85. *Тања и Мирко имају једнаке суме новца. Каћа има два пута више новца од Мирка.*

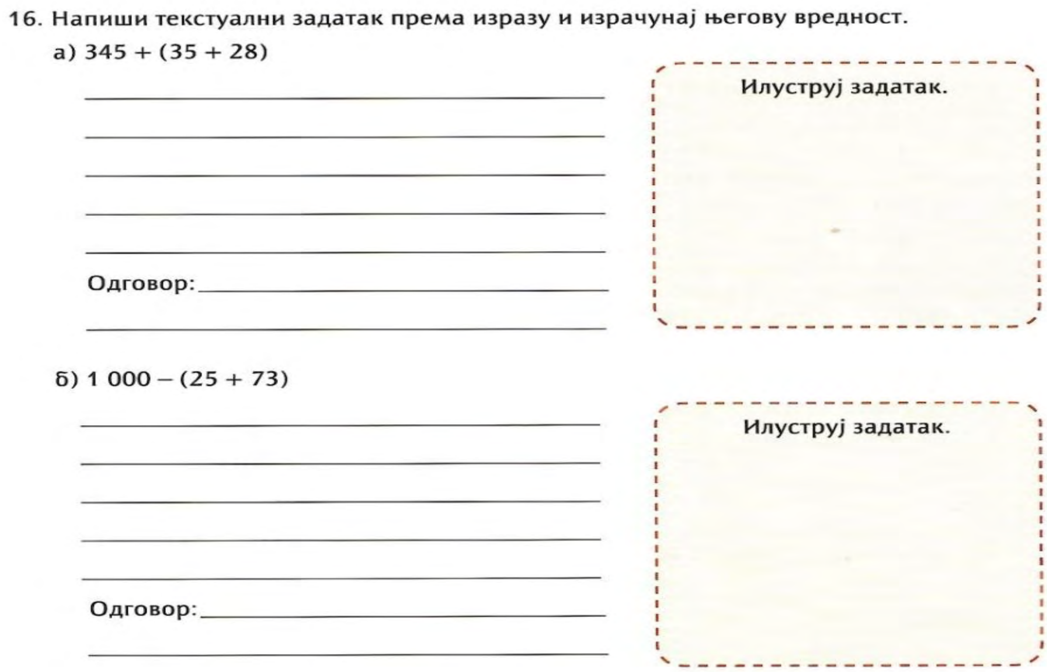
а) Ако Каћа има 212 динара више од Тање, колико укупно новца имају све троје?
Одговор: ____
б) Ако све троје укупно имају 828 динара, колико има свако од њих?
Одговор: ____

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019в: 38)

При решавању наведеног задатка (Пример 85) ученик мора увиђати и успостављати однос који влада између података датих у задатку. Дати подаци се могу представити методом дужи како би ученици јасније сагледали односе који владају међу подацима. Графички представљени, односи који владају између података постају јаснији ученицима. Како Тања и Мирко имају једнаке суме новца, а Каћа има два пута више новца од Тање, ученици уочавају да Мирко и Тања имају по 212 динара, а да Каћа има $2 \cdot 212 = 424$ динара. Суштина решавања овог примера је у откривању чињенице да је у задатку дат податак да Каћа има два пута више новца од Мирка и да има 212 динара више од Тање, као и да Тања и Мирко имају једнак број динара, што наводи на закључак да Каћа има и 212 динара више од Мирка. Редефинисањем података, ученик открива да тих 212 динара (податак који је дат) представља половину Каћиног новца. Стога, можемо рећи да наведени пример, поред способности успостављања веза и односа између датих елемената, подстиче и способност редефиниције, као и способност откривања удаљених (скривених) елемената у задатку (оштроумност).

Посебну пажњу заслужују и задаци код којих је дат израз и на основу њега треба саставити текст задатка. Код ових задатака од ученика се захтева висок ниво размишљања и логичко, критичко и стваралачко мишљење. Ученику су дати подаци који су већ стављени у одређену везу, тј. дат је однос између елемената, а од ученика се захтева да осмисли језичку формулацију која ће осликавати баш тај задати однос (Примери 86, 87 и 88).

Пример 86.


16. Напиши текстуални задатак према изразу и израчунај његову вредност.

а) 345 + (35 + 28)

Одговор:

Илуструј задатак.

б) 1 000 – (25 + 73)

Одговор:

Илуструј задатак.

(Јовановић, Русић, Николић Гајић, 2020: 44)

Пример 87. *Запиши неједначину са сабирањем или одузимањем чија су решења:*

а) x = {0, 1, 2, 3}; *б) x = {0, 1, 2, 3, 5, 6};* *в) x = {11, 12, 13...};*

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019г: 74)

Пример 88. *Састави текст задатка који се решава неједначином:*

а) x – 200 < 300;

б) 320 – x > 250

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2019г: 74)

Колико је важна способност уочавања узрочно-последичних веза и релација између елемената датих у задатку и закључивање на основу откривања веза, говори чињеница да „разумети структуру неког предмета, значи савладати га тако да смо у стању да уз једну чињеницу вежемо низ других, које са овом стоје у блиској, разумљивој и смисленој вези. Укратко, разумети неку структуру значи схватити природу веза међу њеним елементима“ (Брунер, према: Шпијуновић, 1994: 77).

Нисмо вршили детаљну анализу уџбеника, само смо покушали указати на неке примере којима је наведену способност логичког мишљења могуће развијати у почетној настави математике. На крају, морамо указати на чињеницу да у уџбеницима математике за основну школу проналазимо задатке којима се успешно може подстицати и развијати способност уочавања веза и односа између елемената и извођење закључака на темељу уочених релација.

3.6.3. Способност откривања правила и законитости и закључивање на основу откривених правила

У процесу решавања математичких задатака ученици треба да буду мисаоно ангажовани. Ученике треба подстицати и оспособљавати да самостално трагају за новим решењима, да откривају нове начине доласка до решења, да откривају правила, и принципе који постоје између елемената у поставци задатка, да откривају неки поредак и сл. „Целокупни рад на математичком образовању тече, мора да тече, у знаку самосталног улажења у математику, самосталног формирања потребних појмова, самосталног решавања проблема, самосталног откривања (проналажења) правила, чињеница, закона, у знаку перманентног креативног рада“ (Prvanović, 1970: 83). Из наведених речи С. Првановића, види се огроман значај самосталног улагања напора ученика у процесу стицања знања. Пред ученике, стога, треба стално постављати различите тешкоће и доводити их у ситуације у којима ће сами морати да откривају законитости и правила који владају међу елементима. Као пример задатка који може послужити за откривање правила наводи се следећи задатак:

5 A 4 = 13	13 B 1 = 8	3 C 2 = 12
8 A 3 = 14	17 B 3 = 2	8 C 4 = 5
7 A 4 = 15	20 B 4 = 0	6 C 9 = 2
3 A 6 = 15	1 B 0 = 1	8 C 9 = 0

(Prvanović, 1970: 84).

У наведеном задатку ученик сам треба да открије шта значи слово А, слово В, слово С. После улагања одговарајућег мисаоног напора, ученици ће пронаћи да А означава: *помножити десни број са два и производ сабрати са левим*, С означава: *збир датих бројева одузети од 17*. Првановић (1970) истиче позитиван утицај тешкоће на мисаони развој ученика и значај улагања одређеног мисаоног напора у процесу ученичких самосталних открића. Он инсистира на тешкоћама у настави математике истичући да „ученици воле тешкоће кад се од малих ногу на њих навикну... Учитељева је дужност да ређа те тешкоће тако да их ученици могу да савладају једну по једну“ (1970: 91).

У процесу решавања математичког задатка способност откривања правила долази до изражаја у фази када ученик врши анализирање услова који владају између елемената у задатку и када увиђа законитости које владају између тих елемената, а које су неопходне за закључивање које води до решења задатка. Закључивање на основу уочених правила и законитости долази до изражаја приликом избора начина решавања. Примена откривеног правила и законитости долази до изражаја у последњој фази решавања проблема када ученици врше доказивања и израчунавања неопходна за решавање задатка.

У почетној настави математике, тачније у процесу решавања различитих математичких задатка код којих се ученици срећу са захтевом да открију начело или неко правило, ученици су мисаоно активни, користе различите мисаоне операције, износе различите могућности решења проблема, проверавају различите претпоставке, откривају решење, вреднују га, проверавају, доказују, потврђују или одбацују и слично. Све то доприноси развијању способности откривања законитости и правила, а самим тим и развијању логичког мишљења ученика.

Како би се подстицала и развијала способност уочавања правила и законитости и извођење закључака на темељу тих уочених правила, ученике треба доводити у ситуације да откривају законитости које владају између елемената задатка, подстицати их да сами долазе до нових принципа, да сами износе своје идеје које могу представљати решења и да их проверавају, да траже нове начине доласка до решења, да проналазе више решења и начина доласка до решења и слично. Побројане активности ће позитивно деловати на подстицање и развијање наведене способности логичког мишљења. Другим речима, адекватним одабиром задатака треба мисаоно водити ученике до развијања ове способности. Могућности за подстицање и развијање способности откривања законитости и правила у почетној настави математике су бројне, а ми ћемо указати само на неке типове задатака којима се то може постизати већ на самом почетку математичког образовања.

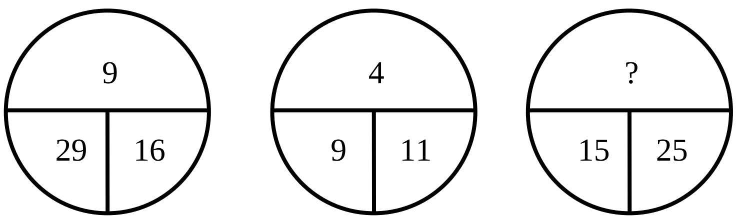
Пример 89. *У табели су неки бројеви представљени различитим симболима. Пробај да откријеш правило по ком су бројеви уписани.*

234	☺ ☺ ☺ ☺ ♥♥♥♥♥♥■■■■■■■■
453	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ■■■■■■
652	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥ ■■■■

Како, поштујући то правило, треба записати број 159?

У приказаном задатку, од ученика се очекује да посматрањем бројева и симбола приказаних у табели, открије правило и начин на који су бројеви представљени симболима. Он мора открити врсту и бројност симбола којима су представљене стотине, којим десетице и којим јединице, а то постиже откривањем правила по којем су симболима записани троцифрени бројеви дати у табели. Након што утврди начело представљања различитих цифара, он то правило треба да примени тако што ће симболима представити тражени број.

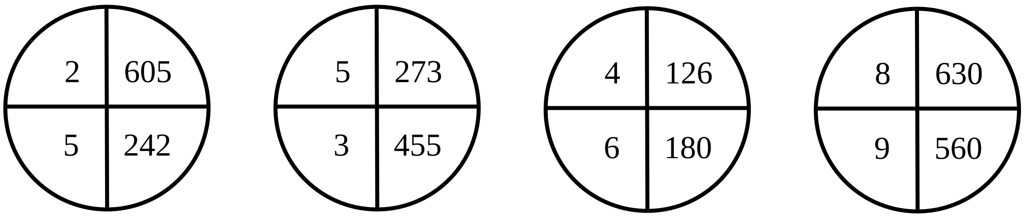
Пример 90. *У прва два круга су по одређеном правилу уписани бројеви. Пробај да откријеш то правило и да га примениш тако што ћеш уписати број који недостаје у трећем кругу.*



У наведеном задатку ученик сам треба да открије по ком правилу су бројеви уписани у првом и другом кругу и да, примењујући то правило, открије и упише број који недостаје у трећем кругу. У почетку ови задаци представљају проблем за ученике, тим више, ако се раније нису сретали са сличним захтевима, али се ученици оваквим задацима постепено могу уводити у способност откривања правила. У почетку им у томе помаже учитељ, а касније ће ученици настојати сами да открију правило и дођу до решења. У самом открићу правила лежи и осећај задовољства када се успе, што делује као снажно мотивационо средство.

Нешто сложенији захтев је када ученик поред начела које открива мора да утврди и одступање од њега (Пример 91). То одступање за ученика представља тешкоћу и отежава процес откривања правила и закључивање.

Пример 91. *Приказана су четири круга унутар којих су бројеви. Испитај на који начин су бројеви уписани у дате кругове. Пронађи и прецртај круг код којег бројеви нису написани по том правилу.*



Дати пример захтева од ученика откривање правила по којем су бројеви уписани у кругове и проналажење круга у којем то правило није испоштовано. „Овакве примере задатака можемо посматрати и као задатке отвореног типа, јер ученици, поред правила које је учитељ маркирао као потенцијално тачно, проналазе и друге, логички конзистентне, тачне одговоре“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 330).

Задаци који од ученика захтевају настављање низа бројева су најзаступљенији примери математичких задатака у којима је ученик у ситуацији да уочи неко правило, неки поредак, начело и да их примењује. Међу бројевима постоји правило по којем су бројеви поређани у низ. Како би решио задатак, ученик мора прво анализирати односе који владају између бројева и открити правило које влада међу њима. У другој фази решавања задатка, ученик примењује правило на настављање низа.

Пример 92. *Упиши следећа четири члана низа.*

0, 2, 6, 12, 20, ______________________________________

Пример 93. *Упиши следећа три члана низа.*

5, 10, 11, 22, 23, 46, 47, _____________________________

Предност оваквих задатака је у томе што се могу примењивати у свим разредима млађег школског узраста и што су заступљени у уџбеницима математике. Чак и у уџбеницима математике за први разред основне школе има оваквих и сличних задатака који захтевају од ученика откривање и примену правила. У првом разреду треба започети са једноставнијим низовима, тј. са низовима бројева између којих влада једноставније правило. Касније те низове треба усложњавати, тј. давати такве низове бројева код којих је правило које влада међу њима сложеније. Основни проблем на који се наилази код оваквих задатака јесте тај што низови нису добро дефинисани. Да би низ био добро дефинисан, неопходан је адекватан број понављања, довољан да ученик открије по ком правилу, по којој законитости се бројеви наводе, што у доста задатака није случај (Јовановић, Вуловић, 2021).

Нисмо радили детаљну анализу уџбеника математике, али увидом у извесне уџбенике, чини се да у њима има велики број задатака који од ученика траже и очекују утврђивање неког начела, правила, принципа који владају и закључивање на основу уочених правила. У наставку ћемо навести неке примере.

Пример 94.

10. Уочи правило и упиши бројеве који недостају.

10	9	20	8	30	7														

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018г: 24)

Пример 95.

16. Уочи правило у низу бројева и допиши бројеве који недостају.

а) 7, 17, 27, ___, ___, 57, ___, ___, ___, 97

б) 92, 82, ___, ___, 52, ___, ___, ___, 12

в) 12, 23, 34, ___, ___, ___, 78, ___

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018г: 25)

Пример 96.

17. Уочи правило па упиши бројеве који недостају.

а) 5, 10, 15, 20, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___.

б) 56, 58, 60, 62, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___

в) 7, 10, 17, 20, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___.

г) 2, 5, 7, 10, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018г: 54)

Код ове врсте задатака могућности су огромне. Важно је само у почетку са ученицима почети од једноставнијих правила која владају међу бројевима и постепено ићи ка сложенијим. Као занимљиву варијанту наводимо и пример низа бројева исписаних римским цифрама.

Пример 97.

6. Доврши започети низ бројева.

XIX, XX, ___, ___, ___, ___, ___.

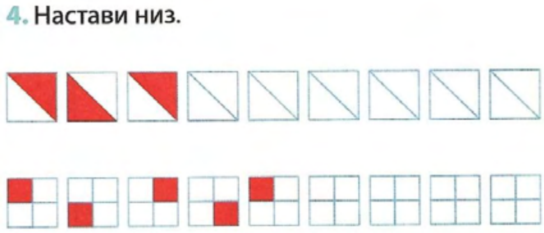
II, IV, VI, ___, ___, ___, ___, ___, ___, ___.

V, X, XV, ___, ___, ___, ___.

(Маричић, Ђуровић, 2019б: 24)

Постоје бројни начини позитивног деловања на способност откривања правила међу елементима у задатку. Учитељима су на располагању различите врсте математичких задатака којима се то може постићи од првих дана школовања.

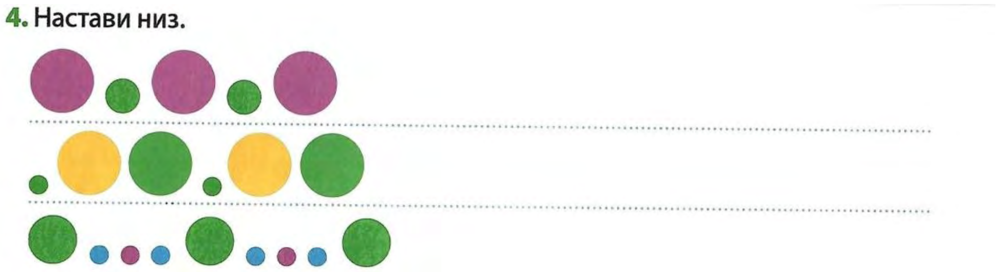
Пример 98.



(Маричић, 2018а: 28)

Могућности комбиновања су различите. Поред наведеног задатка (Пример 98), где ученик према правилу које уочи треба да настави да боји, до оних где према правилу треба да настави низ доцртавањем (Пример 99).

Пример 99.



(Маричић, 2018б: 8)

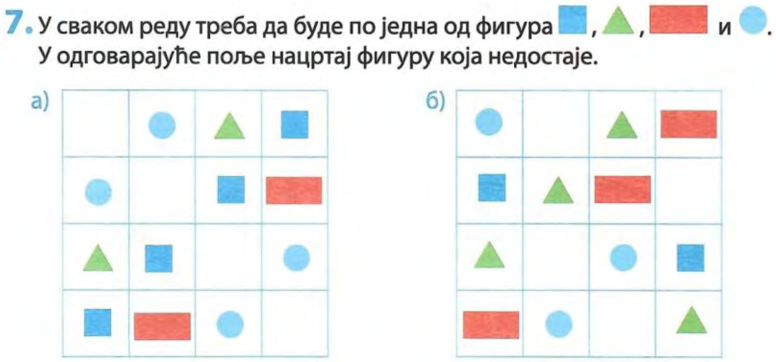
Задатак (Пример 100) који налазимо у уџбенику математике за први разред, такође, од ученика захтева уочавање правила и откривање облика, према том правилу, који треба да стоји у празном пољу. Наведени пример је погодан за увођење најмлађих ученика у откривање правила и закључивање на основу откривеног правила. Пример је у исто време и интересантан за ученика.

Пример 100.

(Маричић, 2018б: 23)

Пример 101 је нешто сложенији, јер се од ученика тражи да сам открије правило. Ученик добија помоћ у виду објашњења да у сваки ред треба распоредити по једну различиту фигуру, па само открива која фигура недостаје у датом реду. Та олакшица је оправдана јер се наведени пример налази у уџбенику математике за први разред, а постепено треба задатак чинити сложенијим на тај начин што ће недостајати више фигура.

Пример 101.



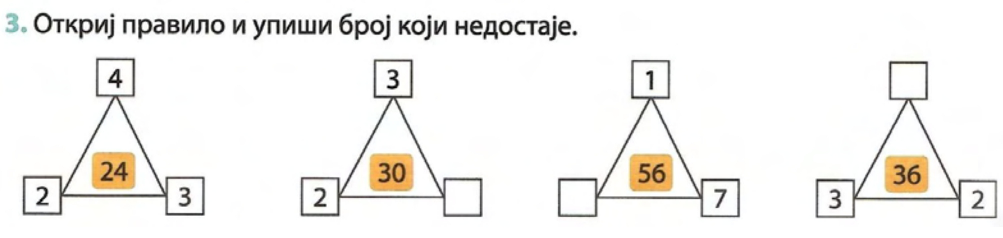
(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 34)

Задаци који погодују подстицању и развијању способности откривања правила и законитости често су дати и у облику математичког троугла, као у примерима који следе (Пример 102 и 103).

Пример 102.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2016б: 59)

Пример 103.



(Маричић, Ђуровић, 2019в: 86)

У почетној настави математике могућности за подстицање и развијање способности откривања правила и законитости, као једне од способности логичког мишљења, су бројне, а на учитељу остаје да те могућности искористи адекватним избором математичких задатака у наставном процесу.

3.6.4. Способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност)

За потребе рада, приликом операционализације појма *логичко мишљење*, способност откривања удаљених, наизглед скривених, а у исто време неопходних података, смо издвојили као посебну способност логичког мишљења. То је, на неки начин, способност логичког анализирања података и откривања скривених елемената, логичко сагледавање датих података и логичко расуђивање и резоновање о подацима који су дати и откривање података који су скривени у формулацији задатка. Ову способност Р. Квашчев, бавећи се стваралачким понашањем личности, објашњава као „*проналажење удаљених решења и одговора који су резултат креативне генерализације*" (1975: 12). Аутор креативну генерализацију одређује преко следећих елемената: „1) повезивање разноликих података и различитих концепција; 2) истраживање заједничких принципа и односа између чињеница различитог значења и стављање чињеница у друге релације; 3) откривање различитих могућих значења садржине датих чињеница у различитим контекстима; 4) множење релација и идеја и проналажење дивергентних модела који омогућавају откривање нових принципа и еластичност у прелажењу на нове принципе... 5) увиђање проблемске ситуације у различитим контекстима, са новог аспекта, у новој светлости, довођење у везу проблема који решавамо са различитим полазним тачкама; 6) покретљивост знања и богаћење и ширење искуства испитаника" (Kvaščev, 1975: 15).

Способност откривања прикривених података у задатку се може описати и као оштроумност или домишљатост. „Домишљатости као начину решавања мозгалица претходи детаљна анализа, проналажење битних информација у задатку. На тај начин, решење мозгалице је резултат прецизне анализе услова, у току које се и траже путеви решења" (Дејић и сар. 2013: 103).

Суштински посматрано, способност уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку слична је способностима *оригиналност*, *флексибилност*, *редефиниција* и *осетљивост за проблеме*. Другим речима, изолована способност откривања елемената који су у задатку скривени и решавање задатка након откривања елемената, подразумева способности стваралачког мишљења: оригиналност, флексибилност, редефиницију и осетљивост за проблеме.

Способност откривања скривених (удаљених) елемената укључује различите способности које помажу да се открије оно што није директно дато у задатку и да задатак буде решен на основу откривених података (елемената) и то на нов, неуобичајен начин. На основу наведених разматрања способности уочавања удаљених елемената у задатку можемо, за потребе рада, издвојити следеће одлике ове способности:

- проналажење нечег новог и скривеног у задатку, новог податка који није јасно и прецизно дат, али се из формулације задатка може извући као нови податак, потребан и неопходан за решавање задатка;
- способност антиципирања нових идеја које су од значаја за решавање задатка, које могу послужити као допуна података задатка;
- способност откривања нових информација које нису дате, извлачењем из контекста задатка;

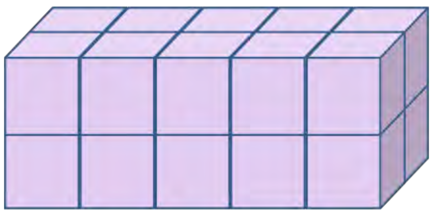
- способност увиђања и откривања необичног у задатку, што често представља препреку решењу, отклањање те нелогичности и „логично закључивање“;
- откривање података који нису јасно дати, али из противуречних података у задатку јасно („логично“) следе као нови подаци довољни за решавање задатка;
- способност откривања нових значења појмова и датих података и њихово коришћење у задатку;
- способност тражења необичних решења или необичних путева доласка до решења;
- отворен дух;
- оригиналност у поступку откривања нових података;
- способност трансформације, која представља промене које доводе до нових података из првобитних;
- способност стављања података у задатку у нове и необичне релације, које нису дате у задатку, али се уз досетљивост могу открити на основу датог;
- способност импровизације;
- способност откривања скривених елемената захваљујући правилној језичкој реформулацији проблема;
- способност откривања нелогичности у задатку и њихово правилно тумачење које доводи до успостављања нових релација између података и решавања задатка;
- способност уочавања података који су сувишни и ометају решавање задатка;
- способност коришћења искуства како би открио скривене елементе;
- способност излажења из стандардних, стереотипних оквира и посматрање података из различитих углова како би открио елементе (податке) који нису директно дати и сл.

Дакле, најкраће речено, приликом решавања математичких задатака *способност откривања елемената који су скривени у поставци задатка* представља откривање „нових података“ уз „оштар ум“.

У наставку рада навешћемо неколико примера којима се код ученика може подстицати способност уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку.

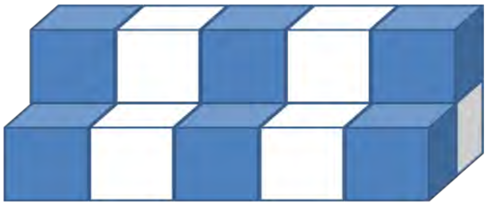
Пример 104 је класичан. У њему се од ученика тражи да преброје коцке. Основни проблем код оваквих задатака представља чињеница да у почетку ученици броје само коцке које виде, док не броје оне које се не виде. Поступним увођењем ученика у суштину оваквих задатака, ученици превазилазе тај недостатак.

Пример 104. *Колико је коцки на слици?*



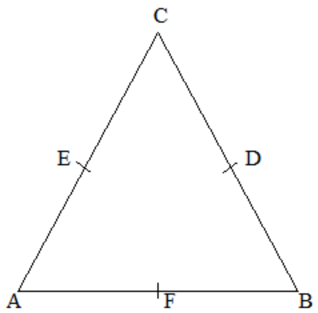
Нешто сложенији захтев је у следећем примеру (Пример 105). Од ученика се захтева да посебно преброје беле и плаве коцке, уз уважавање правила да беле увек стоје на плавим, а плаве на белим. Неким ученицима тај податак служи и као помоћ, јер их подсећа да коцке које се налазе горе стоје на доњим коцкама које су иза и не виде се.

Пример 105. *Колико је плавих, а колико белих коцки на слици? Обрати пажњу, плаве коцке су увек на белим, а беле на плавим!*

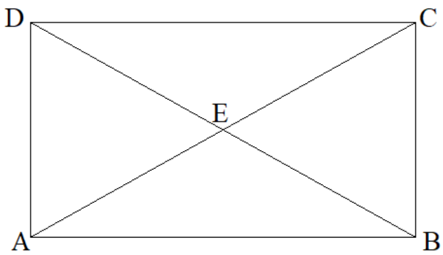


Један од задатака са којим се ученици често срећу у почетној настави математике јесте и задатак са пребројавањем дужи (Пример 106). Оно што ученицима представља проблем јесте везивање за оно што виде и тешкоће у излажењу из стандардних оквира и стереотипних начина размишљања, па тиме и немогућност еластичнијег приступа при решавању задатка. Главни захтев код оваквих задатака је ослобађање ученика од стереотипних начина размишљања, тј. ослобађање од шаблона.

Пример 106. *Колико дужи је дато на слици? Запиши их.*



Пример 107. *Колико троуглова је дато на слици? Запиши их.*



Пример 108. *Ната је из свог букета дала мами половину својих цветова, а баки четвртину својих цветова и њој су остала 4 цвета. Колико цветова је Ната имала у свом букету?*

На први поглед, ученицима се овај задатак (Пример 108) чини компликован, а заправо је веома једноставан када се схвати право, суштинско значење податка који је дат у задатку. Када да половину својих цветова и још четвртину својих цветова (укупног броја), оно што Нати остаје је, заправо, једна четвртина. Када ученик открије да је тај податак дат у задатку и када га искористи на прави начин, уз знање да једно цело има четири четвртине, лако решава наведени задатак.

Још једна врста задатака која захтева *способност откривања скривених (удаљених) елемената* јесу задаци са палидрвцима у којима се од ученика захтева да померањем одређеног броја палидрваца добије тачну једнакост (Пример 109). Задаци са палидрвцима, поред способности уочавања скривених елемената, захтевају и друге способности логичког мишљења и стога имају велики значај за подстицање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Пример 109. *Помери само једно палидрвце тако да једнакости буду тачне.*

VI – V = XII
VII – III = IX
X – II = X

Код задатака који делују на способност уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку суштина је у навођењу ученика на специфичан начин размишљања и на тражење оног што у задатку није дато на уобичајен начин, начин на који су ученици навикли. У наставку ћемо навести неке задатке које срећемо у уџбеницима математике за основну школу и којима се успешно може подстицати и развијати *способност откривања скривених (удаљених) елемената* у почетној настави математике.

Пример 110.

(Маричић, 2018а: 91)

У наведеном примеру ученик мора открити да се не ради о једној, три или седам птица, него да су у задатку поменути редни бројеви и да се, заправо, ради о три птице које су одлетеле. Ученици обично помисле да је одлетело седам птица јер је „седма птица“ податак који последњи чују. Реч је о задатку за први разред и ученицима је дата олакшица у виду илустрације која осликава конкретну ситуацију. Код оваквих задатака ученици често буду понети датим податком (податком који чују) и дођу до погрешног решења. Када им се поступно укаже на суштину података који су дати у задатку, већини ученика задатак постане јасан, па чак и интересантан.

Пример који следи (Пример 111) помињали смо, пре свега, у функцији подстицања и развијања способности уочавања веза и односа између елемената датих у задатку. Поред наведене способности, задатак утиче и на подстицање и развијање *способности откривања прикривених елемената,* односно *оштроумности*.

Пример 111. *Брат и сестра имају укупно 12 година. Колико година су имали укупно пре две године?*

____

Одговор: ______________________________________

(Маричић, 2018а: 97)

Податак који ученик треба да открије је тај да се у задатку ради о брату и сестри (дакле, две особе) и да су пре две године и брат и сестра били за по две године млађи. Дакле, укупно су, пре две године имали четири године мање (2 пута по 2 године). Откривањем скривеног и неопходног податка, у чему му помаже способност уочавања удаљених елемената, ученик лако решава задатак.

У наставку је задатак (Пример 112) из радне свеске за први разред који подстиче вештину разоткривања „збуњујућих“ елемената у задатку и утиче на оштроумност на тај начин што ученик треба да замисли конкретну ситуацију и користи искуство како би открио скривене елементе. Начином рада ученике треба подстицати да се суздрже од пребрзог закључивања и да замишљањем конкретне ситуације открију скривене податке. Основни недостатак овог задатка је илустрација која прати задатак, јер је њом дато решење чиме се спутава развој мисаоних способности ученика.

Пример 112.

(Маричић, 2018б: 41)

Сличан захтев се намеће пред ученике и у задатку који следи (Пример 113). Приликом решавања наведеног примера од ученика се захтева способност да користи искуство и да замисли конкретну ситуацију, тј. четири угла у соби и у сваком углу по једну мацу, као и способност закључивања да ће свака маца видети преостале три.

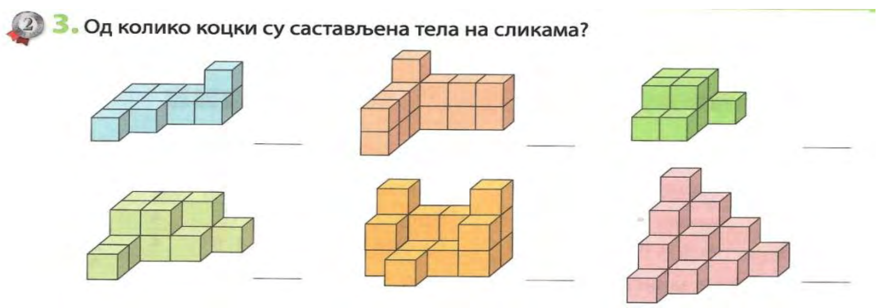
Пример 113.

(Маричић, 2018в: 76)

Код ове врсте задатака често се од ученика тражи брз одговор, тј. брзо расуђивање. Овакви задаци, обично, нису у вези са конкретним математичким садржајима и не захтевају посебно знање математичких садржаја, већ овакви задаци могу послужити да освеже час, као и за буђење пажње и интересовања ученика. Решавање оваквих и сличних задатака захтева од ученика логичко расуђивање, богато искуство, као и способност расуђивања о реалним проблемима.

Задатке са пребројавањем коцки, које смо помињали у претходном делу и чији значај за подстицање *способности откривања скривених елемената* смо истакли, такође, налазимо у уџбеницима математике за основну школу.

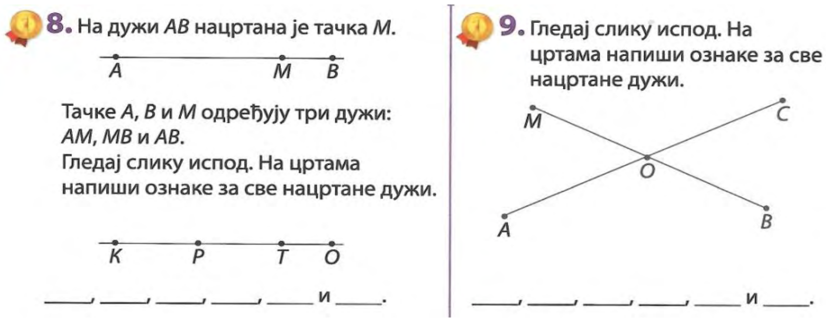
Пример 114.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018в: 24)

У уџбеницима математике за основну школу има и задатака који од ученика захтевају пребројавање дужи (Пример 115). За разлику од пребројавања коцки, код којих се поједине коцке физички не виде, код задатака са пребројавањем дужи, дужи се виде, али нису одмах уочљиве. У уочавању тих дужи се огледа суштина ове способности.

Пример 115.



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018б: 61)

Наведени пример, нумерисан редним бројем осам, садржи и објашњење као олакшицу ученицима, док је задатак нумерисан редним бројем девет нешто сложенији. Решавање наведених задатака захтева откривање *удаљених (скривених) елемената у задатку (оштроумност)* које долази до изражаја у увиђању чињенице да постоје и дужи састављене од других, које нису одмах уочљиве. Ученици, често вођени означеним тачкама, обично превиде тачно решење.

Сличан захтев срећемо и у задатку који следи (Пример 116), а који је нешто другачије формулисан.

Пример 116.

(Маричић, Ђуровић, 2019а: 31)

У уџбеницима математике за основну школу има и задатака који од ученика захтевају пребројавање геометријских фигура (Пример 117).

Пример 117.

(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2016а: 31)

Способност откривања скривених (удаљених) елемената долази до изражаја и у задацима за чије решавање је потребна процена реалности дате ситуације, као и њено увиђање и схватање. Једну такву ситуацију имамо и у примеру 118.

Пример 118. *Термометар на тераси показује температуру од 10 степени. Колико степени показују 3 термометра на тераси?*

____

(Маричић, Ђуровић, 2019а: 65)

Ученици са развијеном способношћу уочавања скривених елемената (оштроумности) ће проценити реалност ситуације, открити податак који није изричито наведен и доћи до закључка да се термометри налазе истовремено на тераси и да сви показују исту температуру, дакле 10 степени. Наведени и слични примери су веома корисни јер код ученика подстичу и способност увиђања и процене реалности дате ситуације као и способност повезивања искуства са датим ситуацијама.

У примеру 119, ученици су, такође, у ситуацији да користе знања и искуства на нов начин, доводећи их у везу и откривајући нове релације. Наведени пример захтева *способности оштроумност и досетљивост* које налазе примену у процени реалности дате ситуације, увиђању релација које нису експлицитно дате и на основу којих се открива нови податак.

Пример 119.

Један отац има три ћерке, а свака од ћерки има по три брата. Колико у тој породици има деце?

____

(Маричић, Ђуровић, 2019в: 14)

Навешћемо још једну врсту задатака коју срећемо у уџбеницима математике, а који подстичу способност откривања елемената који нису директно дати у задатку (оштроумност) (Пример 120).

Пример 120.

6. Деда Рајко је правио ограду у својој башти. На сваких 10 dm ставио је по један стуб на који је касније поставио ограду. Колико је дуга ограда ако је укупно ставио 10 стубова?

Одговор: ______________________________________

____

(Маричић, Ђуровић, 2019б: 29)

У наведеном примеру суштина је у увиђању податка који није експлицитно дат, да се између десет стубова налази девет растојања (између свака два стуба).

Задаци за подстицање способности уочавања удаљених (скривених података који нису директно дати) елемената у задатку, као што примећујемо, не захтевају посебно математичко знање, већ „бистар“, „оштар“ ум и расуђивање са промишљањем које је прожето искуством. Проблем настаје у тежњи да се задатак брзо реши, да се одговори „на прву“ без промишљања, па се грешка „у брзини“ углавном деси, јер ученик није размотрио реалност свих података. Када сазна тачно решење, ученик, код ове врсте задатака, схвата где је погрешио и схвата шта је то што га је навело на погрешан закључак. Још један од негативних фактора у решавању ове врсте задатака јесте то што је искуство ученика често скромно и није довољно за дубља промишљања и за дубље сагледавање проблема. Због тога, промишљање остаје често површно, а закључивање погрешно.

3.7. Однос логичког мишљења са другим врстама математичког мишљења

Посебно је интересантно питање односа различитих врста мишљења. Нас посебно занима однос логичког мишљења са осталим врстама математичког мишљења. Са друге стране, имамо и схватање које истиче да „математичко мишљење је логичко мишљење“ (Prvanović, 1970: 14). Можемо се делом сложити са наведеним, али само делом, јер логичко мишљење је само део математичког мишљења схваћеног у најопштијем смислу. За потребе рада, прихватили смо дефиницију математичког мишљења као комплексног феномена који представља низ интелектуалних активности у којима се међусобно преплићу различите врсте мишљења, без чијег заједничког деловања не бисмо могли говорити о математичком мишљењу.

Раније смо у раду говорили о различитим врстама мишљења које у свом јединству сачињавају математичко мишљење. То су: логичко, стваралачко, критичко и апстрактно. У почетној настави математике веома је тешко, скоро и немогуће, говорити о само једној врсти математичког мишљења, јер све наведене врсте имају своје место, улогу и значај у решавању математичких задатака и у процесу решавања задатака делују заједно. Зато често истичемо да наведене врсте мишљења и остварују свој пуни смисао у јединству, као математичко мишљење. Математичко мишљење сачињавају логичко, критичко, стваралачко и апстрактно мишљење, при чему морамо нагласити да су наведене врсте математичог мишљења међу собом чврсто повезане и тешко је повући јасну границу између њих. „Способности логичког мишљења не могу доћи до изражаја ако не постоје развијене стваралачке способности које треба да допринесу продукцији идеја, али и способности критичког мишљења, јер те идеје треба критички преиспитати. Исто тако, немогуће је говорити о критичком мишљењу, ако не постоји стваралачко и логичко мишљење, али ни о стваралачком, ако га не прате логичко и критичко мишљење“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 439). Стога, сваки покушај одвојеног посматрања и тумачења појединих врста математичког мишљења треба условно схватити јер се у пракси никада једна врста математичког мишљења не јавља изоловано од осталих врста. Са друге стране, апстрактно мишљење је у математици неопходно, јер су математички појмови апстрактни појмови, те на тај начин оно прожима остале врсте математичког мишљења.

Однос логичког мишљења са осталим врстама математичког мишљења најбоље описује дијаграм 2.

Дијаграм 2. *Повезаност врста математичког мишљења* (Шпијуновић, Маричић, 2016: 439)

Због уске повезаности наведених врста математичког мишљења, у раду ћемо детаљније сагледати везу логичког мишљења са критичким, стваралачким и апстрактним мишљењем, посебно се осврћући на њихове заједничке елементе и додирне тачке.

3.7.1. Однос логичког и критичког мишљења ученика у почетној настави математике

Посматрајући, са једне стране, логичко мишљење кроз компоненте које га сачињавају: коришћење и разумевање логичких операција, мисаоних поступака и облика закључивања и, са друге стране, критичко мишљење преко способности: „формулисање проблема, реформулисање проблема, евалуација и осетљивост за проблеме“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 446), примећујемо да се наведене способности обе врсте мишљења међусобно преплићу и поклапају. Слободно можемо рећи да нема логичког мишљења без критичког сагледавања проблема и обрнуто, да нема критичког мишљења без логичког закључивања. „Овај проблем је научно исправно решила већина страних аутора који су испитивали путеве развоја критичког мишљења испитаника. Њихове дефиниције критичког мишљења садрже бројне процесе мишљења, тј. они говоре о неопходности да сви процеси мишљења буду прожети ставом критичности... Не можемо откривати нове истине у процесу закључивања, а да истовремено критички не вреднујемо дате податке. Одсуство критичке верификације података онемогућава правилно апстраховање што узрокује и неправилну генерализацију“ (Квашчев, 1969: 188). Критичко мишљење треба да прати све остале врсте математичког мишљења. Свака способност критичког мишљења заснива се на „већем броју процеса мишљења. На пример, способност процењивања значајности аргумената у датим тврдњама садржи следеће процесе мишљења: анализу, синтезу, компарацију, апстракцију и уопштавање“ (Квшчев, 1969: 188). Наведено сведочи о уској повезаности критичког и стваралачког мишљења, али, истовремено, укључује и логичко мишљење. У процесу закључивања, које је компонента логичког мишљења, критичко мишљење има значајну улогу у процесу вредновања закључака. Такође, у прилог уској повезаности ове две врсте математичког мишљења говори и чињеница да способност процењивања значајности аргумената, која је компонента критичког мишљења, подразумева да су извршене мисаоне операције (анализа, синтеза, компарација, апстракција и уопштавање), које су компоненте логичког мишљења.

За потребе рада, логичко мишљење смо дефинисали преко способности које га сачињавају, а међу којима су, поред логичких операција и мисаоних поступака, и различите способности закључивања. Посебно смо издвојили следеће способности ученика у процесу закључивања: способност уочавања узрочно-последичних веза и закључивање, способност откривања законитости и правила и закључивање и способност откривања прикривених елемената у задатку. Наведене способности су у уској вези са критичким мишљењем, јер у процесу закључивања, различите идеје треба критички преиспитивати. Са друге стране, способност критичког мишљења је уочавање и формулисање математичких проблема, а „да би ученик формулисао проблем на основу проблемске ситуације мора да уочи везе и релације између података датих у садржају задатка, између датог и непознатог, могућег и немогућег и да јасним формулацијама искаже шта све може да израчуна на основу датих података“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 446). Према томе, способност ученика да увиђа везе и односе између елемената у задатку, коју смо за потребе рада издвојили као способност логичког мишљења, доминантна је и код способности *формулисања проблема*, што је способност критичког мишљења.

Осетљивост за проблеме, као компонента критичког мишљења, „у почетној настави математике долази до изражаја у задацима који садрже неку противуречност, необичност, *трик* или загонетку, који су садржани у услову задатка и које ученик мора да открије да би решио задатак“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 450). За наведено, потребан је висок степен логике, како би ученик открио оно што је скривено у подацима који су дати. Са друге стране, као компоненту логичког мишљења издвојили смо способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку. То, опет, указује на уску повезаност логичког и критичког мишљења ученика у процесу решавања математичких задатака, односно у почетној настави математике.

О повезаности логичког и критичког мишљења сведочи и *способност евалуације*, коју су К. Шпијуновић и С. Маричић (2016) дефинисали као способност критичког мишљења. Психолог Гилфорд (Guilford) открио је фактор евалуације. „Садржину евалуације чине: проверавање хипотеза у пројекту, проналажење најбољих критерија за избор одговарајућих решења задатка која ће бити заснована и документована, фактор логичке евалуације се дефинише као способност суђења и закључивања, где се узима критеријум логичка конзистентност. Овај фактор садржи и способност дедуковања, тј. способност извођења логичких закључака који су конзистентни у односу на премисе. У фактор евалуације спада и способност употребе старог искуства у новим ситуацијама“ (према: Квашчев, 1969: 5). Евалуација информација, која се најчешће дефинише као способност критичког мишљења, се „заснива на пажљивом уочавању односа који постоје у садржини задатка, одвајању датог од задатог, битног од небитног, откривању сувишних података у задатку, отклањању двосмислености и нејасноћа у формулацији и релацијама међу подацима, препознавању смисла информација, постављању разјашњавајућих питања који помажу схватању суштине задатка“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 449). Све наведено говори о повезаности евалуације информација (способност критичког мишљења) и способности уочавања узрочно-последичних веза и закључивање (способност логичког мишљења), као и о повезаности способности евалуације и способности уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку (способност логичког мишљења). Посматрано са друге стране, критичко мишљење је неопходно за све врсте математичког мишљења, па тиме и за логичко мишљење. „У току решавања проблема морамо критички да анализирамо податке и оно што је дато и задато, да критички процењујемо тачност апстракције и уопштавања, да критички вреднујемо наше резоновање о датим подацима итд. Ове чињенице највише долазе до изражаја када дати проблеми активирају различите процесе мишљења“ (Квашчев, 1969: 21).

На крају, о повезаности логичког и критичког мишљења сведочи и способност *реформулисање проблема* (способност критичког мишљења) која представља „извођење закључака на основу уочавања веза и релација у садржају задатка“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 448). Као што се из наведених речи види, способност реформулисања проблема повлачи и способност уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената у задатку (способност логичког мишљења).

Мисаони поступци које смо дефинисали као компоненту логичког мишљења, а који су неопходни за решавање свих математичких задатака и за целокупно математичко образовање, потврђују повезаност логичког и критичког мишљења. И у *логичким операцијама* које смо дефинисали као компоненту логичког мишљења, критичко мишљење има своје место у критичком процењивању исказа.

У прилог повезаности логичког и критичког мишљења најбоље говоре задаци које срећемо у уџбеницима математике за основну школу (Примери 121 и 122).

Пример 121.

2. У једној школи други разред похађају 42 дечака и 39 девојчица. Заокружи слово испред питања на које можеш да одговориш на основу података који су ти дати, а затим одговори на питање.
а) Колико укупно има ученика у школи?
б) За колико у школи има више девојчица него дечака?
в) За колико у школи има више дечака него девојчица?
г) Колико ученика у школи похађа други разред?

Одговор: ____________________

(Маричић, Ђуровић, 2019б: 23)

Наведени пример говори о повезаности логичког и критичког мишљења.

Пример 122.

3. У стаду су биле 52 беле и 39 црних оваца. Отишле су 24 беле овце. Шта можеш да израчунаш?

Одговор: ____________________

(Маричић, Ђуровић, 2019б: 23)

Наведени примери говоре у прилог повезаности способности формулисања проблема као компоненти критичког мишљења са способношћу успостављања веза и односа између елемената у задатку као једном од способности логичког мишљења.

3.7.2. Однос логичког и стваралачког мишљења ученика у почетној настави математике

Полазећи од дефиниције стваралачког мишљења као сложене интелектуалне активности чији садржај чине следеће способности: „оригиналност, флексибилност, флуентност, редефиниција, осетљивост за проблеме и елаборација“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 441), уочавамо повезаност ове врсте мишљења са логичким мишљењем. *Способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку и закључивање* смо издвојили као једну од способности логичког мишљења. Наведена способност је у уској вези са *оригиналношћу* која је једна од способности стваралачког мишљења. Такође, висок степен логике неопходан је и за редефиницију. Све то сведочи о повезаности ове две врсте мишљења. Са друге стране, не можемо говорити о логичком мишљењу ако не постоји стваралачко, тј. ако не постоје „развијене стваралачке способности које треба да допринесу продукцији идеја“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 439).

О повезаности логичког и стваралачког мишљења говори и чињеница да *способност откривања елемената који нису одмах уочљиви у задатку и закључивање* *на основу откривања елемената (нових података*) коју још називамо и оштроумност, у себе укључује и бројне способности стваралачког мишљења: *оригиналност, флексибилност, редефиницију* и *осетљивост за проблеме*. Код наведене способности логичког мишљења долази се до нових података захваљујући оштрини ума и неким способностима стваралачког мишљења. Без обзира да ли је ученик током решавања математичког задатка дошао до новог податка захваљујући оригиналности, флексибилности, редефиницији или осетљивости за проблеме, он је открио нови податак који му је неопходан за даље решавање задатка и закључивање на основу новог податка. Комбинацијом наведених способности стваралачког мишљења, открива се нов, неопходан податак.

Такође, *способност уочавања узрочно-последичних веза и односа између елемената датих у задатку и закључивање на основу откривених веза*, коју смо издвојили за потребе рада, као способност логичког мишљења у себе укључује и елаборацију, која представља способност стваралачког мишљења.

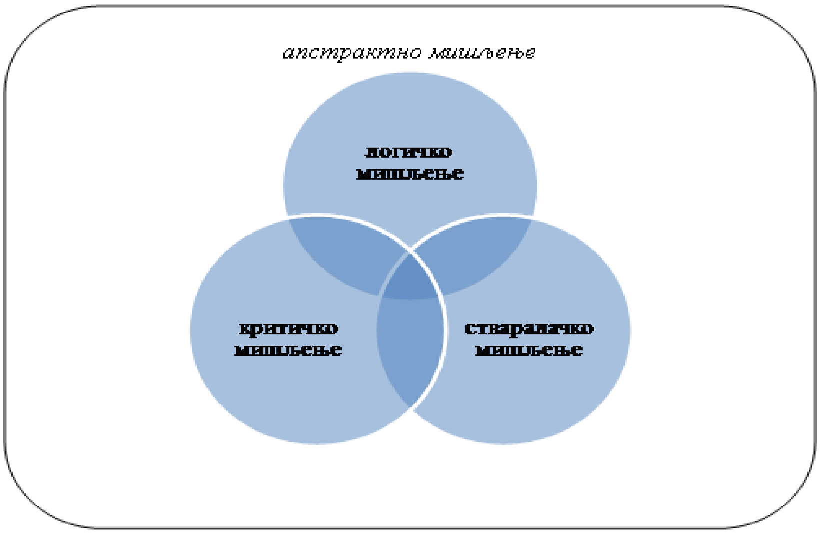
Ако се има на уму да у решавању свих математичких задатака учествују *мисаони поступци* који су компоненте логичког мишљења, јасно је да без логичког мишљења нема ни математичког мишљења, ни решавања математичких задатака, а тиме ни математичког образовања. *Мисаони поступци* које смо дефинисали као компоненту логичког мишљења, говоре у прилог повезаности логичког и стваралачког мишљења.

3.7.3. Однос логичког и апстрактног мишљења ученика у почетној настави математике

Значај апстрактног мишљења, које се често помиње када говоримо о настави математике, произилази из чињеница да су математички појмови апстрактни, да настава математике оперише апстрактним појмовима и да, сама по себи, укључује апстрактно мишљење.

Различити психолози под интелигенцијом „пре свега подразумевају способност мишљења, тј. интелигенцију дефинишу као способност апстрактног мишљења. Интелигентни људи су способни да ефикасно користе појмове и симболе у новим ситуацијама, посебно у решавању проблема који могу бити решени употребом вербалних и нумеричких симбола“ (Kvaščev, 1974: 260). Овакво одређење интелигенције говори, не само колико је она значајна за апстрактно мишљење, већ и за остале врсте математичког мишљења, чији предуслов је операсање апстрактним појмовима и симболима. У наведеној дефиницији се интелигенција практично изједначава са апстрактним мишљењем. Без тако схваћеног апстрактног мишљења нема ни других врста математичког мишљења.

На основу свега изнетог о апстрактном мишљењу, можемо рећи да је апстрактно мишљење предуслов свих врста математичког мишљења и да без њега нема логичког, стваралачког и критичког мишљења. Условно, повезаност апстрактног мишљења са осталим врстама математичког мишљења можемо представити следећим дијаграмом.



Дијаграм 3. *Повезаност апстрактног мишљења са осталим врстама математичког мишљења*

4. ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И РАЗВИЈАЊЕ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА

Знање које се стиче без великог труда
не може бити велико.
З. Курник

4.1. Типови задатака којима се развија логичко мишљење у почетној настави математике

Задатак има значајно место у почетној настави математике. У почетној настави математике се преко различитих типова задатака остварују сви предвиђени задаци наставе. Проблем „математичких задатака стар је колико и сама настава математике, јер се учење у настави математике, највећим делом, своди на решавање задатака“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 379). Задатак је „основни садржај у настави математике... Преко задатака се усвајају, утврђују, примењују, систематизују математичка знања“ (Маричић, 2006: 50). Самим тим, од избора различитих типова задатака у настави математике зависи квалитет наставе математике и који прописани исходи ће бити остварени. Улога математичких задатака је „у томе што, с једне стране, коначан циљ наставе математике јесте да ученици овладају методама решавања система математичких задатака, а, с друге стране, она је одређена и тиме што је циљ наставе математике могуће постићи првенствено решавањем система математичких задатака. На тај начин, решавање задатака у настави математике јавља се и као циљ и као средство наставе“ (Дејић, Егерић, 2003: 267). На важност решавања проблемских задатака у почетној настави математике указује чињеница да „решавање проблема није циљ за себе, него средство мисаоног активирања у функцији стицања научних знања“ (Malinović, Malinović Jovanović, 2002: 312). Ми се надовезујемо на наведено схватање решавања проблема као средства мисаоног ангажовања, истичући да решавање различитих математичких задатака, не само проблема, представља средство у подстицању различитих умних активности. „Решавањем математичких задатака преко разних математичких активности математизују се реалне ситуације, примењују усвојена математичка знања и вештине и долази до решења - реализације математичке мисли“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 39). Као задатак наставе, истиче се да „ученици стичу знања логичким расуђивањем и да у процесу стицања знања развијају способност логичког размишљања... За остваривање тог задатка од великог значаја је решавање проблемских задатака и то оних који се могу графички илустровати“ (Малиновић и сар. 1999: 5).

На важност решавања математичких задатака у почетној настави математике посебно указује чињеница да „кроз решавања математичких задатака математичка знања се брже и лакше усвајају, развијају се математичко мишљење и математичке способности, проверава се ниво овладаности математичким знањима и вештинама, развија се личност, усвојена математичка знања се примењују, развија се интерес за математику итд.“ (Дејић, Егерић, 2003: 267). Улога задатака у математичком образовању је огромна и „решавање проблема и разних задатака представља врхунац математичког образовања и математичке културе ученика“ (Pinter i sar. 1996: 69).

У савременој настави математике тежиште се поставља на „развијању умења самосталног и стваралачког проучавања математике од стране ученика, те стварању предуслова за успешну примену стечених математичких знања и умења“ (Kurnik, 2008:

325). Наведени циљ којем тежи савремена настава математике остварује се преко задатака. „Задаци постају важно средство при обликовању код ученика састава основних математичких знања, умења и навика и доприносе развоју њихових математичких способности и стваралачког мишљења“ (Kurnik, 2008: 325).

„Суштина мишљења се и састоји у схватању и увиђању односа, веза и решавању проблема. Развој мишљења се према томе одвија помоћу задатака који ученици треба да решавају... У задацима за ученике требало би да буду заступљени сви типови задатака према логичкој природи: индуктивни, дедуктивни, индуктивно-дедуктивни, а према природи способности које ангажују: опште и специјалне способности, дивергентне и ковергентне, вербалне и невербалне“ (Ђорђевић, 1999: 34).

Значај и улога решавања задатака у математичком образовању су велики и огледају се у:

- „овладавању математичким методама, техникама и поступцима,
- умешностима у математичко-кибернетичком моделовању и
- васпитним ефектима наставе математике“ (Pinter i sar. 1996: 70).

Кроз поменуте улоге математички задаци дају значајан допринос развијању:

- „мисаоних операција и интелектуалних функција,
- способности апстрактног мишљења и операција са апстракцијама,
- креативности (оригиналности, комбинаторној фантазији и сл.),
- рационалног расуђивања, објективног аргументовања и образлагања,
- систематског, планског и самосталног рада,
- уредности и естетског укуса,
- интересовања и радозналости,
- позитивних особина личности: сигурност, одмереност, прецизност, истрајност, упорност итд.“ (Pinter i sar. 1996: 70).

Математички задаци „одликују се наглашеном специфичношћу. За њихово решавање неопходно је улагање мисаоних напора, односно неопходно је код ученика побуђивање мисаоних операција које воде до решења... Математичке способности идентификују се са способностима решавања задатака“ (Пикула, Милинковић, 2015: 140). Сви задаци наставе се остварују преко задатака. „Образовни, васпитни, развојни и практични циљ наставе математике остварује се кроз решавање задатака“ (Пикула, Милинковић, 2015: 141). Решавање математичких задатака, дакле, води остваривању свих постављених задатака наставе.

Ако као задатак наставе математике поставимо развијање логичког мишљења ученика, то нас наводи на закључак да се и тај задатак мора остварити одређеним математичким задацима. У раду смо извршили операционализацију логичког мишљења и на тај начин га одредили преко способности, а за сваку од наведених способности дат је и пример задатака којим би се могло утицати на њихово подстицање и развијање у почетној настави математике.

Током самог решавања математичког задатка важну улогу играју и фазе у његовом решавању. У настави математике се најчешће прихвата Пољина (George Polya, 1966) шема решавања задатака која обухвата четири фазе: схватање или разумевање, стварање плана, реализацију плана и на крају, проверу тачности, дискусију и интерпретацију решења. Током ових фаза дешава се низ мисаоних поступака и у свим наведеним активностима ученик је мисаоно активан што доприноси његовом свеобухватном интелектуалном развоју. „Пролажење кроз наведене фазе подстицајно утиче на мисаоне активности и сазнајна интересовања ученика омогућавајући успешно решавање постављеног задатка или проблема“ (Petrović, Mrđa, 2001: 3).

У процесу решавања математичког задатка долазе до изражаја и различите математичке способности. Математичке способности могу се идентификовати у процесу решавања задатака кроз:

- „способности превођења реалних животних ситуација у математички модел или формулацију математичког задатка (апстракција),
- способност разлучивања битно – споредно односно форма – садржај,
- способност коришћења математичког језика (бројеви, симболи),
- способност логичког мишљења,
- способност обртања мисаоних процеса,
- способност лаганог превођења мисли из једног усмерења у друго (ослобађање од шаблона),
- способност памћења математичких чињеница,
- способност просторног гледања“ (Крутецки, према: Пикула, Милинковић, 2015: 142).

У наведеним схватањима математичких задатака у први план се истиче њихов утицај на мисаону активност ученика, мисаоне операције, математичке способности и математичко мишљење, што сведочи о њиховом значају за математичко образовање.

„Посредством задатака остварују се циљеви и задаци почетне наставе математике. Они служе као основни садржај на коме ученици усвајају, утврђују, систематизују, проверавају математичка знања. Осим тога, доприносе развијању интелектуалних способности, креативности, математичког мишљења и закључивања код ученика, системског и планског начина рада, интересовања за математику и њене проблеме, позитивних својстава личности, повезивању наставе математике са реалним животом и тако даље“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 379). Оно на шта посебно желимо указати јесте улога и утицај математичких задатака на остваривање задатака наставе математике. Ако, са једне стране, поставимо задатак *подстицање и развијање логичког мишљења ученика* као значајан и веома важан задатак почетне наставе математике и пођемо од чињенице да се задаци почетне наставе математике успешно остварују одговарајућим математичким задацима, тј. њиховим решавањем, то нас наводи на претпоставку да избором одговарајућих математичких задатака можемо позитивно деловати на подстицање, унапређивање и развијање логичког мишљења, а можемо увидети и колики је њихов значај у развијању те врсте мишљења. У почетној настави математике, једини проблем, када се говори о подстицању и развијању логичког мишљења ученика јесте тај што на учитељу остаје да сам бира задатке за које сматра да ће позитивно утицати на развијање логичког мишљења његових ученика.

Имајући на уму значај математичких задатака, веома је важан њихов одабир у настави и усмереност на остваривање одређеног задатка наставе математике. Учитељ мора поћи од питања: Колико ученици оперишу апстрактним математичким појмовима? Може ли се логичко мишљење развити код свих ученика? Како препознати ученике код којих је већ у неком степену развијено логичко мишљење? Да ли код ученика постоје способности које представљају услов развијања логичког мишљења? На који то начин и којим садржајима и задацима се може доћи до жељеног циља, тј. развијања логичког мишљења? На који начин треба деловати у наставном процесу да би се успешно развило логичко мишљење ученика? Који су то задаци погодни за подстицање и развијање различитих способности логичког мишљења? На ова и слична питања би требало наћи одговоре, како би се у почетној настави математике могло успешно деловати на унапређивање логичког мишљења ученика, тј. одговорити на комплексно питање – *Како најадекватније подстицати и развијати логичко мишљење ученика у почетној настави математике?*

У почетној настави математике постоји низ фактора који би могли бити од помоћи учитељу у деловању на развијање логичког мишљења, али исто тако и низ фактора који ометају и ограничавају квалитет логичког мишљења ученика. Стога је важно њихово идентификовање и добро познавање, како би све наведено учитељ узео у обзир приликом планирања наставе којом жели подстицати логичко мишљење својих ученика.

Када се говори о мишљењу ученика у почетној настави математике, често се помињу термини даровитост ученика, нестандардни задаци, математичке способности и слично. Сви ти појмови су у уској вези са математичким мишљењем ученика, а самим тим и са логичким мишљењем у почетној настави математике. Осврнимо се, најпре, на даровите ученике за учење математике. Неке од способности ученика даровитих за учење математике су: „моћ апстраховања, оперисање апстракцијама; просторни фактор (геометријска интуиција); логичко расуђивање; гипкост, проналазачко мишљење; математичка интуиција; нумерички фактор, комбинаторика, дедуктивно и индуктивно мишљење; коришћење математичке симболике; умење примењивања математичке шематизације; склоност и интерес за математику; усвајање математичких појмова; проналажење различитих и оригиналних решења проблема; постављање нових проблема (еластичност и креативност мишљења); употреба алгоритама; осећај за узрок и последицу; способност образовања и праћења каузалног ланца чињеница; способност расуђивања о везама итд." (Дејић и сар. 2013: 96). Пробројане способности даровитих су у уској повезаности са способностима логичког мишљења. Овако посматране способности даровитих ученика за учење математике се могу идентификовати и даље развијати у наставном процесу, а њихово развијање биће од користи и у развијању логичког мишљења ученика. На исти начин, логичко мишљење ученика се даљим подстицањем може на адекватан начин развијати организованим математичким образовањем. Само је потребно да овако изоловане и јасно одређене способности учитељ, пре свега, идентификује и одговарајућим задацима даље развија у почетној настави математике.

Решавање различитих врста задатака (логички задаци, проблемски задаци, нестандардни задаци) може позитивно утицати на развијање различитих математичких способности које су у исто време и способности логичког мишљења. Решавање нестандардних задатака има велики и посебан значај „за развој суштинских елемената математичког мишљења ученика, математичке интуиције која се испољава кроз жељу ученика да сам схвати проблем, кроз тежњу да самостално пронађе начине и средства за решавање задатака; оштроумности, логичности, досетљивости, флексибилности и критичности ума. Уз све набројано не треба заборавити и снажну мотивациону страну нестандардних задатака" (Дејић и сар. 2013: 101). Огроман значај решавања нестандардних задатака је у томе што је сам процес решавања оваквих задатака сличан структури стваралачког процеса. Ученик се у решавању оваквих задатака понаша као истраживач, мора да увиди проблем, да уложи одговарајући мисаони напор, мисаоне активности, да призове сва своја математичка знања и искуства у помоћ, да се ослободи шаблонизма и стереотипа при решавању проблема, да користи и специјално математичко знање, изводи закључке, тражи пут за решавање, проверава претпоставке и решења, анализира различите могућности и решења и сл. У том процесу ученик је стално у ситуацији да користи различите математичке способности, а самим тим и различите способности логичког мишљења. Све наведено говори у прилог нашој претпоставци да се адекватним задацима у почетној настави математике може успешно деловати на подстицање и развијање различитих способности логичког мишљења ученика.

Деловање на математичко мишљење ученика треба да буде засновано на избору одговарајућих садржаја и задатака, као и стварању услова који ће томе доприносити, покретањем низа мисаоних активности. Тако и логичко мишљење, као једну од компоненти математичког мишљења, треба подстицати и развијати у почетној настави математике адекватним избором математичких задатака. Овде ћемо навести неке типове задатака који могу утицати на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

1) *Текстуални задаци* - Смисао и улога решавања разноврсних текстуалних задатака су огромни и врше позитиван утицај на квалитет: мисаоних операција, креативности, логичког расуђивања и доношења закључака, самосталности, тачности, прецизности, уредности, способности апстрактног мишљења, радозналости и сл. Њихов значај огледа се у способности ученика да језички дате податке у тексту задатка изрази математичким језиком и симболима.

2) *Загонетке* су веома погодне за подстицање и развијање логичког мишљења ученика, јер је при њиховом решавању ученик мисаоно активан и у прилици да успоставља узрочно-последичне везе између података који су дати у задатку, као и да те податке повезује са сопственим искуством. Логичко расуђивање је потребно у процесу решавања математичких проблема, као и при решавању загонетки.

3) *Логичке загонетке* представљају сложене захтеве за ученика и покрећу низ способности логичког мишљења. Решавајући логичке загонетке, ученик мора логички да расуђује, да сопствено искуство доводи у везу са оним што се од њега тражи у задатку и да то знање и искуство примени у конкретној ситуацији. За решавање логичких загонетки ученик мора бити „отвореног ума“, проналазити нове начине доласка до решења. При решавању логичких загонетки ученик мора напуштати стереотипне начине размишљања и „шаблонизам“ у раду и бити отворен за нове идеје.

4) *Мозгалице* - Решавање мозгалица покреће процес логичког мишљења, односно активира низ способности логичког мишљења, како би решење мозгалице било откривено. При решавању мозгалица ученик је у прилици да врши анализу података и успоставља везе између елемената, као и да изводи закључивање на основу уочених веза међу елементима датим у задатку. Код решавања мозгалица ученици морају напуштати стереотипни начин размишљања и тражити нове, скривене податке у задатку. Такође, често се код мозгалица од ученика захтева и богато искуство које је неопходно за откривање скривених елемената у задатку.

Загонетке, логичке загонетке и мозгалице, у суштини, представљају исти тип задатака, тј. све оне задатке који захтевају успостављање узрочно-последичних веза између елемената датих у задатку уз обавезно поштовање услова који су, такође, дати у задатку. Често њихово решавање захтева и коришћење података који нису дати, али на основу искуства, ученик мора такве податке „призвати“ и користити у решавању. Сви наведени типови задатака захтевају напуштање стереотипног начина размишљања.

5) *Проблеми и проблемски задаци* - Решавање математичких проблема има значајну улогу у наставном процесу јер решавање проблема карактерише мисаона активност ученика. Решавајући проблеме ученик пролази пут идентичан оном који

пролази истраживач у процесу откривања. Проблем се дефинише као задатак са доста посебности и има следеће одлике:

1. „нешто непознато, неку празнину коју треба открити и попунити ...;
2. различит број могућности за решавање (једна или више);
3. велику комплексност (... велики број сложених логичких операција);
4. ... за решавање је потребан стваралачки приступ и искуство;
5. решавањем проблема продубљује се знање, усвајају нове структуре сазнавања и развијају менталне способности“ (Вилотијевић, 1999: 241).

Проблем има велики значај за подстицање и испољавање, а тиме и развијање, логичких и мисаоних операција. Решавање проблема има значај за развој мишљења ученика у почетној настави математике. Ако ученик ради нешто на основу раније усвојених и примењиваних образаца, рутински примењује познате и више пута примењиване операције, то представља задатак. Са друге стране, када ученик „не може ићи утабаним стазама“, када између података који су садржани у тексту задатка и захтева постоји несклад, ученик се налази пред проблемом (Вилотијевић, 1999: 241). О важности ове врсте задатака јасно сведочи чињеница да „у почетној настави математике посебно су значајни *проблемски задаци* који су најсложенији међу текстуалним задацима и чије решавање представља врхунац математичког образовања и математичке културе ученика“ (Пикула, Милинковић, 2015: 147). Ови задаци су посебно значајни јер за њихово решавање ученици морају активирати све мисаоне напоре, мобилисати све мисаоне операције, те све математичке способности.

За развијање математичког мишљења ученика, конкретније логичког мишљења ученика, важну улогу имају тзв. проблемски задаци. „Проблем је тај који мобилише интелектуалне способности ученикове. Он активише сва одговарајућа претходно стечена знања, асимилаторске и друге шеме које упућују и концентришу мисаоне активности за време истраживања, испитивања, решавања. Самим тим проблем даље развија опште и математичке способности ученикове“ (Prvanović, 1970: 105). Из наведеног се назире улога учитеља у постављању проблема пред ученике и његова улога у формулисању таквих проблема који ће активирати одговарајуће математичке способности које жели развити код својих ученика. Посебан значај за развој математичког мишљења имају проблемске ситуације. „Сваки сложенији математички задатак може у настави математике за одређене ученике бити у функцији проблемског задатка уколико ће код тих ученика бити у функцији иницирања различитих мисаоних операција, улагање адекватног мисаоног напора, и тада је све то оријентисано ка доласку до траженог решења постављеног задатка“ (Антонијевић, 2014: 223).

У свом раду Р. Квашчев (1975) говори о креативној генерализацији и њеним елементима који су потребни за решавање проблема. Неки елементи креативне генерализације подразумевају и логичко мишљење ученика или бар неке његове способности. Аутор је утврдио да вежбање личности у креативном уопштавању удаљених и различитих података и концепција утиче на развијање менталне структуре оријентационог карактера, која испитанике трајније усмерава на тражење нових, необичних, ретких, удаљених, непоновљивих и применљивих одговора и идеја. Аутор, такође, наглашава да се не ради само о менталној структури оријентационог карактера, већ и о „развијању способности оригиналности у једном генерализованијем виду, јер се испитаници оспособљавају да истражују заједничке принципе и односе између чињеница различитог значења, да стављају чињенице у друге релације, да откривају различита могућа значења садржине датих чињеница у различитим контекстима, да откривају генерализоване релације на којима се заснива дати систем података итд.“

(Kvaščev, 1975: 191). Наведене способности које долазе до изражаја у решавању проблема представљају способности логичког мишљења, што нас наводи на закључак да се адекватним задацима оно може подстицати у настави.

6) *Логички проблеми* - Основна карактеристика логичких проблема, којима се успешно може утицати на развијање логичког мишљења, је њихова отвореност и проблематичност. У литератури се говори о логичким проблемима и наводе се основне карактеристике, тзв. логичких проблема: „(1) По правилу они нису везани за одређене математичке садржаје, не захтевају познавање одређених математичких чињеница, правила, формула, не трпе никакав шаблон, не може им се прилазити стандардно. Захтевају у правом смислу логичко испитивање датих ситуација и зато се, под условом да су *узрасно* градуирани, могу решавати на свим школским нивоима. (2) Њихово решавање се не своди на постављање низа *логичких* питања на која се редом одговара... (3) Не постоји сигуран метод контроле и зато се не може увек рећи да ли је проблем у потпуности решен“ (Prvanović, 1970: 732).

7) *Задаци са палидрвцима* - Код ових задатака се од ученика захтева да задатак реше на више различитих и нових начина, односно, од ученика се захтева флексибилност и флуентност мишљења. Иако су наведене способности, заправо способности стваралачког мишљења, оне су у уској вези са способношћу откривања скривених (удаљених) елемената у задатку и са способношћу откривања узрочно-последичних веза и односа који владају између елемената датих у задатку, које представљају способности логичког мишљења.

8) *Задаци формирања појмова* - У овим задацима се од ученика тражи да групишу фигуре на различите начине. То је тзв. *Винакеов тест формирања појмова* (Kvaščev, 1975). При њиховом решавању ученик мора применити низ способности логичког мишљења: анализирање, успостављање веза између елемената, класификацију, откривање и успостављање критеријума класификације и сл.

9) *Задаци досетљивости* - Код ових задатака од ученика се захтева да проблем реше досетљивошћу, тј. на нов и неуобичајен начин. За решавање ове врсте задатака ученик мора поседовати способност досетљивости која ће му послужити да открије скривене податке у задатку, неку нелогичност или нешто необично што га је спутавало у решавању задатка.

10) *Задаци едукације или настављања низа* - При решавању ових задатака од ученика се захтева уочавање одређеног правила. Како би се ученици ослобађали ригидног понашања, у почетку им се могу образложити принципи решавања оваквих задатака, а касније они сами траже принципе и откривају правило по којем је започет низ и то правило примењују на настављање низа.

11) *Задаци мењања принципа састављања задатка* - Код ових задатака од ученика се захтева да податке у задатку користе на другачији, нов и несвакидашњи начин. Ова врста задатака је погодна за превазилажење ригидног понашања ученика у току решавања математичких задатака. Овим задацима ученици се постепено ослобађају ригидних особина, а тиме се подстиче и развија математичко мишљење, а самим тим и све његове врсте (логичко, критичко, стваралачко и апстрактно).

4.1.1. Примери задатака којима се може подстицати и развијати логичко мишљење ученика у почетној настави математике

Када говоримо о логичком мишљењу ученика у почетној настави математике, главно питање је да ли се логичко мишљење може подстицати и развијати. У *Правилницима о програму наставе и учења* (10/2017, 16/2018, 5/2019, 11/2019) подстицање логичког мишљења се не истиче као посебан задатак наставе, али је ова врста мишљења неопходна за остваривање циља предмета *математика*, као и остваривање наведених исхода. Да би ученици на прави начин у наставном процесу формирали математичке појмове, да би могли да оперишу апстрактним математичким појмовима и да би могли да изводе закључке у настави математике, неопходно је логичко мишљење. Схватање значаја који логичко мишљење има за математичко образовање говори о потреби и обавези развијања логичког мишљења ученика, али не и о начинима како га подстицати и развијати у пракси, тј. у самом наставном процесу. „Развијање логичког мишљења у почетној настави математике одвија се паралелно са процесом формирања математичких појмова, оспособљавањем ученика да изводе рачунске операције и процесом учења програмом одређених математичких садржаја“ (Маричић и сар. 2017: 247).

У раду полазимо од претпоставке да адекватним одабиром математичких задатака можемо подстицати и развијати математичко мишљење ученика, а тиме и логичко мишљење као његов део. У претходном делу смо навели неке типове задатака који највише утичу на развијање логичког мишљења и описали смо у чему се огледа њихов значај. Овде ћемо навести конкретне примере за сваки тип задатка из претходног дела.

За различите ученике и различити текстуални задаци могу представљати тешкоћу коју он треба уз мисаони напор да реши. У процесу решавања таквих текстуалних задатака који за ученика представљају тешкоћу, ученик развија своје мисаоне способности и логичко мишљење.

Пример 123. *(Текстуални задатак) Ана има 8 година. Њена мама има 28 година више од ње. Колико година ће имати мама за 26 година?*

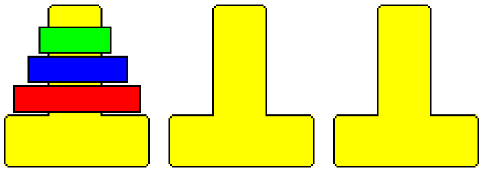
(Маричић, Ђуровић, 2019б: 21)

Наведени пример подстицајно делује на способност уочавања и успостављања узрочних веза и последичних односа између елемената датих у задатку (способност логичког мишљења).

Значај решавања загонетки је велики. Поред утицаја на развијање способности логичког мишљења, загонетке не захтевају посебно математичко знање, а веома су интересантне за ученике, буде њихову заинтересованост и захтевају логичко расуђивање.

Пример 124. (*Загонетка 1) Ханојска кула*

Легенда каже да је у Ханоју некада био манастир који је имао 3 игле. Једна је држала 64 диска различитих димензија који су били распоређени по величини, са највећим диском на дну. Бог је наредио монасима да премештају све дискове на другу иглу, али тако да се završe по истом редоследу. Да би то урадили, имали су дозволу да користе све игле, али већи диск се не може ставити на врх мањег.

Једноставнији пример: 

Покушајте да преместите сва три прстена са првог стуба на други, али тако да поштујете следећа упутства: сваки пут померате само један прстен, можете користити сва три стуба, при сваком померању већи прстен се не може ставити на мањи.

(*NRICH,* 2013)

Суштина решавања се огледа у схватању да могу користити сва три стуба и испуњавању захтева да мањи прстен увек буде на већем. Мисаона активност ученика пробуђена је постојањем проблема који треба решити. У процесу решавања загонетке ученик врши анализу елемената датих у задатку и анализу услова, успоставља везе између елемената у задатку, а у прилици је и да закључује (ако ставим најмањи диск... тада...) и сл. Све време решавања проблема ученик је мисаоно активан.

Пример 125. (*Загонетка 2) Путовање преко потока*

Лисица, кокошка и врећа зрна (житарица) се налазе са једне стране потока и морају стићи на другу страну потока. Лисица и кокошка не могу пливати. Човек бродом може да их узме, али брод може само да држи једну ствар, као и њега. Међутим, лисица ће појести кокошку ако их заједно остави на брегу или истовремено путују бродом. Слично томе, кокошка ће јести житарице ако остане сама са врећом житарица или ако путује с њом у чамцу. Како човек може све три сигурно пренети на другу страну потока?

(*NRICH,* 2013)

Ученик је покренут на размишљање постојањем проблема који треба решити. Приликом решавања наведене загонетке ученик је у прилици да размишља и закључује по принципу *ако...тада*, што је у основи способност логичког мишљења. Такође, ученик је у прилици да комбинује елементе дате у задатку и да их доводи у специфичне везе и да износи закључке на основу тих веза. Његово размишљање, приликом решавања ове загонетке, мора бити флексибилно и мора напустити ригидност у размишљању, како би проблем могао схватити и сагледати шире, како би могао мењати усмереност мишљења у току решавања проблема, успостављати различите везе и односе између елемената и услова датих у задатку и сл. Ученик се овде не сме везати за укалупљене облике размишљања, за устаљене обрасце и не треба понављати неадекватне активности које не воде до решења проблема. Ученик мора проналазити нове идеје и изаћи из стереотипних оквира. Од ученика се захтева један специфичан и еластичан приступ у решавању проблема, што је веома значајно за математичко мишљење, а тиме и све његове компоненте, међу којима је и логичко мишљење.

Логичких загонетки и мозгалица које привлаче пажњу је мноштво и данас су све доступније, што преко интернета, што у посебним публикацијама. Овде ћемо искористити прилику и навести неке од тих логичких загонетки и мозгалица, које могу послужити за развијање логичког мишљења у настави, јер покрећу низ способности логичког мишљења.

Пример 126. *Логичка загонетка 1*

На столу у истом реду налазе се четири фигуре, означимо их са 1, 2, 3, 4. Ове фигуре обојене су зеленом, жутом, плавом и црном бојом. У каквом поретку се налазе ове фигуре и какву боју има свака од њих, ако фигура црне боје лежи између плаве и зелене фигуре, ако десно од жуте лежи фигура 2 и ако фигура 3 лежи десно од фигура 1 и 2, при чему фигура 1 лежи с краја. Осим овога, зна се да фигура плаве боје није поред фигуре жуте боје.

(*Појам логике*, 2015)

При решавању наведене логичке загонетке ученик је у прилици да успоставља везе и односе између елемената датих у задатку уз поштовање захтева датих у формулацији задатка.

Пример 127. *Логичка загонетка 2*

Спојите линијама куће и аутомобиле исте боје, тако да се линије не пресецају.

(*Појам логике*, 2015)

Суштина решавања ове логичке загонетке је у увиђању чињенице да нема услова да линије буду у троуглу, тј. у флексибилности мишљења. Да би се сетио таквог решења, ученик мора напустити стереотипан начин размишљања и понављање неадекватних активности које не воде до решења проблема. Он мора мењати усмереност мишљења и бити отворен за нове идеје и путеве решавања оваквих и сличних проблема. Највећи проблем овде јесте везивање за устаљен начин размишљања, иако он није дат условом задатка. То спутава машту и отвореност ума, а тиме и откривање решења. Када постане свестан чињенице да условом задатка није обавезно да линије буду унутар троугла, већ да оне могу ићи и изван троугла, решење не представља проблем. Оваквим и сличним задацима у почетној настави математике ученике можемо навикавати на промену усмерености мишљења током решавања проблема, тј. на способност флексибилности у мишљењу, што је од посебне важности за подстицање и развијање математичког мишљења.

Приликом решавања мозгалица ученик је у прилици да врши анализу елемената датих у задатку, синтезу, успостављање узрочно-последичних веза између елемената и закључивање на основу уочених веза међу елементима датим у задатку. Дакле, у процесу решавања мозгалица покреће се логичко размишљање, односно низ способности логичког мишљења.

Пример 128. *(Мозгалица 1)*

11. Владан, Обрен, Пера и Марко треба да седну у клупу. Како ће дечаци поседати а да Владан не буде поред Пере и Обрена и да Пера не буде поред Владана и Марка? У поље испред сваког дечака упиши почетно слово одговарајућег имена.

(Дејић, Дејић, 2017: 52)

У решавању наведене мозгалице кључно је успостављање односа између елемената у задатку према датим условима и закључивање на основу успостављених односа између елемената. Једна од познатих мозгалица је и *Ајнштајнов тест*. Код решавања мозгалица учитељ подстиче ученике и оспособљава их да проблем реше корак по корак, а најефикаснији начин за решавање овог проблема је коришћење матрице (табеле) у коју ће ученици, корак по корак, анализирањем тврдњи, уносити податке на основу датих веза које владају између њих.

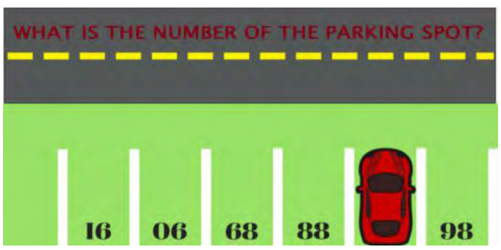
Пример 129. (*Мозгалица 2) Како побећи из собе?*

Џон је заробљен у соби. Ту је сто, столица, двоја врата и мала рупа на плафону (пречника 6 инча). Иза првих врата налази се изузетно гладан лав који није јео неколико дана. Иза других врата налази се стаклени тунел који увећава сунчеву светлост и ствара тако високу температуру да чак и када отвори врата може га убити. Како ће побећи?

(*5 Fascinating Brain Teasers for All the Geniuses of The World*, 2017)

Суштина решавања мозгалице 2 је у логичком резоновању и процењивању датих елемената, довођењу датих елемената у специфичне односе уз коришћење искуства, успостављању веза између елемената датих у задатку и закључивању на основу тих веза. Важно је да ученик, приликом решавања, елементе дате у задатку и искуство доведе у везу која ће му омогућити да дође до ваљаног закључка и решења: *Кроз друга врата, али по мраку (јер ће уз помоћ рупе на плафону знати када је ноћ), а по мраку нема опасности од сунчеве светлости*. Код решавања овог проблема потребно је искуство ученика, али и напуштање стереотипног начина размишљања како би све елементе могао сагледати на прави начин и довести их у везу која ће му помоћи да реши задатак. Ученик мора схватити суштину сваког датог елемента у задатку како би их повезао и схватио да ће рупа на плафону послужити да види када је дан, а када је ноћ и да тај податак доведе у корисну везу са стакленим тунелом и на тој основи реши проблем.

Пример 130. *(Мозгалица 3) Број на паркингу*

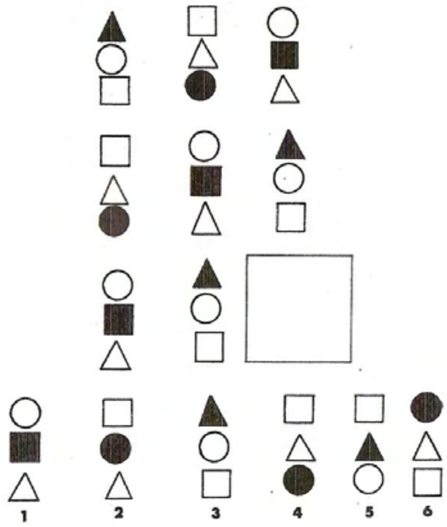


(*5 Fascinating Brain Teasers for All the Geniuses of The World*, 2017)

Једноставним посматрањем слике са друге стране откривамо да је број 87 заузет. Дакле, при решавању ове мозгалице ученик је у прилици да открива скривене елементе у задатку и да на оригиналан начин долази до решења. Овде долази до изражаја његова досетљивост и оштроумност.

Примери 131 и 132 су примери проблема које срећемо у истраживањима Р. Квашчева (1975), а који су погодни за подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

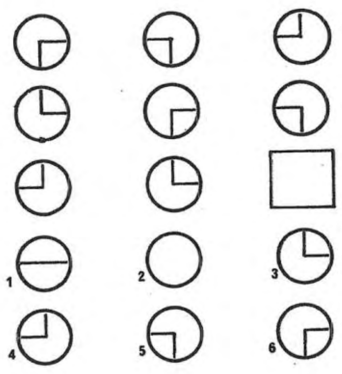
Пример 131. *(Проблем 1) Која од шест нумерисаних фигура спада у празан простор у квадрату? Упишите број те фигуре.*



(Kvaščev, 1975: 169)

Неке сличне проблеме срећемо и у тестовима интелигенције. Ученик приликом решавања овог типа задатака открива правило које влада у прва два случаја и примењује га на трећи ред фигура. Потребно је да, на основу уочених правила, дође до закључка. Дакле, овде до изражаја долази способност уочавања, откривања правила и законитости које владају међу елементима и закључивање на основу тих правила.

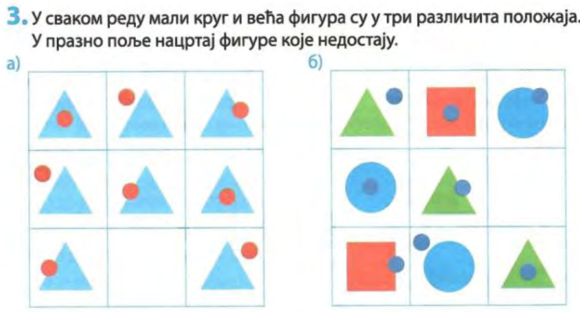
Пример 132. *(Проблем 2) Која од 6 нумерисаних фигура (доњи део илустрација) спада у празан простор у правоугаонику? Упишите само њен број.*



(Kvaščev, 1975: 170)

У наведеним примерима загонетки, логичких загонетки, мозгалица и проблема истакнуте су различите способности логичког мишљења које током њиховог решавања долазе до изражаја. Често је и немогуће направити јасну границу између њих, јер се током решавања проблема различите способности логичког мишљења међусобно допуњују и преплићу. Навођењем ових примера смо желели указати на могућност идентификовања различитих способности логичког мишљења, као и на чињеницу да се од првих дана школовања може почети са решавањем оваквих загонетки, мозгалица и проблема, и тако се ученици могу постепено навикавати на логички начин размишљања. Идентификовањем способности логичког мишљења у појединим фазама решавања проблема могло би се утицати на њихово испољавање, подстицање и даље развијање, а тиме и на подстицање и развијање логичког мишљења ученика у целини. Наведени примери не захтевају велико математичко знање, али су свакако потврда да се логичко мишљење може покренути различитим задацима, који представљају изазов за ученика, са једне стране, а, са друге, позитивно утичу на развијање његовог логичког мишљења.

Пример 133. *Пример проблема који се налази у уџбенику математике*



(Поповић, Вуловић, Анокић, Кандић, 2018а: 40)

Наведени математички задатак, који срећемо у уџбенику математике за први разред основне школе, идентичан је проблемима које наводи Р. Квашчев (1975) и захтева од ученика способност уочавања, откривања правила и законитости које владају међу елементима и закључивање на основу тих правила. Поред тога, наведени пример говори и о могућностима подстицања логичког мишљења од првих дана школовања, без обзира на ниво математичких знања.

Даље у раду ћемо навести неке примере логичких проблема.

Пример 134. *(Логички проблем 1)*

Четири ученика: Бора, Драшко, Милош и Пера такмичили су се у нечему, али на питање које су место освојили, дали су три одговора:

(1) Милош је освојио друго, Пера је освојио треће место.
(2) Милош је освојио прво, Драшко је освојио друго.
(3) Бора је освојио друго, Пера је освојио четврто.

Зна се да је један део сваког од тих одговора истинит, а други је неистинит. Одреди место које је освојио сваки такмичар.

(Prvanović, 1970: 744)

Наведени пример (Пример 134) је веома погодан за подстицање и развијање логичких операција, мисаоних поступака и различитих облика закључивања. Дакле, наведени тип задатка погодан је за подизање квалитета логичког мишљења у почетној настави математике. На основу наведеног примера, могуће је у почетној настави математике формулисати сличне логичке проблеме који ће бити прилагођени узрасту ученика и њиховим развојним могућностима. Наведни пример је веома погодан, јер покреће више способности логичког мишљења приликом решавања. Ученик мора добро познавати логичке операције, проблем мора поступно решавати, приликом решавања мора користити низ мисаоних поступака, а све у циљу правилног закључивања. Ради анализирања података у наведеном примеру, ученик мора уочавати везе и релације које владају између датих елемента. Задатак је сложен и, како би се његово решавање учинило једноставнијим, потребно га је решавати кроз кораке. Још једна корист оваквих задатака је у доминантној импликацији, тј. закључивању које иде у правцу „ако...тада“. Процедура решавања наведеног логичког проблема делује сложено и веома компликовано, али када се, рецимо, као олакшица у праћењу корака користи таблица, ученицима је процес решавања једноставнији.

Процедура решавања оваквих логичких проблема јесте сложена, јер укључује више способности логичког мишљења и мисаони напор ученика. Сличан је и следећи пример.

Пример 135. *(Логички проблем 2)*

У једном парку се играју четири девојчице Ања, Биља, Цаца и Даша. На питање колико која има година, жена која их пази је одговорила:

(1) Ања - 6 година, Биља - 7 година.
(2) Цаца - 7 година, Ања - 5 година.
(3) Биља - 8 година, Даша - 7 година.

Међу њима нема вршњакиња. Израчунај узраст сваке девојчице ако се зна да је један део сваког од тих одговора истинит, а други је неистинит.

Наведени пример је најједноставније и ученицима најочигледније решавати помоћу таблице и корак по корак, како би се касније везе и релације које владају између елемената у задатку могле сагледати и на менталном плану.

Почетна настава математике пружа огромне могућности за примену логичких проблема. Због њиховог позитивног утицаја на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, готово да и не треба посебно указивати на потребу њиховог примењивања у настави, већ на учитељима остаје само да их добро осмисле и пронађу време за њихово решавање. Важно је само овакве логичке проблеме добро осмислити, примерено узрасту ученика и учинити их интересантним и привлачним за ученике.

Пример 136. *(Логички проблем 3)*

Бака Мара има три мачке Цицу, Цацу и Цуцу. Једног дана им је ставила три различите машне: плаву, жуту и црвену машну. У посету им је дошла бака Јока и рекла:

(1) Цица има око врата црвену машну.
(2) Цаца има око врата не-црвену машну.
(3) Цуца има око врата не-плаву машну.

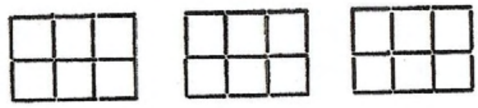
Од тих одговора само је један истинит. Какву машну је имала око врата свака маца?

Код наведеног примера ученик је у прилици да успоставља везе и односе између података датих у одговорима бака Јоке, и да размишља у правцу „ако... тада...“ и на основу успостављених веза изводи закључке.

Наведени задаци се могу решити логичким расуђивањем. Овим логичким проблемима, који су корисни за подстицање логичког мишљења ученика, можемо додати логичке загонетке и мозгалице, а које су, такође, погодне за подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Такође, ту су и задаци којима можемо подстицати понашања супротна ригидном понашању. Овде ћемо навести само неке, којима се може превазилазити ригидно понашање, а истовремено развијати различите способности математичког мишљења, а самим тим и различите способности логичког мишљења ученика.

О значају задатака са палидрвцима смо говорили на више места у раду. Овде ћемо навести неке примере задатака са посебним освртом на начин њиховог деловања на логичко мишљење ученика.

Пример 137. *(Задатак са палидрвцима 1) Узмите 7 шибица, тако да остану 3 квадрата. Дајте три решења.*



(Kvaščev, 1975: 211)

Како се од ученика траже три решења, он се не може задовољити само најједноставнијим, већ мора разматрати и друге могућности чиме овај задатак утиче на флуентност и способност успостављања веза и односа између елемената у задатку.

Пример 138. *(Задатак са палидрвцима 2) У сваком датом одузимању помери само по једно палидрвце па да једнакости буду тачне.*

V – V = II

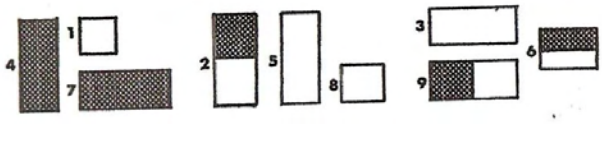
VI – V = XII

VII – III = IX

X – II = X

У области задатака са палидрвцима, свакако да су најдоминантнији овакви, код којих се захтева да померањем одређеног броја палидрваца једнакост буде тачна. Како би решавао такве задатке, ученик мора доводити у везу податке који су дати (постављена једнакост која није тачна) и претпостављати који се подаци од њих могу добити (нпр. ако са десне стране израза V – V = II померим једно палидрвце остаје ми резултат један, а њега могу добити тако што ћу то палидрвце поставити тако да имам *шест минус пет* или *пет минус четири*). На сличан начин ученик ће решавати и остале примере.

Пример 139. *(Задатак формирања појма) Овде имате девет фигура. Ставите их у три кутије, тако да у једној кутији буду све фигуре исте врсте.*



(Kvaščev, 1975: 212)

У наведеном примеру се од ученика очекује класификација, али истовремено врсту, као критеријум класификације, треба сам да открије.

Пример 140. *(Задатак досетљивости 1) Како да две другарице поделе 16 крушака, а да при томе прва добије једну крушку више од друге?*

Суштина решавања овог задатка лежи у откривању чињенице да се крушка може поделити (пресећи) на пола. Тако да ће једна другарица добити седам и по крушака, а друга осам и по крушака. Ученик је у прилици да открива и користи нов податак, који није експлицитно дат у задатку.

Пример 141. *(Задатак досетљивости 2)*

Полазећи од једног града неке њему сасвим непознате земље, човек је дошао до раскрснице на којој је стајао саобраћајни знак. Међутим, неко га је извукао из земље и бацио у јарак тако да путник сада не зна којим правцем треба да иде како би дошао до жељеног циља. Како је он савладао ову тешкоћу?

(Kvaščev, 1975: 213)

Пример 142. *(Задатак досетљивости 3) Може ли се од 9 узети 1, па да остане 10?*

Само уз висок степен досетљивости могуће је открити скривени податак, на шта га упућује реч „узети", да се ради о римским бројевима и тако открити решење: када од IX, узмемо I остаће X.

О значају задатака настављања низа смо више пута у раду говорили. Овде ћемо навести само још један пример.

Пример 143. *(Задатак настављања низа) Допиши број који недостаје.*

100, 300, 500, 700, _________

Пример 144. *(Задатак мењања принципа састављања) Сара, Нена и Мара су пре три године укупно имале 21 годину. Колико ће година њих три имати укупно за 5 година?*

Задаци мењања принципа састављања задатка имају велики значај у подстицању и развијању логичког мишљења. Захтевају да се подаци дати у задатку користе на другачији начин. Пре три године ове три девојчице су укупно имале девет година мање (три пута по три), тако да оне сада укупно имају 21 + 9 година. Такође, и у другом делу задатка, податак 5 година, се преноси на ове три девојчице, тако да ће оне за пет година имати укупно петнаест година више (три пута по пет), дакле 30 + 15. При решавању наведеног задатка, ученик је у прилици да открива податке који нису експлицитно дати у формулацији, као и да успоставља везе и односе између елемената датих у задатку.

Посебно ћемо указати на значај задатака који се срећу на математичким такмичењима ученика, а који утичу на подстицање и развијање математичког мишљења ученика. Задаци који се јављају на математичким такмичењима су „сложенији атрактивнији од оних које ученици решавају у оквиру обавезне наставе. Као такви пружају могућност да ученици решавају интересантне проблеме, задовољавају своју радозналост, одгонетају загонетке, сазнају непознато и тако даље. Њихово решавање претпоставља коришћење различитих метода и поступака, трагање за новим решењима и стваралачки прилаз математичким садржајима, те су стога погодни за подстицање и развијање способности математичког мишљења ученика" (Маричић и сар. 2017: 276–277). Решавање ових задатака доприноси подстицању и развијању математичког мишљења ученика, јер у процесу њиховог решавања ученици самостално раде, размишљају и закључују и примењују различите математичке способности, односно способности логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења.

Као што се из свега реченог види, могућности подстицања и развијања различитих способности логичког мишљења ученика помоћу различитих типова математичких задатака су бројне. На учитељима и даље остаје да правилним избором адекватних задатака утичу на поједине способности логичког мишљења и да их развијају у настави математике. У експерименталном програму приказујемо различите типове задатака којима се систематски и плански може подстицати и развијати логичко мишљење ученика, што ћемо настојати и да докажемо нашим истраживањем. Уколико потврдимо претпоставку да се наведеним задацима успешно може подстицати и развијати логичко мишљење ученика, учитељима ће то у великој мери олакшати остваривање задатка наставе математике који се односи на развијање логичког мишљења.

4.1.2. Фактори који позитивно утичу на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике

Ако пођемо од претпоставке да се логичко мишљење ученика може подстицати добро организованом наставом и правилним одабиром математичких задатака којима се утиче на поједине способности логичког мишљења ученика, онда је могуће идентификовати факторе који позитивно утичу на тај процес. На основу истраживања које је спровео Р. Квашчев (1969, 1974, 1975, 1976) у оквиру изучавања креативног понашања личности и резултата до којих је дошао, можемо закључити да постоје бројни фактори који могу допринети и развијању логичког мишљења ученика:

- Ученици са израженим математичким способностима, међу којима су и изражене способности логичког мишљења, као и ученици са развијеним мисаоним поступцима које често примењују у свом раду;
- Мисаоно активирање ученика – они су мисаоно активни субјекти наставног рада и у прилици да активирају и уложе све своје мисаоне напоре;
- Самостална тенденција ученика да су мисаоно активни у процесу решавања различитих математичких проблема;
- Мотивисање ученика – побуђивање њихове радозналости и развијање интересовања за учење математике. Овај задатак се може остварити кроз садржаје из домена занимљиве математике. Ту спадају: „магични квадрати, занимљиве бројевне једнакости, задаци са необичним одговорима, шаљиви задаци, математичке приче, занимљива геометрија, из живота математичара, математичке игре, погађање броја, математички ребуси, игре шибицама, нумерички лавиринти, илузија и сл." (Дејић, Егерић, 2003: 293–298). Осим што ће кроз ове садржаје ученици бити мотивисани за учење математике, имаће и могућност да испоље различите компоненте логичког мишљења и да их развијају;
- Подстицање самосталности и слободног изражавања идеја;
- Креативност наставника – Како би позитивно деловао на подстицање и развијање логичког мишљења својих ученика и сам наставник мора бити креативан и стално уносити новине у свој рад. Креативан учитељ подстиче самосталан рад ученика и мисаоно активира своје ученике. Он своје ученике поставља у функцију малих истраживача;
- Афирмисање нових поступака учења – Ово је у уској вези са претходним фактором, јер само креативан учитељ ће уносити новине у свој рад.

Овде смо набројали само неке факторе који могу позитивно деловати, односно повећати позитиван утицај математичких задатака на подстицање и развијање логичког мишљења у почетној настави математике. Наравно, листа ових фактора је много дужа и стално се допуњује. Ту се могу додати и: повољни материјални услови школе, иновације у настави и употреба савремене технологије, усавршавање учитеља и сл.

Раније смо више пута у раду помињали да и задаци могу бити позитиван фактор развијања логичког мишљења ученика. Важно је код одабира математичких задатака, којима желимо идентификовати математичке способности и способности логичког мишљења и даље их развијати, бити веома обазрив. Приликом одабира задатака за идентификовање математичких способности мора се водити рачуна о следећим захтевима:

- „задаци морају бити занимљиви, доступни ученицима, ако је могуће треба да се ослањају на наставни програм, да се разликују од обичних задатака који постоје у уџбеницима математике;
- операције које се налазе у структури решавања задатка морају одговарати природи параметара математичких способности ученика који треба да се идентификују;
- задаци морају бити груписани према врсти размишљања“ (Дејић и сар. 2013: 104).

Важно је код одабира задатака којима желимо развијати логичко мишљење ученика, пре свега одредити које способности логичког мишљења желимо развијати код ученика и према тим способностима бирати задатке којима се изабрана способност може развијати. Дакле, морамо груписати задатке према способностима логичког мишљења које желимо подстицати и развијати. Са друге стране, задаци којима желимо подстицати и развијати способности логичког мишљења не морају да захтевају посебно математичко знање, већ само способност логичког мишљења на коју желимо да делујемо задатком.

У развијању логичког мишљења ученика важно место имају и проблемски задаци и проблемска настава. Позитивне стране решавања математичких проблема и проблемске наставе позитивно утичу на развијање логичког мишљења ученика. „Учење решавањем проблема изазива дубока интелектуална осећања, посебно осећање сигурности у властите способности, доприноси да настава постане привлачнија за ученике, развија интересовања за нова, шира и дубља сазнања, утиче да се мисли логички и стваралачки, подстиче развој креативности, омогућава стицање трајнијих знања и њихово ефикасније коришћење“ (Пикула, Милинковић, 2015: 92). При решавању проблема утиче се на продуктивно мишљење. Проблемска настава и решавање проблема утичу позитивно на развијање логичког, стваралачког и критичког мишљења.

За развијање логичког мишљења ученика важна је активност ученика. Од тога каква је активност ученика зависи и које ће интелектуалне способности и способности математичког мишљења бити развијене. „Ако нпр. желимо да код ученика/ца развијемо критичко мишљење, креативност и самосталност онда то не можемо без активности учења какве су: смишљање, планирање, дискутовање, вредновање, препоручивање итд. Логичко мишљење, способност решавања проблема, способност учења не могу се постићи без ситуација у којима ученици/це упоређују, разврставају, класификују, примењују информације које добијају од наставника/це“ (Grupa autora, 2014: 80).

Сви побројани фактори, а има их још, који позитивно утичу на развијање логичког мишљења ученика добијају свој пуни смисао тек у свом јединству, тј. заједничким деловањем. Тек својим заједничким деловањем на способност схватања и коришћења појмова *и, или, не,* способност уочавања узрочно-последичних веза и односа, способност уочавања правила и законитости и на способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку, фактори које смо издвојили деловаће на развијање логичког мишљења.

4.1.3. Фактори који негативно делују на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике

Насупрот факторима који позитивно делују на развијање логичког мишљења, постоје и фактори који негативно делују на његово подстицање и спутавају његово развијање у почетној настави математике. На основу истраживања које је спровео Р. Квашчев (1969, 1974, 1975, 1976) у оквиру испитивања креативности и ригидног понашања личности и резултата до којих је дошао, можемо закључити да постоје бројни негативни фактори који спутавају развијање логичког мишљења ученика у настави математике. Овде ћемо указати само на неке негативне факторе за развој логичког мишљења ученика у почетној настави математике:

- Настава је прилагођена просечном ученику, при чему су занемарени ученици са израженим способностима логичког мишљења, као и ученици са другим математичким способностима;
- Ученик као објекат у наставном процесу – ученицима се излажу садржаји и од њих се очекује репродукција;
- Немотивисаност ученика за учење математике, при чему се математика излаже ученицима на сувопаран начин;
- Настава у којој је ученик објекат наставног процеса, а његова активност сведена на слушање и памћење;
- Очекивање репродуктивног знања, знања без разумевања и слободе креативног испољавања личности ученика;
- Шаблонизам у раду – инсистирање на само једном тачном решењу и решавање задатака по утврђеном принципу, што доводи до стереотипног начина рада, чиме се „гуше“ мисаоне способности ученика, а тиме и способности логичког мишљења;
- Предавачка улога наставника;
- Ригидно понашање учитеља и ученика у наставном процесу.

Овде смо набројали само неке факторе који могу спутавати развијање математичког мишљења ученика, а тиме и логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Покушаћемо да кратко укажемо на основне карактеристике наведених фактора и на то како они спутавају развијање логичког мишљења ученика, а све у циљу њиховог препознавања и отклањања у настави.

Настава прилагођена просечном ученику, при чему су занемарени ученици са израженим способностима логичког мишљења - У овој настави су задаци, тј. захтеви који се стављају пред ученике прилагођени просечном ученику. Ученици са израженим способностима логичког мишљења не добијају захтеве који би даље подстицали и развијали способности које они поседују у неком степену, па „тапкају у месту“ и често нису схваћени. Ученицима са израженим способностима логичког мишљења је неретко

„досадно“ на часовима, па су окарактерисани као незаинтересовани, а све услед неадекватне мотивације и неадекватног ангажовања њихових способности.

Ученик као објекат у наставном процесу - Иако савремена настава у први план истиче субјекатску улогу ученика и њихово мисаоно активирање, неретко се дешава да је он још увек објекат у наставном процесу од којег се очекује усвајање градива и чиста репродукција истог, без могућности креативног испољавања личности. Ученик нема прилику да логички мисли и испољава своје идеје. Очекивање репродуктивног знања од ученика не даје простора ученицима да мисле. Гушењем процеса мишљења код ученика долази до грешака које се не могу касније исправити, а сведоци смо да их још увек има у настави.

Немотивисаност ученика за учење математике - Да би се градиво учило осмишљено и са разумевањем, а такође и било трајније и ефикасније (примењљивије), важна је и мотивација ученика за учење. Овде, пре свега, мислимо на мотивацију ученика за учење математике. Посебно је важно код ученика пробудити унутрашњу мотивацију, да ученици не би учили за оцену или неку другу награду која долази споља. Буђењем унутрашње мотивације за учење математике, ученици ће учити зато што ће им сам успех у том процесу бити награда, као и из личног задовољства. Постоје бројни начини да се ученици мотивишу за учење математике, међу њима истичемо буђење радозналости и развијање интересовања за математику. Радозналост у настави математике се може изазвати разним логичким загонеткама, мозгалицама, логичким проблемима, као и причама из живота математичара, приближавањем математике ученицима уз објашњење примене математике, математичким триковима и сл. (Дејић, Егерић, 2003). За буђење радозналости и подстицање интереса за математику, као што смо набројали, важни су сви елементи занимљиве математике, а на учитељима остаје само да на прави начин те садржаје искористе у настави.

Ученик као објекат наставног процеса - Његова улога је сведена на слушање и памћење, односно репродуктивно знање, насупрот продуктивном знању на којем се мора инсистирати у савременој настави. Ученик нема користи од знања које не уме искористити у новим ситуацијама.

Шаблонизам у раду - Једна од препрека испољавању идеја од стране ученика јесте шаблонизам у раду. Од ученика се очекује само једно тачно решење, а често се инсистира и на једном путу решавања. То не оставља простора ученицима за постављање питања, предлагање идеја, мишљење и креативно испољавање.

Предавачка улога наставника - У настави у којој је учитељ предавач, ученик је слушалац. Од ученика се очекује да слуша, па у таквој настави нема простора за ученичке идеје, предлоге, питања, а све то „гуши“ његове мисаоне процесе, његову креативност и логичко мишљење.

Ригидно понашање - Под ригидним понашањем најчешће се подразумева „неспособност промене усмерености мишљења у току решавања проблема, неспособност прилагођавања личности у измењеним и новим ситуацијама, као истрајно понављање неодговарајућих активности“ (Kvaščev, 1975: 195). Ригидно понашање ученика подразумева такво понашање где у новој проблемској ситуацији ученик не може да се снађе, јер је његово мишљење везано за старе одговоре. Ученик са ригидним понашањем се у новим ситуацијама понаша по устаљеним шаблонским и стереотипним начинима. Ученици са ригидним понашањем не могу да приђу проблему на нов и неуобичајен начин. Р. Квашчев (1975) је спроводио истраживање које се бави ригидним понашањем ученика. Ради упоређивања својих резултата са резултатима других истраживача, наводи сумаријум откривених особина ригидних личности других истраживача, а затим и сумаријум особина ригидних личности које је истраживањем открио, а то су:

„1. Низак ниво развоја интелигенције.
2. Мала развијеност социјалне интелигенције.
3. Интелектуална неуспелост.
4. Когнитивна конформираност.
5. Социјална неприлагођеност.
6. Високо развијени ригидни ставови.
7. Затвореност у себе, крутост, скептичност, резервисаност.
8. Одсуство критичког суђења и учења.
9. Склоност депресији и песимизму, флегматичност.
10. Субмисивност.
11. Одсуство спонтаности и самопоуздања у личном и друштвеном односу.
12. Забринутост, анксиозност.
13. Нетолерантност, затвореност система схватања и вредности.
14. Високи конформизам.
15. Затвореност у себе.
16. Неуротичност.
17. Ниска амбиција за остваривање социјалних достигнућа.
18. Преосетљивост.
19. Емоционална нестабилност, мање снажан его, страх.
20. Потиштеност, забринутост, узнемиреност, плашљивост.
21. Мали степен социјалне зрелости.
22. Социопатске и психопатске тенденције.
23. Конвенционалност, одсуство мотивисаности за истраживачки рад.
24. Потчињеност ауторитету“ (Kvaščev, 1975: 281).

Наведене особине ригидних личности у почетној настави математике спутавају математичко мишљење ученика, односно стваралачко, критичко, логичко и апстрактно мишљење. Особе са ригидним понашањем склоне су тражењу шаблона у решавању свих проблема, ретко излазе из стандардних оквира и сваки нови задатак настоје решити по шаблону. То су особе које су затворене за нове идеје и без слободе размишљања. Како би се ригидност превазилазила у почетној настави математике, потребно је вежбати одређена понашања супротна ригидним, а то се може постићи различитим математичким задацима.

4.2. Учитељ као значајан чинилац подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике

У наставном процесу важну улогу игра и личност учитеља, његов однос према раду, његове компетенције за наставну област коју предаје и сл. Улога учитеља се у савременој школи знатно променила у односу на улогу коју је учитељ раније имао. Учитељ је имао улогу предавача и испитивача. Та његова улога је стављала ученика у позицију слушаоца и посматрача и од ученика се очекивала репродукција знања. У савременој настави улоге учитеља и ученика су се знатно промениле.

Наставни процес је двосмеран и одиграва се на релацији учитељ – ученик и обрнуто. У том процесу учитељ је личност која води, а ученик у том процесу треба да буде активан субјект у стицању знања. То важи и за почетну наставу математике. Све више се намеће улога учитеља као партнера у стицању знања.

Учитељ је значајан чинилац математичког образовања. У наставном процесу учитељ има вишеструке улоге. Он је, пре свега, планер, организатор и водитељ наставног процеса. Учитељ је личност која бира математичке садржаје, као и начин њихове реализације, методе, средства и облике рада. Он мотивише ученике, подстиче их на учење, преноси им знања и креира атмосферу на часу (Pinter i sar. 1996; Ибро, Пикула, 2007; Вуковић, 2008; Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016; Маричић и сар. 2017). Све његове улоге су подједнако важне када се узме у обзир чињеница да савремена школа све више тежи развијању мишљења ученика, а мање усвајању готових знања. Све више се са репродуктивног знања прелази на продуктивно знање. Све више се од школе захтева да развија различите способности ученика и да оспособљава ученике да самостално мисле и самостално долазе до нових знања, као и да стечена знања примењују у свакодневном животу. Сходно тим променама, које се односе на очекивања од школе, измењена је и улога учитеља у наставном процесу.

Улога учитеља је значајна и за развијање мишљења ученика. Развој се не одвија „спонтано и стихијски, већ извире из целине организације наставе математике, у оквиру које се одвијају различите активности наставника и ученика, усмерене на остваривање свих предвиђених исхода у овој области рада у настави“ (Антонијевић, 2014: 221). Све више се истиче вођење које остварује наставник/учитељ као значајан и суштински фактор који утиче на развој математичког мишљења ученика. То вођење ученика се остварује на различите начине, а то су: (1) индивидуализовано испостављање захтева ученицима; (2) праћење оствареног напретка у процесу решавања; (3) пружање помоћи; (4) указивање на погрешне кораке; (5) формативно процењивање (оцењивање) (Антонијевић, 2014: 222).

Учитељ у наставном процесу представља значајан фактор остваривања свих задатака наставе, па тиме и значајан фактор развијања математичког мишљења ученика. Математичко мишљење ученика у почетној настави математике је могуће развијати, а на учитељу је да то оствари у пракси. Ако постави циљ *развијање математичког мишљења ученика*, он мора јасно знати шта представља појам математичко мишљење и које способности, као и којим методама и средствима ће га развијати код ученика. Такође, он мора добро познавати своје ученике, односно, које способности математичког мишљења његови ученици поседују, како би их даље развијао, као и које математичке способности су недовољно развијене, па их је потребно подстицати код ученика.

На основу проучене литературе која се односи на улоге учитеља у наставном процесу усмерене на развој мишљења (Pinter i sar. 1996; Ибро, Пикула, 2007; Вуковић, 2008; Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016; Маричић и сар. 2017), долазимо до закључка да су неке од карактеристика учитеља: знање, стручност, његове вредносне оријентације, креативност и стваралаштво, мотивисаност, склоност ка новинама, добар организатор, познавалац својих ученика и њихових способности, добар вођа у процесу наставе којом жели подстицати и развијати мишљење својих ученика и сл. Учитељ мора добро и јасно познавати математичко мишљење својих ученика и на тим основама бирати методе и средства за даљи развој математичког мишљења ученика, као и одговарајуће садржаје којима ће то остваривати. Томе треба додати и његову улогу у бирању задатака. Учитељ мора бирати задатке који ће „покривати“ све оно што он жели развијати, подстицати, проширивати код својих ученика. Он мора бирати оне задатке којима ће утицати на развијање различитих математичких способности својих ученика и задатке којима ће остваривати све постављене задатке часа, а тиме и задатке почетне наставе математике. Посебно је важна улога учитеља у бирању проблема (проблемских задатака) у почетној настави математике и вођењу ученика у процесу њиховог решавања. Основни задатак учитеља је стварање проблемске ситуације, како би код својих ученика пробудио мисаони рад. Када постоји проблем, он покреће ученикову мисаону активност и ученик улаже одређени мисаони напор да дође до решења. То доприноси развијању његовог математичког мишљења. Виготски је „успоставио принципе по којима наставник мора постављати и такве задатке који захтевају умни напор. Ученик у току решавања задатака активира своје до тада изграђене мисаоне операције, па уколико тражи помоћ, значи да залази у зону наредног развоја који тек треба да достигне. Отуда задаци у уџбенику морају бити тако конципирани да обезбеде ученицима одређене мисане напоре на сваком часу" (Пикула, Марковић, 1999: 326). Изнето схватање мора се односити на све задатке које учитељ поставља својим ученицима уколико жели подстицати и разијати способности логичког мишљења, а тиме и њихово логичко мишљење. Дакле, уколико жели подстицати логичко мишљење својих ученика, учитељ мора знати које способности логичког мишљења су развијене код његових ученика, као и у ком степену су развијене и ученицима давати захтеве који су мало изнад тога, како би се њихов развој даље наставио.

Огромна улога учитеља у развијању математичког мишљења најбоље се види у чињеници да ће математичко мишљење ученика бити развијеније уколико учитељ:

- „допусти ученицима да размишљају,
- прихвата различита мишљења и разноврсне идеје,
- ствара атмосферу у одељењу у којој се ни једна идеја и ни једно решење не омаловажавају и ученик не излаже подсмеху,
- омогући да ученици буду максимално активни у свим етапама почетне наставе математике, да посматрају, размишљају, процењују и повезују податке, изводе закључке, предвиђају, постављају питања, аргументују своје виђење проблема и слично" (Маричић и сар. 2017: 266).

„Свако ефикасно учење подразумева активирање мисаоних операција ученика. Наставник пре свега треба да управља, да води наставни процес. Активност ученика се не подразумева, већ је неопходна одговарајућа мотивација. Најбољи мотив је интересантно градиво, интензивна мисаона активност, занимљива презентација градива и адекватна награда за уложени труд" (Pinter i sar. 1996: 20). Сви наведени начини мотивације ученика зависе од учитеља, од тога како и на који начин ће изложити градиво, учинити га интересантним за ученике и како ће их подстицати на мисаону активност. Он треба тако да креира наставу математике да она мотивише ученике, буди њихову радозналост и да занимљивом и ученицима блиском и интересантном интерпретацијом математичких садржаја, задатака и проблема држи ученикову пажњу и интересовање.

За успешну реализацију почетне наставе математике, која ће у исто време бити ефикасна и доприносити трајнијем усвајању математичких знања, потребан је учитељ који ће уважавати специфичности наставе математике, односно учитељ који познаје математичке садржаје, познаје законитости развоја ученика и организације наставе, као и учитељ који ће уз то бити креативан и мотивисан да истраје у свом раду (Шпијуновић, Маричић, 2016: 49). „Како је основна школа темељ за даље учење математике, у њој треба издвојити наставника као креатора образовног процеса, са свим способностима, одликама и вештинама које га чине стручно компетентним за рад у савременој школи“ (Ибро, Пикула, 2007: 1). Овде се инсистира на потреби мењања улоге наставника у савременој настави математике, тј. савременој школи истичући да „функције наставника се померају, па је он у ситуацији организовања рада ученика, подстицања на самосталну активност и вођења ученика до самообразовања. Наставник постаје организатор, ментор, саветник, сарадник и сл.“ (Ибро, Пикула, 2007: 10).

За развијање математичког мишљења својих ученика потребан је учитељ који је стручан, оспособљен, отворен за нове идеје, стваралачки оријентисан, самопоуздан, флексибилан. Савременој школи и настави математике, које су оријентисане на подстицање и развијање математичког мишљења ученика, потребан је учитељ који ће свакодневно у разреду стварати креативан и адекватан амбијент за стицање нових знања и развијање математичког мишљења. Потребан је учитељ који ће својим ученицима бити покретач активности и подршка у раду, који ће их свакодневно мотивисати, усмеравати њихове активности у жељеном правцу, охрабривати их у тражењу нових идеја, подржавати и сл.

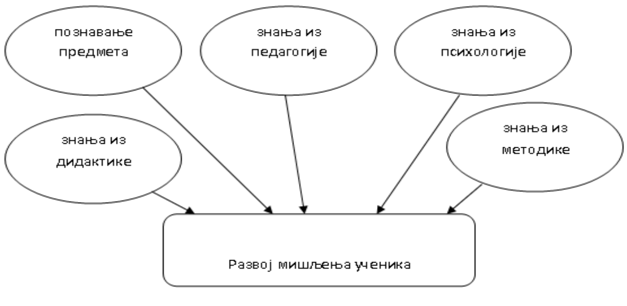
У процесу учења математичких садржаја „учитељ треба пронаћи за себе, и помоћи ученицима да и они пронађу, базичне шаблоне учења. Затим, треба учити ученике да увек стичу знања проналазећи их за себе. И коначно, учити их да увек буду спремни да акомодирају своје асимилаторске шеме, да уважавају њихове вредности као радних средстава све дотле док их не буду нужно мењали новим, адекватнијим шемама. Учитељи математике све ово могу постићи само ако прво, уче математику, а затим, ако стално обучавају ученике како да уче математику“ (Вуковић, 2008: 64).

Задатак учитеља је „да заинтересује ученике за математичке садржаје, да их мотивише и мобилише, ставља пред изазове, води ка откривању, упућује, да на математичке проблеме не гледа својим већ очима ученика, да допусти ученицима критичност у односу на садржаје, сумњу у понуђено решење, слободу приступа решавању одређеног задатка и тако даље“ (Маричић и сар. 2017: 283).

Из наведеног се виде бројне и најважније функције и активности, као и карактеристике доброг учитеља, а то су:

- добро дидактичко-методичко знање,
- добро познавање садржаја наставе математике и самог предмета,
- способност организације ефикасне наставе математике,
- отвореност и стално стручно усавршавање,
- мотивисаност за рад и буђење мотивације код ученика и сл.

Из свега наведеног се види да добар учитељ мора поседовати низ знања и то знања из области предмета који предаје, из педагогије, психологије, дидактике и методике, како би сва своја знања усмерио на ученика као центар свих његових активности, односно на развијање мишљења ученика. Наведено можемо и шематски представити.



Слика 1. *Карактеристике доброг учитеља у функцији развијања мишљења ученика*

Учитељ је прва личност са којом се ученици срећу у оквиру организованог математичког образовања. Он је важан фактор у настави математике. Улога учитеља у подстицању и развијању логичког мишљења ученика је велика. Ако се узму у обзир његове улоге у наставном процесу, можемо истаћи да он организацијом наставе, те планираним задацима и начинима вођења наставног процеса, итекако може подстицати логичко мишљење својих ученика. Одабиром математичких задатака којима може подстицати поједине компоненте логичког мишљења, учитељ може и мора код својих ученика плански и систематски подстицати и развијати логичко мишљење. Према томе, улога учитеља у остваривању тог задатка наставе математике је огромна. Он мора добро познавати своје ученике, њихов интелектуални развој и ниво развијености њихових математичких способности. Он мора добро познавати ниво развијености способности логичког мишљења својих ученика како би даље подстицао то мишљење у настави математике. „Само онај наставник који је свестан интелектуалног, односно сазнајног нивоа својих ученика и који дидактичке кораке усклађује са тим нивоом, може бити успешан" (Пикула, Милинковић, 2015: 20).

Од учитеља зависи математичко образовање ученика, односно квалитет њиховог математичког образовања и остваривање свих задатака почетне наставе математике, а тиме и развијање логичког мишљења ученика. На основу проучене литературе која се бави улогама учитеља које су усмерене на развијање математичког мишљења ученика (Ибро, Пикула, 2007; Вуковић, 2008; Пикула, Милинковић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016; Маричић и сар. 2017), можемо закључити да, како би код својих ученика подстицао и развијао логичко мишљење, учитељ треба:

- добро осмишљено и организовано да води наставни процес и своје ученике до нових сазнања;
- да у наставном процесу подстиче самосталност својих ученика;
- да подстиче ученике на слободно исказивање својих идеја које су у исто време и нове, необичне, ретке, другачије;
- да подстиче стваралачки рад својих ученика и њихову креативност;
- да код ученика стално изазива интересовање за учење математике;
- да подстиче ученичков истраживачки дух и радозналост;
- да подстиче ученике у анализирању задатака и података у задатку и да их у процесу решавања навикава на коришћење различитих мисаоних операција;
- да подстиче ученике на закључивање у настави математике и на образлагање својих закључака;
- да подстиче ученике на правилно коришћење математичког језика, посебно појмова „и", „или", „не", „ако...тада", „ако и само ако";
- да подстиче ученике на уочавање правила у задацима;
- да подстиче ученике да откривају нове податке у задатку и успостављају нове релације међу елементима у задатку;
- да подстиче ученике да самостално проверавају своја решења, проналазе што већи број решења и да самостално исправљају своје грешке;
- да подстиче ученике да „изађу" из шаблона и траже нова и оригинална решења;
- да подстиче критичност код ученика према својим и туђим идејама и слично.

У остваривању свих задатака наставе, па и у остваривању задатка наставе математике који се односи на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, учитељ има важну и одговорну функцију. „Обраћајући се својим ученицима питањем и препоруком, наставник ће имати пред собом двоструки циљ. Прво, помоћи ученику да спретно реши свој задатак, друго, развијати умне способности ученика тако да будуће задатке може решити сам“ (Polya, 1966: 3). Питања и препоруке у решавању математичких задатака су важне за учитеља и он их мора добро познавати, јер је он тај који води наставни процес или, боље речено, води ученике у решавању проблема до решења.

Учитељ је важан фактор „који осим што пажљиво бира садржаје за учење, пажљиво ствара ситуације за учење блиске ученику, усмерава разговор и мишљење ученика у смеру откривања битних суштинских својстава појма, апстраховању небитних својстава, извођењу закључака“ (Маричић и сар. 2017: 248). Дакле, улога учитеља у подстицању и развијању логичког мишљења ученика је непроцењива, јер он је тај који планира и организује наставни процес и кроз тај процес води своје ученике до нових сазнања. Од његових професионалних способности зависи и квалитет математичког образовања његових ученика.

4.3. Улога ученика у почетној настави математике која је усмерена на развијање логичког мишљења

Насупрот настави у којој је ученик био објекат, данас је стање другачије. Све више се инсистира на другим квалитетима који у функцију субјекта стављају ученика. У савременој настави тежиште је, са меморисања и памћења података, великог броја информација, чињеница, померено на активну улогу ученика у процесу стицања знања и на развијање његовог мишљења. Стога су промењене улоге учитеља и ученика у настави. У почетној настави математике се све више инсистира на активној улози ученика и на подстицању његових математичких способности, као и процеса математичког мишљења.

Међу факторима који утичу на развој математичког мишљења ученика важно место припада и самим ученицима, односно активностима које они имају у процесу наставе математике и у процесу стицања математичких знања, као и њиховим математичким способностима.

Математичке способности ученика испољавају се у следећем:

- „способности формулације математичког материјала, одвајање форме од садржаја, апстраховање конкретних односа,
- способност одвајања битног од споредног,
- способност оперисања бројевима, знацима, симболима,
- способност логичког мишљења,
- способност расуђивања, мишљења по одређеним структурама,
- способност обртања мисаоног процеса,
- гипкост мишљења, способност лаког напуштања једне операције и прелаз на другу, ослобађање од шаблона,
- способност памћења математичких чињеница и релација,
- сналажење у простору и способност просторног представљања“ (Krutecki, prema: Pinter i sar. 1996: 69).

У наставном процесу пред ученике треба постављати проблеме, како би били мисаоно активни и максимално користили набројане математичке способности како би се оне и даље развијале. Све улоге ученика у процесу учења математичких садржаја треба да буду усмерене на развијање математичког мишљења као најсложенијег задатка почетне наставе математике који треба остварити.

Улога учитеља у подстицању и развијању математичког мишљења је огромна. Од његове улоге зависе и улоге које ће ученици имати у почетној настави математике. Учитељ посебну пажњу треба да посвети оспособљавању ученика да:

- „размишљају о постављеном задатку,
- изналазе више решења,
- критички вреднују, како податке дате у задатку, тако и решења до ког су дошли,
- схвате суштину и значење сваког податка датог у задатку,
- образлажу поступак решавања задатка и добијено решење,
- идентификују и описују тешкоће на које наилазе приликом решавања неког математичког проблема,
- откривају нове везе међу подацима датим у задатку,
- задатке не решавају по строго утврђеним правилима и обрасцима,
- са учитељем и међусобно дискутују о начину решавања математичких проблема,
- размишљају о различитим начинима решавања задатка и да одаберу онај који је најбољи, најефикаснији и најрационалнији,
- да се прецизно изражавају и тако даље“ (Маричић и сар. 2017: 284–285).

Важно је да ученици у процесу учења математичких садржаја буду мисаоно активни. „Потребно је анимирати мисаону активност ученика од првог дана са циљем формирања и развијања менталних структура које се зову асимилаторске шеме“ (Вуковић, 2008: 70).

Можемо издвојити најважнију улогу коју ученици у наставном процесу имају, а то је да су активни субјекти у наставном процесу и процесу стицања математичких знања, који размишљају, процењују, расуђују, откривају, аргументују, закључују и сл.

За развој мишљења ученика у почетној настави математике посебно је важно да ученик у наставном процесу буде активан учесник, а не само неми посматрач који ће касније репродуковати запамћене чињенице. У математичком образовању је важно научити ученике да мисле, а то се једино може постићи ако су у наставном процесу мисаоно активни. „У самом процесу учења ученик мора бити активан конструктор знања, а никако пасиван прималац информација, закључака и слично“ (Маричић и сар. 2017: 248).

Улога ученика у наставном процесу је значајна за развијање његовог логичког мишљења. На основу проучене литературе која се бави улогама ученика у савременој школи и улогама које су усмерене на мисаону ангажованост ученика у наставном процесу (Pinter i sar. 1996; Вуковић, 2008; Маричић и сар. 2017), можемо издвојити карактеристике ученика које су од значаја за даље развијање логичког мишљења. То су:

- самосталност у раду и стицању нових сазнања,
- мисаона активност у току процеса решавања математичких проблема и задатака уопште,
- успешност у решавању задатака усмерених на подстицање и развијање логичког мишљења,

– мотивисаност и жеља за стицањем нових сазнања,
– стално трагање за новим и оригиналним решењима задатака,
– стална тежња да су мисаоно активни,
– коришћење различитих мисаоних поступака у решавању математичких проблема,
– решавање задатака на начин другачији од уобичајеног,
– склоност ученика ка уочавању узрочно-последичних веза и односа међу математичким појмовима, условима и подацима датим у задатку,
– критичност,
– склоност ка изналажењу више различитих решења истог задатка,
– отвореност и изношење идеја,
– постављање питања,
– радозналост и сл.

Раније смо помињали да је активност ученика важан фактор који итекако може допринети развијању њиховог логичког мишљења. Од тога какве су активности ученика зависи и које способности мишљења ће тим активностима бити подстицане и развијане. Ако желимо подстицати и развијати логичко мишљење ученика у почетној настави математике, морамо, пре свега, од ученика захтевати да: анализира, класификује, групише, упоређује, решава проблеме, уочава узрочно-последичне везе између елемената у задатку, изводи закључке, открива нешто ново у задатку уз „оштрину ума“, користи раније стечена знања и искуства, често и на нов начин и сл. Важна је мисаона активност ученика у том процесу и активан однос према садржајима, односно задацима које решава у почетној настави математике.

Какве ће улоге ученик имати у настави математике у многоме зависи од његове мотивисаности за учење уопште, па и за учење математичких садржаја. *Мотивисан* је „један опис који се користи за понашање које је управљено према сатисфакцији (задовољењу) неке потребе“ (Вуковић, 2008: 195). Посебно ваља указати на значај унутрашње мотивације за учење. Особа покренута унутрашњим мотивима учиће из задовољства и уживања у самој активности и оствареним циљевима. У којој мери ће ученици бити покренути унутрашњим мотивима, у многоме зависи и од саме личности ученика, али и од личности учитеља (да ли ће он успети да код ученика пробуди унутрашњу мотивацију за учење). Такође, на буђење унутрашње мотивације утицаће и начин презентовања математичких садржаја ученицима. Један од важних задатака учитеља је да математичке садржаје учини интересантним за ученике и на тај начин покрене њихове унутрашње мотиве и пробуди унутрашњу мотивацију за учење. Ако у томе успе, резултати неће изостати, јер ће ученици бити активнији и самосталнији у раду и жељи за успехом.

4.3.1. Улога ученика у процесу формирања математичких појмова која је усмерена на развијање логичког мишљења

У почетној настави математике посебно место припада формирању математичких појмова. Математички појмови су апстрактни и сам процес њиховог формирања је веома специфичан. Са друге стране, за стицање математичких знања и развијање математичког мишљења неопходни су математички појмови. Појам је „облик мишљења у којем се одражавају битна својства објекта који се проучавају“ (Kurnik, 2008: 322). „Појам је логичка категорија и преко њега се дотичу, односно делимично прожимају, логика и математика. У логици се под појмом подразумева мисао о суштини онога о чему сазнајемо. За математику овај исказ, као и било који други, имају само значај описног, а никако значај дефиниције“ (Пикула, Милинковић, 2015: 28). Сам термин *појам* није лако дефинисати и њиме се „најчешће одређује општа идеја, комплекс карактеристика везаних за неке објекте, резултат мишљења“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 175). „Математички појмови настају у дијалектичком јединству чулног искуства и мисаоних активности. Од многобројних својстава реалног света, добијених у процесу чулне спознаје, мисаоним операцијама одабирамо суштинска својства, карактеристична својства и задржавамо их у математичком појму“ (Радојевић, Радојевић, 1984: 14).

Из наведених дефиниција јасно се уочава да је *појам* продукт, резултат мишљења и да у његовом формирању учествује низ мисаоних операција. У том процесу се издвајају апстраховање, класификовање и идентификација, као и генерализација. Највећи проблем у процесу учења математике представља апстрактност и општост математичких појмова, али то својство математике је и њена предност (Вуковић, 2008: 39–40).

Сам процес формирања појмова, посебно математичких, је веома сложен. Пут формирања појма код детета је „уочавање одговарајућих реалних предмета – уочавање њихових заједничких карактеристика које у глави остављају некакав траг (ментална слика), који носи заједничко својство свих појединачних примера – именовање појма који се формира. У именовање треба укључити и симболичко записивање. Симбол ће служити да се о појмовима размишља и њима манипулише“ (Дејић, Егерић, 2003: 50).

Формирање математичких појмова „није једнократан чин, већ постепен, сложен и дуготрајан процес који започиње и пре него што се дете укључи у наставу математике“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 175). Појам представља „трокомпонентно јединство примера, језичког кода и менталне слике. Појам је мисаона творевина. Сазнање о појму уоште стиче се кроз примере“ (Пикула, Милинковић, 2015: 29).

Процес формирања појма одвија се на три нивоа. Први ниво карактерише посматрање и опажање конкретних објеката. У основи првог нивоа је чулно сазнање. На другом нивоу уочавају се заједничке одлике објеката у посматраном скупу, а на трећем се издвајају битна, општа својства таквих објеката. За почетну наставу математике посебно је значајан сазнајни процес о појму који се одвија кроз две фазе: чулно-искуствену и мисону. Посебно ћемо се зауставити на мисаоној фази. У мисаоној фази формирања појма чулно сазнање се обрађује кроз процес анализе, синтезе, апстракције, генерализације и других мисаоних поступака, с циљем да се апстрахују небитна својства појма, а генерализују битна, суштинска својства појма. На тај начин формира се ментална слика појма (Шпијуновић, Маричић, 2016: 175–176).

У процесу формирања математичких појмова полази се од посматрања конкретних објеката на примерима из непосредног окружења, који су блиски ученицима и примерени њиховом узрасту. На тај начин ученици посматрају конкретна својства и поступно се долази до менталне слике појма. Након тога следи увођење одговарајућих математичких термина и знакова.

У процесу формирања математичких појмова значајно место припада мисаоним поступцима, који се током процеса формирања појма међусобно допуњују и преплићу. У самом процесу формирања појма „није тешко препознати неколико значајних научних (мисаоних) поступака: *анализу, синтезу, апстраховање и поопштавање*. То значи да било који појмови, а међу њима и математички, након пажљиве *анализе* настају *апстраховањем* својстава предмета који стварно постоје у природи и *поопштавањем*. На тај начин математички појмови, иако *апстрактни појмови*, ипак одражавају неке стране стварног света и самим тим придоносе његовом спознавању“ (Kurnik, 2008: 322). Речено сведочи о присуству и међусобном допуњавању мисаоних поступака (анализе, синтезе, апстракције и генерализације) током формирања математичких појмова.

У процесу формирања појма „конкретни објекти, потребни за формирање новог појма, морају бити одабрани тако да омогућују поопштавање, издвајање битних својстава која творе садржај појма“ (Kurnik, 2000d: 12). У почетној настави математике пут формирања појма иде од посматрања примера, преко примера се долази до формирања менталне слике појма, да би се на крају дошло до именовања појма и увођења симбола. „Како је основни објекат математичког мишљења математички појам, циљ је да се он правилно формира код деце“ (Дејић, 2009: 447). „При формирању појмова уважава се хијерархија сложености и дедуктивности. Наиме, при увођењу новог појма, нужно је да се претходно потпуно усвоје сви у њему учествујући појмови“ (Вуковић, 2008: 46). Само правилним формирањем математичких појмова, ученици ће умети да оперишу тим појмовима, а то је предуслов математичког образовања и развијања математичког мишљења. Све наведено говори о значајној улози математичког мишљења у процесу формирања математичких појмова, о бројним мисаоним активностима ученика које су неопходне за формирање математичких појмова и обрнуто и о значају правилног формирања математичких појмова за подстицање и развијање математичког мишљења ученика, јер оно управо, оперише тим појмовима.

У поцесу формирања математичких појмова ученик мора активно учествовати, јер формирање математичких појмова подразумева високу мисаону ангажованост ученика. Ученик у самом процесу има улогу мисаоно активног субјекта. Улога ученика, као мисаоно активног субјекта, се огледа у следећим активностима:

- посматрање примера (конкрентних објеката) при чему долази до изражаја дечја радозналост,
- издвајање битних карактеристика посматраних објеката,
- занемаривање небитних карактеристика посматраних објеката,
- упоређивање и апстраховање,
- изграђивање менталне слике,
- усвајање знака, симбола.

Математичка апстракција је најважнија мисаона операција у процесу формирања математичких појмова (Радојевић, Радојевић, 1984: 14). „У наставном процесу ученик користи већ усвојене појмове за усвајање нових појмова, изучавање релација међу појмовима и примењује та знања за решавање различитих задатака и проблема“ (Пикула, Милинковић, 2015: 33). То говори о важности правилног формирања математичких појмова.

Као што се из реченог види, активности ученика током формирања математичких појмова су, пре свега, мисаоне активности којима се од посматраних примера, уз помоћ мисаоних операција апстракције и генерализације, долази до менталне слике, односно до формирања новог појма. То сведочи о огромном значају логичког мишљења или његових способности у процесу формирања математичких појмова.

Када се говори о процесу формирања појма, морамо нагласити значај његовог правилног формирања. Закључци се „састоје од судова, а судови од појмова. Без ваљано одређених и подељених појмова нема ни ваљаних судова и закључака. Зато је важно умети формирати појмове и објашњавати њихов опсег и садржај“ (Petrović, 1987: 134). Наведене речи јасно сведоче о веома важној улози логичког мишљења у процесу формирања математичких појмова. „Сваки математички појам формира се мисаоном процедуром апстраховања“ (Пикула, Милинковић, 2015: 29).

Улога мишљења у процесу формирања математичких појмова је велика. Стога можемо закључити да је улога ученика у процесу формирања математичких појмова активна. У самом процесу ученик мора бити стално мисаоно активан, при чему морају доминирати његове мисаоне операције апстраховања и генерализовања. Изградњи математичких појмова претходи чулно-искуствени ступањ који се састоји из осећаја, опажања и представе. Након чулно искуствених сазнања, низом мисаоних операција (анализа, синтеза, апстракција, идентификација и генерализација) се долази до изградње математичких појмова на првом ступњу апстракције (Радојевић, Радојевић, 1984: 16). Наведене улоге ученика најбоље сведоче о томе колика је и каква улога мишљења ученика у процесу формирања математичких појмова. „Математичким мишљењем изграђују се математички појмови, оперише математичким појмовима и откривају математичке релације и зависности међу математичким, али и нематематичким појмовима, то јест откривају се математичке истине (чињенице). Мислити значи оперисати појмовима јер се мишљењем сазнају релације међу математичким појмовима“ (Маричић и сар. 2017: 20). Са друге стране, морамо нагласити и да су правилно формирани математички појмови предуслов даљег математичког образовања и даљег развијања математичког мишљења, а да се они могу правилно формирати само ако су ученици у процесу њиховог формирања мисаоно активни. То говори о двосмерном утицају правилно формираних математичких појмова и математичког мишљења. Математичко мишљење се не може даље развијати без правилно формираних математичких појмова, и обрнуто, без активног математичког мишљења ученика нема ни правилног формирања математичких појмова.

5. ДОСАДАШЊА ИСТРАЖИВАЊА

Мислим да све што може бити објекат научног истраживања, чим сазри до формирања научне теорије, постаје достојним аксиоматског метода и, његовим посредством, математике.
Д. Хилберт

У разматрању неког феномена, важно је његово теоријско расветљавање, али исто толико и разматрање претходних истраживања проучаваног феномена, како би се претходна искуства узела у обзир и на њима створила добра теоријска основа и полазиште. Непроцењив значај претходних истраживања у стварању полазне основе је у томе што резултати претходних истраживања проучаваног феномена дају добре податке о томе докле се стигло у проучавању и истраживању посматраног феномена. Како се у раду бавимо логичким мишљењем ученика у почетној настави математике, у овом поглављу ћемо указати на значај истраживања у почетној настави математике, као и на досадашња истраживања логичког мишљења ученика. Покушаћемо разморити и докле се стигло у проучавању логичког мишљења, конкретно, у почетној настави математике.

Значај истраживања у почетној настави математике је велики. Резултати до којих се дође могу бити примењени у настави и утицати на њен квалитет. Подизање квалитета наставе је често и циљ истраживања у почетној настави математике. Полазећи од наведеног значаја истраживања у почетној настави математике, покушаћемо да, изучавањем и истраживањем логичког мишљења ученика у почетној настави математике, дамо допринос који ће бити примењив у пракси, конкретно у почетној настави математике, и који ће се огледати у квалитету подстицања и развијања логичког мишљења ученика.

5.1. Преглед стања у подручју истраживања логичког мишљења ученика

Проблемима везаним за расветљавање логичког мишљења ученика и његово подстицање, конкретно у почетној настави математике, бавио се мали број аутора. Већина тих аутора се бавила теоријским разматрањем логичког мишљења, као и способностима логичког расуђивања на старијим узрастима. У почетној настави математике нисмо наишли на рад који се бави истраживањем могућности подстицања и развијања, конкретно, логичког мишљења ученика млађег школског узраста. Стога смо става да логичко мишљење као феномен, конкретно, у почетној настави математике није довољно истражен, или је у односу на остале облике математичког мишљења мало, тј. недовољно истражен.

Свакако да смо проучавањем литературе наишли на истраживања која су нас навела на размишљање о могућностима подстицања и развијања логичког мишљења код млађих ученика.

Допринос у стварању теоријске основе, као и стварању основе за истраживање, дали су радови који се баве: проучавањем могућности подстицања логичког расуђивања (Larry E. Wood, 1980), вештинама логичког размишљања (Floyd E. Mattheis and Others, 1992), тестовима логичког размишљања (Kenneth Tobin, William Capie, 1981), као и радови Џ. Лерда (P. N. Johnson-Laird, 2009) и др. Настојаћемо да укажемо на значајне резултате поменутих аутора кроз кратак преглед њихових чланака и студија.

О могућностима подстицања и развијања логичког размишљања говори Лери Вуд (Larry E. Wood, 1980). У свом раду *„Интелигентни" програм за подучавање логичких вештина размишљања* аутор експерименталним путем потврђује да компјутерске игрице попут *Мастермајнд* подстичу и развијају и логичко размишљање. Он је детаљно разрадио програм који директно побољшава способност логичког расуђивања (Wood, 1980).

Резултати једне студије спроведене у Северној Каролини и Јапану, *Студија вештине логичког размишљања и интегрисан процес вештина ученика средње школе у Северној Каролини и Јапану* (1992), говоре о способностима размишљања. Приоритетан циљ америчког образовања је био да се помогне младим људима да науче да мисле. Развој способности размишљања обично представља научно мишљење и способност расуђивања. Стога, овом студијом аутори (Floyd E. Maltheis et al. 1992) су испитивали и упоређивали вештине логичког расуђивања и процеса научних вештина ученика средњих школа у Северној Каролини (Н = 3.291) и Јапану (Н = 4.397) по разредима и полу. Резултати су открили да су јапански ученици седмог, осмог и деветог разреда, постигли боље резултате него ученици у Северној Каролини у обе области вештина које су испитиване. Како се наведена разлика може приписати одређеној организацији наставе, која се састојала у подстицању логичког расуђивања различитим задацима, то наводи на размишљање да се одређеном организацијом наставе може утицати на подстицање мишљења ученика, што је и био један од главних циљева од којег се пошло у овој студији, *да ученици науче да мисле* (Maltheis et al. 1992). За потребе нашег истраживања овај рад је значајан, јер говори у прилог чињеници да се одређеном организацијом наставе може утицати на развијање мишљења ученика, па нас стога охрабрује у настојању да докажемо да се одговарајућом организацијом почетне наставе математике, њеним садржајима и адекватним одабиром математичких задатака, плански и систематски може утицати на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

Аутори Кенет Тобин (Kenneth Tobin) и Вилијам Капи (William Capie) у свом раду *Тест логичког размишљања* (1981) разматрају могућности добијања валидних и поузданих података о когнитивном развоју средњошколаца помоћу теста логичког размишљања. У раду је описан развој теста логичког мишљења (ТОЛТ) за мерење пет начина логичког размишљања: контролне варијабле, пропорционално расуђивање, комбинаторно размишљање, вероватноћа и корелационо резоновање. Од испитаника је захтевано да на сваку од 10 ставки дају одговор и оправдање (низ алтернатива). Узорак на којем је спроведено истраживање чинила су 682 ученика узраста од шестог разреда до колеџа. Тест је био поуздан и мерио формалну мисао (Tobin, Capie, 1981).

У свом раду *Логичко размишљање: Да ли се јавља у свакодневном животу? Може ли се учити?* П. Н. Џонсон-Лерд (P. N. Johnson-Laird, 2009) говори да постоји битна разлика између две врсте закључивања које се дешавају у свакодневном животу. С једне стране су имплицитни закључци, који се изводе без напора, брзо, и обично ван свесности. Они играју кључну улогу у схватању дискурса. У свом раду аутор често извештава о лошем извођењу таквих закључака. Аутор указује на неке експерименталне резултате који показују да су деца често сиромашна у прављењу таквих закључака. С друге стране су експлицитни закључци који се изграђују у одговору на питања и решавање проблема. Они могу бити истински дедуктивни, за разлику од имплицитних закључака који су обично прихватљиве претпоставке које се касније могу одбацити (Johnson-Laird, 2009).

Аутори Озлем Корај (Özlem Koray) и Мустафа Сердар Куксал (Mustafa Serdar Köksal) у свом раду *Утицај креативног и критичког мишљења заснованог на лабараторијским апликацијама на способност креативног и логичког размишљања будућих наставника* (Koray, Köksal, 2009) говоре о важности креативног и логичког размишљања и да људи морају да побољшају своју креативност и способност логичког размишљања како би их користили у данашњем технолошком развоју. Ове две способности су неопходне за стварање нових производа, као и да се пронађу ефикасна и продуктивна решења за потенцијалне проблеме који се стално јављају. Појединци који имају развијену креативност и способност логичког размишљања могу обезбедити бољи живот за њихово друштво (Koray, Köksal, 2009). Овде је истакнут значај логичког размишљања, који се не доводи у питање, али, истовремено, тај значај нас обавезује да се детаљније позабавимо могућностима подстицања логичког размишљања. Из огромног значаја произилази и потреба да логичко размишљање подстичемо од првих дана школовања.

Рад ауторке С. Грбић *Испитивање логичког мишљења адолесцената (I): Игра „Дебели и Мршави“* (1985) је први пут да се логичко мишљење адолесцената из Београда испитује нетестовним методама. Различитим задацима ауторка испитује постојање формалних операција. Испитан је хипотетичко-дедуктивни аспект формално-операционог мишљења и хипотетичко-дивергентно мишљење. Логичка игра „Дебели и Мршави“ је заснована на пропозиционалној логици (логици исказа). Предвиђена је за способније испитанике старости од 10 и више година. Ова игра ангажује способност проверавања истинитости исказа. На основу разговора са испитаницима, овом игром испитују се следеће менталне операције: негација, дисјункција, инкомпатибилност, еквиваленција и импликација. Ауторка је дошла до резултата да просечан број поена у њеном узорку испитаника старости од 17 до 19 година одговара успеху узорка испитаника старости од 12 година у раду Варда (Ward, британски психолог, аутор игре). Узорак истраживања који је решавао игру не показује да у довољној мери влада импликацијом, али је у целини овладао исказом који је показао изванредну развојну тенденцију (еквиваленција) (Grbić, 1985). За нас су од посебног значаја резултати њеног рада, јер нам указују на могућност вежбања логичких операција кроз игру *Мршави и Дебели* и код млађих ученика (10 година).

У раду *Испитивање логичког мишљења адолесцената (II): Метода Сахарова-Виготског*, С. Грбић (1986) анализира различите развојне нивое уопштавања (синкретички, комплексивни и појмовни), могућност интелектуалних операција на наведеним нивоима и њихов односа према другим методама. У раду је применила варијанту методе коју је описао Виготски. Испитаници су добијали 22 геометријске фигуре од дрвета које су се разликовале по боји, облику, висини и величини. Фигуре су подељене у четири групе и на једној страни фигуре (сваке од њих) исписано је њено име (ЛАГ, ФИК, МУР и СЕВ). На свим фигурама које припадају истој групи са доње стране се налази исто име. Испитаници су добили фигуре хаотично распоређене тако да се име налази са доње стране (не види) и упутство да разврстају фигуре у четири категорије. До решења се долази комбиновањем висине и величине, а да би испитаник открио правило по којем се фигуре сврставају у групе мора да опажа сва мерила по којима се фигуре разликују, поставља све хипотезе на основу опажених мерила, систематски проверава све комбинације и генерализује и експлицира правила груписања. Оцењивање показаних резултата вршено је према ономе што је записао Виготски, да постоје углавном три основна ступња у стварању појмова, заснована на одговарајућим врстама мишљења: синкрети, комплекси и појмови. Ауторка је овим истраживањем открила да је 24.27% субјеката показало ниво појмовне мисли, док је 75.73% субјеката манифестовало ниво комплексивног мишљења (Grbić, 1986: 153). Резултати до којих је дошла су у оквиру тврђења Виготског да прави појмови почињу да се развијају у периоду адолесценције (Grbić, 1986).

Мали број радова аутора са наших простора се бави сагледавањем могућности и начина подстицања логичког мишљења у почетној настави математике.

У свом раду *Развијање математичког закључивања у основној школи* (2002), Н. Петровић, полазећи од дефинисања математичког закључивања, посебно афирмише улогу аналогије у развијању математичког закључивања. Наведено, аутор је поткрепио приказом једног савременог истраживања. Такође, аутор је испитивао како рад у малим групама утиче на способности за математичко закључивање и закључио да такав рад има велике могућности када је у питању способност математичког закључивања. Позивајући се на истраживање Л. Инглиша (L. English, 1998) о аналогном размишљању, аутор истиче да су из одговора ученика идентификовани следећи недостаци, тј. оно што испитаницима недостаје:

а) „идеја да им један решени проблем може помоћи у решавању или постављању новог сличног проблема;

б) способност да идентификују одговарајући почетни проблем који би им помогао да реше нови, који следи;

в) свесност да им почетни проблем може помоћи чак и када циљни проблем садржи неке додатне идеје; и

г) знање како да искористе изворни проблем у постављању и решавању циљног проблема“ (Petrović, 2002: 44).

Аутор аналогно размишљање види као важну алатку у моделовању нових проблема на основу постојећих. Такође, аутор полази од става да је рад у малим групама један од облика рада који побољшава математичко закључивање ученика. На крају, у кратким цртама, аутор описује и улогу наставника у развијању математичког закључивања ученика (Petrović, 2002).

За стварање полазних теоријских оквира рада значајни су и радови аутора: Ц. Р. Галистола и Р. Гелмена (C. R. Gallistel, Rochel Gelman, 2005), Ж. Пијажеа (J. Piaget, 1994), Ј. Б. Вилсона (John Boyd Wilson,1963), Б. Инхедлера и Ж. Пијажеа (Bärbel Inhelder и Jean Piaget, 1972), Ј. Х. Холанда и сарадника (John H. Holland et al. 1989), Е. Греја и Д. Тала (E. Gray, D. Tall, 1991), Д. Тала (D. Tall, 1991), Д. Тала (D. Tall, 1995), В. Роадрангке (Vantipa Roadrangka, 1991), Т. Р. Дејвиса и С. Ј. Расела (T. R. Davies, S. J. Russell, 1987), Л. Д. Бала, С. Лубенског и Д. Миборна (L. D. Ball, S. Lubienski and D. Mewborn, 2001), Р. Дувала (R. Duval, 1999), као и радови других аутора.

Аутор Д. Тал (D. Tall, 1995) се у свом раду *Когнитивни раст у основном и напредном математичком размишљању* бави развојем математичког мишљења од елементарног почетка код мале деце до универзитетске математике и математичких истраживања. Аутор сматра да математички раст почиње од перцепције и деловања објеката у окружењу. Успешни „поступци“ на објектима користе флексибилне симболичке представе и концепте размишљања. Тако настала когнитивна структура у елементарном математичком мишљењу постаје напредно математичко размишљање када се концептне слике у когнитивној структури преобликују као дефиниције појмова и користе за конструисање формалних концепата који су део систематског тела заједничког математичког знања (Tall, 1995). Иако не говори директно о логичком мишљењу, рад је од значаја за тему нашег истраживања због чињенице да се прве логичко-математичке структуре јављају током првих дана школовања. Наведени узраст има значајну улогу у стварању основа у развоју математичког мишљења у циљу његовог даљег развијања.

У свом раду *Изградња групне процене логичког размишљања ГАЛТ*, Вантипа Роадрангка (Vantipa Roadrangka, 1991) разматра процену развојног расуђивања. Ауторка је, за потребе рада, конструисала групу за процену ваљаности логичког мишљења (ГАЛТ) која мери шест логичких операција и може се успешно користити у периоду разредне наставе. Ставке су биле конструисане као проблеми који су од ученика захтевали да изабере одговор и да наведе своје оправдање за тај одговор. Ауторка је испитивањем метријских карактеристика показала да је ГАЛТ био поуздан и адекватно мерио шест логичких операција, које су од користи наставницима јер могу боље разумети ниво интелектуалног развоја ученика (Roadrangka, 1991).

У раду *Логички приступ у разматрању аналогијом* Т. Дејвиса и С. Расела (T. R. Davies, S. J. Russell, 1987) разматрано је аналогијско закључивање и генерализација. Облик претпоставки које оправдавају аналогију представљен је шематски као „правило одређивања“, названо тако зато што изражава однос једног скупа варијабли које одређују вредности другог скупа. Одређивање односа је, према ауторима, логичка генерализација различитих типова односа зависности. Аутори разматрају услове под којима су тврдње извучене аналогијом истините. Пошли су од циља да се обезбеди поуздана стратегија која би омогућила извлачење закључака по аналогији само када је то потребно. Аутори дају методе за генерисање исправних генерализација и аналогних закључака, с обзиром на исправна правила одређивања и отварају нови проблем: *Како се правила за одређивање могу сама стећи?* Позивајући се на нека размишљања о проблему стицања правила одређивања (утврђивања) указују на четири основне методе:

1. Изузети правило одређивања од других познатих чињеница,
2. Извести правилно одређивања из инстанци (у суштини израчунати емпиријски степен одређивања),
3. Изузети правило одређивања из скупа специфичнијих правила,
4. Генерализаовати из скупа специфичнијих правила утврђивање (Davies, Russell, 1987).

Правила утврђивања олакшавају закључивање и ваљаност закључака до којих се аналогијом долази (Davies, Russell, 1987).

Аутор Р. Дувал (R. Duval, 1999) у раду *Репрезентација, визија и визуализација: когнитивне функције у математичком мишљењу. Основна питања учења* разматра визуализацију и закључује да се она, иако представља когнитивни модел у математици, не може користити као непосредна и очигледна подршка у разумевању. Аутор истиче важност употребе семантичког представљања математичког размишљања, јер нема других начина за добијање приступа математичким објектима. Репрезентација је важна и представља менталне ентитете: слике, нешто далеко. Аутор сматра да „ментално“ представља супротно од знакова који треба да буду само „материјални“ или „спољни“ знаци. Р. Дувал сматра да постоје две стране математичке активности. Прва је видљива, а друга скривена и њу чине мисаоне операције у математичким процесима (Duval, 1999).

У разматрању математичког мишљења пошли смо и од ставова Јури Лерона (Uri Leron) изнетих у делу *Порекло математичког мишљења* (2010). У раду су разматрана истраживања у више различитих дисциплина која се односе на порекло математичког мишљења. У раду је разматрано питање: *Да ли је математичко мишљење природно екстензија здравог разума или је то потпуно различита врста мишљења?* Аутор разликује три нивоа математике, сваки са својим специфичним механизмима мишљења. Прва је *Рудиментална математика* и односи се на способност разумевања и састоји се од једноставних операција сабирања, одузимања, множења, дељења, упоређивања. Друга је *Неформална математика* и односи се на употребу механизама које користимо у свакодневном сазнавању. И трећа је *Формална математика*, коју одликује низ апстракција и употреба формалног језика. Разматрајући наведене нивое математике, аутор на крају закључује да је „здрав разум“ оно што ум ради „природно“ и ту спада и коришћење рудименталне аритметике. Уз помоћ здравог разума, језика, социјалног сазнања, менталне маште, експеримената и сл. покренута је и неформална математика. Док прелазак на формалну математику представља често тешкоћу за ученике. Такође, истиче да то не значи да она не може бити урођена, јер људи после свега (мисли на вежбање) успевају и у неприродним пољима и истиче да „велика количина труда и вежби које треба да се употребе, садржи огромну количину мотивације од стране ученика, и тада се ослобађа невоља“ (Leron, 2010: 25). За потребе нашег рада је посебно значајан закључак, да се вежбањем могу развити разне способности мишљења.

Истраживање *Анализа логичког размишљања кандидата за наставнике математике: Случај Турске* (2013) аутора А. Туне (Abdulkadir Tuna), А. Ц. Бибера (Abdullah Çağrı Biber) и Л. Инцикапи (Lütfi İncikapı) испитује да ли је логички ниво размишљања кандидата за наставнике математике условљен разредом и врстом средњошколског образовања и пола. Студија је обухватила 99 кандидата. Подаци су прикупљени употребом групне процене логичког мишљења (ГАЛТ). Наведени инструмент је укључивао шест подскала: конверзацијско образложење, пропорционално размишљање, контролне варијабле, комбинационо расуђивање, вероватноћу и корелационо расуђивање. Кандидатима је постављан проблем који је био подржан сликовном презентацијом и тражио од њих да одаберу најбољи одговор (од 2 до 5 могућих одговора). Затим се од испитаника тражило да одаберу најбоље оправдање за изабрани одговор са листе од 2 до 5 могућих оправдања. Резултати су показали да је на логички ниво размишљања кандидата за наставнике математике значајно утицао разред и врста средње школе, а да пол кандидата није значајно утицао на ниво логичког размишљања (Tuna, Biber, İncikapı, 2013).

Налазимо још једно истраживање, које је у уској вези са темом нашег рада, а спровели су га О. Сади и Ј. Какироглу (Ö. Sadi, J. Çakıroğlu, 2015). Аутори су желели испитати да ли на научна достигнућа ученика и ставове према науци утичу логичко мишљење и пол. Тест логичког мишљења (ТОЛТ), скала ставова према науци и тест постигнућа (тема: органи чула) примењени су на 72 ученика шестог разреда основних школа (13 и 14 година) како би одредили логичке способности размишљања ученика, став према науци и постигнуће. Истраживање је спроведено у Анкари. Резултати нису открили статистички значајну разлику између испитаника мушког и женског пола у њиховим постигнућима и ставовима према науци. Такође, доказали су да је способност логичког размишљања имала значајан утицај на њихова постигнућа у науци, а да није било статистички значајног утицаја способности размишљања на став према науци (Sadi, Çakıroğlu, 2015).

У раду *Учење ученика о логичкој импликацији* (2002) аутора С. Хоилса (Celia Hoyles) и Д. Кучемана (Dietmar Küchemann) представљени су резултати истраживања о концептуалном доказивању. У истраживању се полази од значаја верификације и објашњења (образложења), посебно од улоге логичке импликације у верификацији. Испитаници су имали задатак да процене еквивалентност две тврдње о елементарној теорији бројева, једна логичка импликација и друга њена конверзација, да процене истинитост изјава и да оправдају њихово закључивање. Посебан фокус рада је истраживање следећа три питања:

1. Како ученици који се не уче о структуралном значењу логичке импликације одређују да ли је тврдња о логичкој импликацији истинита или не и да ли се њихови приступи мењају?
2. Да ли су ученици свесни опште примењивости и логичке нужности у тврдњи о логичкој импликацији ако су тврдња и антецедент истинити?
3. Како ученици концептуализују однос логичке импликације и обратно и да ли се ова концептуализација мења током времена? (Hoyles, Küchemann, 2002).

Испитаници у истраживању су били узраста од 13 година, а поновно испитивање је обављено након годину дана. Уочен је помак са индуктивног на дедуктивни приступ. Најизраженији напредак је био у препознавању логичке нужности закључака импликације када се претпоставило да је претходна тврдња била истинита. На крају, аутори представљају неке теоријске категорије како би обухватили различите типове значења које ученици приписују логичким импликацијама и образложење које подупире та значења. Те категорије разликују одговоре код којих је изјава о логичким импликацијама (или није) интерпретирана као еквивалентна његовој конверзацији, где су антецедент и консеквент међусобно замењени и оне код којих су закључци (или нису) под утицајем података (Hoyles, Küchemann, 2002).

Још један рад који је дао допринос стварању теоријске основе рада је *Зашто треба да предајемо логику и како да је научимо?* Ауторка М. Бако (Mária Bakó, n. d.) указује на чињеницу да је логика често изостављена из математике и да то има негативне ефекте на разумевање математике. Стога, у раду нуди скицу проблема и могућа решења. Она указује на чињеницу да ученици уче масу формула, а да често у сличним задацима не умеју да их примене, као и на то да ученици не могу лако решити било какав проблем непознатог типа, чак и када имају знања да га реше. Указујући на чињеницу да је Еуклидска геометрија логички систем, говори да су проблеми виднији у геометрији и да ученици стога имају лошије резултате у тој области. Ауторка је става да је постигнуће у геометрији без познавања базе логике безнадежно. Логика у настави обухвата подучавање везника, таблица истина и Венових дијаграма. М. Бако указује на потребу учења логике у настави на другачији начин: градити код ученика постојеће логичко размишљање и побољшати га решавањем адекватних вежби. Стога, у раду приказује вежбе које укључују логику, а затим истражује проблеме изазване занемаривањем наставе логике. Сумирањем свега што је потребно за подучавање логике показује како се може побољшати образовање компјутерским игрицама и загонеткама. Посебно истиче значај игара за ученике основне школе (од 6 до 10 година), указујући на следеће игре и загонетке: *Нонограм*, *Шерлок* (игра која се базира на слагалици познатој као *Ајнштајнова загонетка* или *Зебра слагалица*), *Сокобан*, *Миноловац*, *Игре стрпљења*, *слагалице* и сл. Упућује на *Мађарски абакус* - математички часопис који често садржи проблеме где неки људи увек говоре истину, а неки увек лаж, као и на *Смулијеву књигу* као најпознатију која садржи различите вежбе, међу којима су и загонетке о витезовима и сл. На крају М. Бако истиче да учење логичких концепата може помоћи у дубљем разумевању и учењу делова математике (Bakó, n. d.).

Осврт на важност и значај *Смулијеве књиге* различитих вежби (загонетки) даје и Л. Асзалос (Laszlo Aszalos) у делу *Аутоматизам решавања слагалица* (2002). Аутор показује како се загонетке могу решити помоћу аналитичких таблица истичући да је способност решавања заправо логика (Aszalos, 2002).

На стварање теоријске основе рада, посебно у делу који говори о логичким операцијама, велики утицај је извршила и књига К. Девлина (Keith Devlin) *Увод у математичко мишљење* (2012). У деловима ове књиге се разматрају логичке операције и указује на коришћење језика у математичким контекстима. Аутор даје дефиниције логичких операција и прецизно одређење појмова „и“, „или“ и „не“ у контексту математике (Devlin, 2012).

Аутори С. Брин (Sinead Breen) и А. Ошеи (Ann O'Shea) у раду *Математичко размишљање и дизајн задатака* (2010) полазе од чињенице да је математичко размишљање тешко дефинисати и да оно има следеће важне аспекте: претпоставка, закључивање и доказивање, усвајање, генерализација и специјализација. Аутори указују на основни недостатак, а то је да се у пракси математичким задацима често истичу вештине нижег реда (памћење и рутинска примена процедура). У свом раду истражују литературу која има за циљ да подстакне аспекте математичког размишљања на свим нивоима. Такође, полазе од појма математичког знања које користи Комисија за студије математичког учења америчког Нациналног савета у оквиру којег се наводи пет нити: концептуално разумевање, процедурална снага, стратешка компетенција (способност да формулише и решава математичке проблеме), адаптивно резоновање (способност за логично размишљање и оправдавање), продуктивна диспозиција (гледање математике као вредне и самопоуздање у сопствене способности). Истиче се да свих пет нити треба подстицати и развијати заједно (Breen, O'Shea, 2010).

Рад групе аутора (V. Lierde, J. Kalpakian, N. Jarid, 2013) под називом *Студенти, логичко размишљање и ефикасност наставе: Марокански случај* показује да настава у учионици помаже ученицима да развију вештине математичког размишљања. Истраживање је спроведено у северноафричком контексту, где се ученици често суочавају са изазовом размишљања, учења и разговора на различитим језицима. Образовна позадина студената је била разноврсна. Рад, такође, укључује и преглед литературе коју су студенти добили пре и после семестра учења математике. У свом раду аутори су желели да сазнају и упореде факторе као што су задржавање и памћење у односу на учење и ефикасност наставе. У томе се позивају на О’Брајанов (Thomas C. O’Brien) образац - приступ из 1973. године који нуди неколико предности: он оцењује ефикасност инструкције, а не претходну припрему студената; његов приступ омогућава тестирање вештина које би ученици требало да понесу са собом из учионице математике до краја живота; метода је практична и лакше се примењује од алтернатива о којма су аутори говорили. За потребе рада, аутори су допунили О’Брајанов приступ, тако што су га обогатили демографским варијаблама, а обративши пажњу на језичку разноликост у Мароку, додали су и језичке варијабле. Испитивање је извршено тако што су студенти решавали тест на почетку и на крају семестра. Име ученика је на тесту било замењено словним кодом како би тестирање било анонимно, а истовремено омогућило упоређивање првог и другог теста. Тест се састојао из два дела: (1) демографске и језичке и (2) логичке процене. Првим делом су прикупљени подаци о социјалној позадини, старости, полу, језику који говоре и који користе у разреду (учењу), образовном нивоу оца и сл. Други део теста се односио на логичку процену (48 питања). Испитивање је спроведено 2008. године. Узорак је обухватио 24 студента курса Дискретна математика. Циљ тог курса је да студентима да темељ за развој напредних математичких концепата који су корисни за рачунар, науку и рачунарски инжињеринг. Курс нема предуслове. Резултати до којих су дошли су следећи, а наводимо их само укратко:

- посета часова је побољшала укупне резултате;
- примећено је побољшање у доследној употреби математичке логике;
- старост није значајан фактор у постигнућу студената;
- и мушкарци и жене су побољшали своје учење (нема разлика с обзиром на пол);
- што се тиче језика који говоре код куће, искључиво је регистровано побољшање у раду;
- што се тиче језика који користе за размишљање о математици и ту је, без обзира на језик, регистровано побољшање;
- постоји потреба за даље истраживање о томе како богатство и класа утичу на проучавање математике (Lierde, Kalpakian, El Jarid, 2013).

Закључак рада је и да ученици користе различите обрасце логике и да даља истраживања у тумачењу логике могу помоћи у побољшању наставе логике. Рад показује и да настава математике води до резултата у неким облицима и обрасцима закључивања (Lierde, Kalpakian, El Jarid, 2013).

У раду *Логичко и математичко размишљање са дидактичке тачке гледишта - теоријски приступ моделу* В. Дуранд Жериер (Viviane Durand-Guerrier, n. d.) показује, различитим примерима, релевантност предиката за дидактичку анализу математичког расуђивања и доказа. Посебно разматра модел који је увео Тарски. Ауторка полази од чињенице да се већина ученика и студената суочава са тешкоћама у резоновању у математици. За то, како она наводи, постоје бар три разлога:

1. У Француској се логичке способности развијају углавном кроз геометрију, за ученике од 13 до 15 година;
2. Учитељи, најчешће, као и математичари, нису експлицитни у квантификацији, посебно у вези са условним изјавама;
3. Што наставници математике уводе логички језик за формализацију математичких изјава као што се то чини на постдипломским студијама, и сматрају да је довољно дати неколико правила која подразумевају исправну употребу симболичких формула (Durand-Guerrier, n. d.).

На крају, ауторка истиче да теоријски модел који је развио Тарски нуди општи оквир за анализу математичких доказа или резоновања и наводи потребу разматрања са три аспекта: синтаксички (лингвистички облик П), семантички (математички објекти са којима радимо), прагматични (ситуација и сазнање о субјекту у математичком пољу) (Durand-Guerrier, n. d.).

У свом раду *Студија концептуалних, процедуралних знања, логичког мишљења и креативност током прве три године терцијарне математике* (2016) Г. А. Туларам и К. Хулсман (G. A. Tularam, K. Hulsman) своју студију фокусирају на студенте у првим годинама студијских програма из области заштите животне средине, где је нагласак на математици много мањи него у строгој науци или математици. Аутори желе да стекну увид зашто многи студенти не успевају у математичким курсевима, чак и када, математички гледано, захтеви нису тако строги. То су истраживали испитивањем концептуалних начина размишљања и стратегија учења. Испитивани су и проучавани: знање студената засновано на терминима, процедурални рад, математичке вештине, стратегије и дубина концептуалног знања, као и вештине вишег реда. Логичке и креативне компетенције су процењиване у смислу планирања, организације и повезивања, тј. како и који аспект знања је ученик изабрао и повезао да би олакшао коришћење и примену знања. Резултати су показали просечне процедуралне и концептуалне компетенције, али низак ниво логичке и креативне компетенције. Недостатак структура планирања, припреме и организације је забрињавајући јер студенти нису показали дубље нивое разумевања научених тема. То говори у прилог чињеници да меморисање правила и формула представља једноставно запамћивање, а не схватање у смислу концептуалних веза или дубљих значења, тј. нема повезаних структура у бази знања. Аутори се позивају на низ истраживања којима је показано да:

- студенти покушавају да запамте правила, али не знају која правила када и где треба да примене;
- студенти тешко схватају основне разлоге због којих неки поступци функционишу и не могу да изаберу процедуре које могу бити прикладније за дату ситуацију;
- студентима недостају структуре вишег реда и критичко мишљење;
- студентима недостаје логичан ток размишљања или креативности;
- студенти често доживљавају „шок апстракције“, због формалније природе математике представљене на универзитетима од оне коју су учили у средњој школи;
- неки студенти нису достигли ниво апстракција неопходних да одговоре захтевима и нивоима разумевања универзитетске математике, и сл. (Tularam, Hulsman, 2016).

Полазећи од свега наведеног, аутори су желели испитати знања студената на нивоу универзитетске математике (процедурални, концептуални, логички и креативни аспект математике). Студија је упоредила математичко знање и резоновање у време средњег семестра. У истраживању су коришћене листе учења и ревизије. Извршена је критичка провера писаних радова студената која је послужила за откривање природе њихове базе знања из математике. Аутори су стицали увид у природу знања студената анализом низа узоркованих тема. Стога, њихово истраживање указује на чињеницу да се ниво компетентности у математици може оцењивати детаљним испитивањем текста, одговора и писаног рада који је настао када је дат задатак решавања проблема. Рад студената је анализиран у смислу да ли показује образлагање учења, релевантност у стварном свету, примену и/или дубоко и флексибилно разумевање, креативност и размишљање вишег реда. Како је у истраживању коришћена фокус листа, студенти су на почетку семестра добили задатак да на недељном нивоу израђују листу за своје учење на курсу математике. На тај начин аутори су имали прилику да:

- испитају природу знања студената и њихове вештине критичког мишљења вишег реда,
- испитају природу недостатака у бази знања студената;
- испитају квалитет мишљења у раду представљеном у фокус листама и
- све то оцене у смислу логичког развоја и креативности (Tularam, Hulsman, 2016).

Овде ћемо изнети и радне дефиниције које у свом раду користе аутори студије за анализу фокуса студената:

- Процедурална компетентност се односи на способност студената да покаже кораке који су предузети у циљу решавања проблема. Постоје јасни докази о поступцима који се сматрају „корак по корак“ за решавање проблема;
- Концептуална компетенција се односи на дубину знања теме која је евидентна у раду студената, рад са односима између кључних идеја које се добро разумеју. Ученици су показали добро разумевање опште идеје унутар теме и односе садржаја између специфичних подтема унутар области;
- Логичка компетенција се односи на начин на који су информације о садржају и теми биле повезане или једна са другом, као и да ли су кораци у листама логични у редоследу презентације;
- Креативност се односи на нове начине на који је листа организована, планирана и развијена, алтернативне начине на које је ученик представио релевантне информације као што је конкретно приказивање веза између начина разматрања и проблема, повезивање концептуалног разумевања са релевантним корацима у примерима, ситуацијама, или поред логичких корака, коришћење графика за илустрацију односа и сл. (Tularam, Hulsman, 2016: 12).

Анализом резултата овог истраживања аутори су дошли до следећих закључка:

– Укупни резултати анализе показали су да студенти из узорка нису показали потребан ниво компетентности у процедуралном и концептуалном разумевању неких основних тема као што су линеарне функције, квадратне функције и границе;
– Посматране логичке и креативне компетенције студената биле су релативно ниске за математику на универзитетском нивоу;
– Вештине размишљања, планирања, организације, повезивања и трансфера знања биле су мање изражене у њиховим листама. То омета усвајање виших апстрактних појмова који су предуслов напредних математичких курсева;
– Резултати су указали на неке разлоге због којих мало студената наставља проучавати математику (Tularam, Hulsman, 2016: 12).

У раду *Утицај диференцираних математичких задатака на логичко-комбинаторно мишљење ученика у почетној настави математике* аутори (Rakić, Lazić, Marić, 2021) применом експерименталне методе испитују утицај диференцираних задатака на развој логичко-комбинаторних мисаоних способности ученика првог разреда. Полазећи од све већег значаја математичког мишљења као једног од значајних циљева савремене наставе математике, аутори истичу значај стицања функционалних математичких знања и вештина, као и значај оптималног развоја когнитивних способности чији развој школа мора да обезбеди. Сагледавајући различите дефиниције логичко-комбинаторног мишљења, аутори истичу да ову врсту мишљења треба развијати током читавог образовања и у истраживању полазе од проблема: *Како почетна настава математике утиче на развој логичко-комбинаторног мишљења ученика?* Полазећи од наведеног проблема истраживања, предмет истраживања су усмерили на диференциране математичке проблеме, са циљем утврђивања њихове улоге и значаја у развоју логичко-комбинаторног мишљења ученика првог разреда, које ови ученици показују кроз успешност на такмичењу *Мислиша*. Експериментална група ученика припремана је за поменуто такмичење применом диференцираних задатака. Поред примене поменутих задатака, у раду са ученицима Е групе су коришћене посебне збирке припремних задатака за такмичења. У настојању да испитају да ли примена диференцираних задатака остварује позитивне ефекте на развој логичко-комбинаторног мишљења ученика и њихових способности да самостално решавају математичке задатке, аутори су, резултатима до којих су дошли, показали да припрема ученика решавањем диференцираних математичких задатака може значајно утицати на развој логичко-комбинаторног мишљења ученика у основном математичком образовању. Закључци до којих су дошли су у оквирима теоријских претпоставки од којих су аутори пошли и указују на значај овакве припреме ученика за развој логичко-комбинаторног мишљења и функционалног знања (Rakić, Lazić, Marić, 2021: 86). Резултати до којих су дошли су значајни за тему нашег рада јер говоре у прилог чињеници да се адекватном организацијом и избором одговарајућих математичких задатака може утицати на развој способности логичког мишљења.

Сагледавањем досадашњих истраживања и радова у сфери развијања логичког мишљења ученика, закључујемо да се већина досадашњих радова зауставља на теоријском разматрању логичког мишљења, а да је мали број оних истраживања која се баве начинима подстицања и развијања логичког мишљења ученика у наставном процесу. Стање је још лошије у подручју почетне наставе математике. Радови до којих смо дошли, углавном, се баве логичким мишљењем код ученика старијих разреда и ученика средње школе или чак студената. Мали број истраживања о могућностима и начинима развијања логичког мишљења у основној школи, а посебно у почетној настави математике указао је на потребу свеобухватнијег сагледавања овог проблема (теме).

Анализа наведених истраживања нас наводи на закључак да се одговарајућом организацијом почетне наставе математике и одговарајућим математичким задацима може подстицати и развијати математичко мишљење ученика, а тиме и логичко мишљење као компонента математичког. То је и један од задатака који учитељи морају поставити на путу остваривања циља учења предмета *математика*. Могућностима и начинима остваривања тог задатка се мало, или нимало, посвећивала пажња у досадашњим истраживањима која се односе на почетну наставу математике. Наведена истраживања указују на могућност и значај развоја логичког мишљења и подстакла су нас на бављење тим проблемима.

На основу анализе досадашњих истраживања јасна је потреба усмерености истраживања на два кључна питања развоја логичког мишљења:

1) Да ли се логичко мишљење у почетној настави математике може подстицати и развијати одређеним садржајима, тј. одговарајућим математичким задацима (системом вежбања) и

2) Који су то фактори који утичу на подстицање/спутавање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

5.2. Веза рада са досадашњим истраживањима

Последњих година, када се говори о савременој школи, развијање мишљења ученика постаје један од водећих задатака наставе. Школа треба да ствара свестране и креативне личности, личности спремне да се сналазе у бројним животним проблемима, да самостално долазе до нових знања и решења проблема. Све више се инсистира на развијању мишљења ученика, али је јако мало истраживања која директно указују како се развија и унапређује логичко мишљење ученика. Нема истраживања која би дала разрађен и потврђен начин и пут за подстицање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Полазећи од циља предмета математика, учитељ у наставном процесу мора развијати математичко мишљење ученика, а то може постићи само ако подстиче и развија све његове компоненте: стваралачко, критичко, логичко и апстрактно мишљење. Остаје отворено питање: На који начин то чинити у пракси? Све више се захтева да настава мисаоно ангажује ученика, да он у процесу учења самостално долази до сазнања, јер су тако стицана знања трајнија и ефикаснија (примењивија), а такође, таквом наставом се даље развија његово мишљење. Сходно захтевима савремене школе, у раду се указује на различите типове математичких задатака којима се може подстицати, развијати и унапређивати логичко мишљење ученика. Полазећи од наведеног и ослањајући се на постојећа истраживања логичког мишљења, чији је преглед дат, која се углавном односе на поједине сегменте логичког мишљења, постављен је теоријски оквир и створено полазиште истраживања, извршена операционализација логичког мишљења која уважава узрасне карактеристике ученика и специфичности математичких садржаја.

II МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Када говоримо о настави математике у основној школи, један од важних задатака наставе математике јесте развијање мишљења ученика и то подстицање и развијање стваралачког, критичког, логичког и апстрактног мишљења, што смо више пута у раду истицали. У времену брзих промена и научно-технолошког развоја, важност подстицања и развијања наведених компоненти математичког мишљења је разумљива. У данашњој школи ученике треба оспособити да се сналазе у новим ситуацијама, да самостално издвајају битне чињенице, организују информације, проналазе одговарајућа решења проблема, проверавају решења, образлажу своја решења и слично. Како је логичко мишљење у почетној настави математике теоријски мало расветљено питање, а детаљних истраживања о начинима на које се може подстицати и развијати, конкретно, у почетној настави математике готово да и нема, намеће се потреба његовог свеобухватнијег расветљавања и истраживања могућности његовог подстицања. Стога смо се определили за бављење проблемом: ***Почетна настава математике и развијање логичког мишљења ученика***. Желели смо, пре свега, теоријски расветлити појам логичког мишљења у почетној настави математике, извршити операционализацију појма логичког мишљења, која ће уважавати узраст и специфичне развојне карактеристике ученика млађег школског узраста, као и специфичности и природу математичких садржаја. Даље смо желели размотрити могућности његовог подстицања и развијања у почетној настави математике.

Проблем истраживања су могућности подстицања и развијања логичког мишљења у почетној настави математике.

Проблем истраживања је значајан из више разлога. Ти разлози су утицали на избор проблема.

Почетна настава математике представља наставни процес у којем се образовање и васпитање остварују помоћу математичких садржаја у прва четири разреда основне школе. Овде се мора имати на уму чињеница да су ти садржаји по својој природи апстрактни.

Логичко мишљење је компонента математичког мишљења и представља сложене интелектуалне активности у којима долазе до изражаја различите способности. Сложеност и комплексност логичког мишљења указује на чињеницу да је процес његовог подстицања и развијања исто тако сложен, али у исто време одговоран и важан задатак савремене школе. Како школа жели стварати свестране личности, неопходно је подстицање логичког мишљења ученика. Са остваривањем тог задатка наставе треба почети од првих дана школовања. Почетна настава математике представља темељ даљег математичког образовања ученика. Од образовања се све више очекује да развија способности мишљења, а све мање стицање велике количине чињеница, информација које без развоја способности мишљења, готово да нису употребљиве.

Предмет истраживања је експериментална провера улоге и ефеката примене одређених математичких задатака на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Поред тога, предмет истраживања је и испитивање мишљења ученика о експерименталном програму и испитивање ставова учитеља о могућностима подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Највише пажње треба посветити развијању математичког мишљења, а то, управо, значи - посветити довољно пажње развијању сваке компоненте математичког мишљења: апстрактног, логичког, критичког и стваралачког мишљења. Стога, за нас је истраживање са становишта методике почетне наставе математике веома значајно. Са друге стране, задаци који се нађу у експерименталном програму могу послужити као модел за позитивно деловање на развијање и побољшање логичког мишљења ученика.

Научни значај истраживања је у томе да се на егзактан начин, заснован на одређеној методологији, проучава феномен развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Истраживањем се уважавају узраст и развојне карактеристике ученика млађих разреда, али и природа математичких садржаја. Уз уважавање наведених специфичности долази се до нових сазнања о могућностима развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Сматрамо да ће резултати добијени истраживањем додатно расветлити проблеме и недостатке развијања логичког мишљења, открити нове могућности почетне наставе математике, као и начине развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Такође, надамо се да ће истраживање дати и оригиналан допринос методичкој теорији и пракси у области почетне наставе математике.

Истраживање има и *педагошки значај*. Развој логичког мишљења ученика један је од важних задатака почетне наставе математике, па, сходно томе, тај задатак треба остваривати свим облицима образовно-васпитног рада. Све ће то допринети подизању квалитета наставе на један виши ниво. То ће омогућити и унапређење наставе математике у млађим разредима. У раду је појам логичког мишљења операционализован издвајањем конкретних способности које су прилагођене узрасту ученика. За сваку способност дати су конкретни примери математичких задатака којима се може утицати на њено развијање. Уколико се истраживањем докаже да такви задаци повољно утичу на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, то ће имати огроман педагошки значај, па и практични значај.

Практични разлози истраживања проистичу из чињенице да се резултати до којих се дође истраживањем могу користити у припремању и реализацији наставе математике тако да она буде усмерена на развијање логичког мишљења. То подразумева инкорпорирање одређених математичких задатака у наставни процес. Наведени примери математичких задатака (који ће бити коришћени у експерименталном програму и за које се потврди да су дали резултате на пољу развијања логичког мишљења) биће од помоћи свима који у наставном процесу желе да развијају логичко мишљење својих ученика.

Друштвени значај произилази из чињенице да је развијање мишљење ученика, а тиме и логичког мишљења, важан задатак не само наставе математике, него и целокупног образовања у савременој школи. Желимо образовати и васпитати свестрану личност која ће моћи да прати савремене токове науке и развоја и која ће моћи самостално да се сналази у бројним проблемима које свакодневно намеће живот. Ми, управо, желимо развијати личност која ће знати да мисли, која ће стално трагати за новим сазнањима и могућностима, која ће бити отворена за нова сазнања, а то ћемо успети ако научимо ученике да мисле, научимо их да сами уче и примењују стечена знања у новим ситуацијама. У остваривању тог циља, развијање математичког мишљења, а самим тим и логичког мишљења ученика, има све већи значај.

Сматрамо да ћемо овим радом успети да дамо одговоре на бројна питања која постоје у области развијања логичког мишљења ученика, као и да потврдимо уверење да се у почетној настави математике у великој мери може утицати на развијање логичког мишљења ученика.

Другим речима, истраживањем ћемо покушати да дамо конкретне одговоре на нека важна питања у вези са развијањем логичког мишљења ученика:

- Да ли се у почетној настави математике на логичко мишљење ученика може утицати и да ли се оно може развијати?

- На који начин је у почетној настави математике могуће утицати на развијање и побољшање логичког мишљења ученика?

- Који су то фактори који у настави подстицајно делују на развијање и побољшање логичког мишљења ученика?

- Који су то негативни фактори који ометају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика?

- Који конкретни математички задаци доприносе подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике?

Детаљне одговоре на наведена питања даћемо у закључним разматрањима, након анализе резултата истраживања.

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА

Циљ овог истраживања је експериментална провера утицаја одговарајућих математичких задатака (експерименталног фактора) на развој логичког мишљења ученика млађег школског узраста.

Истраживањем желимо да моделујемо експериментални програм и утврдимо његов утицај на развијање и побољшање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Из постављеног циља истраживања произилази више задатака.

Задаци истраживања су:

1. *Утврдити утицај експерименталног програма, одговарајућих математичких задатака, на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.*
   - 1.1. Утврдити да ли постоји разлика у развијености логичког мишљења ученика експерименталне и контролне групе под утицајем експерименталног програма.
   - 1.2. Утврдити повезаност између општег успеха ученика и напредовања у развијању логичког мишљења под утицајем експерименталног програма.
   - 1.3. Утврдити повезаност развијања логичког мишљења и оцене коју ученик има из математике под утицајем експерименталног програма.
   - 1.4. Утврдити да ли постоје разлике у развијености логичког мишљења у односу на пол ученика под утицајем експерименталног програма.
   - 1.5. Утврдити повезаност између образовног статуса родитеља ученика (експерименталне групе) и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма.

2. *Испитати мишљења ученика о експерименталном програму и изазивању интересовања ученика за учење математике.*
   - 2.1. Испитати заинтересованост ученика за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења.
   - 2.2. Испитати које су то, према мишљењима ученика, добре стране примене задатака који утичу на подстицање логичког мишљења у настави математике.
   - 2.3. Испитати заинтересованост ученика за учење математике након часова на којима су решавани задаци који утичу на развијање логичког мишљења.
3. *Испитати мишљења учитеља о утицају почетне наставе математике на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.*
   - 3.1. Испитати мишљења учитеља о погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика.
   - 3.2. Испитати колико често и када учитељи најчешће примењују задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика и тиме подстичу логичко мишљење (у ком делу часа и на ком типу часа).
   - 3.3. Испитати у којој мери, према мишљењу учитеља, почетна настава математике утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.
   - 3.4. Испитати која врста математичког образовања је, према мишљењима учитеља, најпогоднија за подстицање и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда.
   - 3.5. Утврдити факторе који, према мишљењима учитеља, позитивно и факторе који негативно делују у процесу подстицања логичког мишљења ученика у почетној настави математике.
   - 3.6. Утврдити мишљења учитеља о заступљености различитих типова задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Сврха овог истраживања је у настојању за чешће коришћење одређених математичких задатака за које се утврди да могу позитивно деловати на развој логичког мишљења ученика у почетној настави математике, што представља један од важних задатака наставе математике. Између осталог, тиме ће се постизати и други важни ефекти, као што су: самосталност ученика у раду, мотивисаност, развој мишљења (заступљени су сви облици мисаоне активности), стечена знања су трајнија, већа је примењивост стечених знања и сл.

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

На основу циља истраживања поставили смо следећу полазну (нулту) хипотезу: *Одговарајућа организација почетне наставе математике у великој мери утиче на развој логичког мишљења ученика.*

Из оквира опште хипотезе и постављених задатака поставили смо следеће посебне хипотезе:

1. *Претпоставља се да решавање одређених математичких задатака (експериментални програм) у великој мери доприноси развијању логичког мишљења ученика.*

   1.1. Постоји статистички значајна разлика у развијености логичког мишљења ученика експерименталне и ученика контролне групе под утицајем експерименталног програма (одређених математичких задатака који утичу на развијање логичког мишљења).

   1.2. Код ученика са одличним и врлодобрим успехом, под утицајем експерименталног програма, долази до статистички значајног напредовања у развијености логичког мишљења.

   1.3. Претпоставља се да не постоји повезаност између оцене из математике и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма.

   1.4. Не постоји повезаност између пола ученика и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма.

   1.5. Степен стручне спреме родитеља нема утицаја на развијеност логичког мишљења ученика експерименталне групе.

2. *Претпоставља се да одговарајућа организација наставе математике у великој мери изазива интересовање ученика за учење математике.*

   2.1. Ученици су заинтересовани за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења.

   2.2. Примена задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, према мишљењима ученика, има низ предности.

   2.3. Интересовање за учење математике је знатно веће код ученика експерименталне групе након спровођења експерименталног програма.

3. *Претпоставља се да учитељи сматрају да почетна настава математике у великој мери утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика*.

   3.1. Учитељи сматрају да уџбеник математике погодује развијању логичког мишљења ученика.

   3.2. Учитељи, према сопственим мишљењима, често примењују задатаке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

   3.3. Почетна настава математике, њена организација, према мишљењима учитеља, у значајној мери утиче на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

   3.4. Додатна настава математике је, према мишљењима учитеља, најпогоднија за примену задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика.

   3.5. Могуће је идентификовати факторе који, према мишљењима учитеља, могу допринети утицају почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика, као и факторе који ометају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика.

   3.6. Претпоставља се да су задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у довољној мери заступљени у почетној настави математике.

4. ВАРИЈАБЛЕ ИСТРАЖИВАЊА

За потребе овог рада издвојили смо следеће варијабле:

Зависне варијабле истраживања су:

- развијеност логичког мишљења ученика изражена кроз резултате на иницијалном и финалном мерењу;
- мишљења ученика о примени експерименталног програма (о задацима којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења);
- мишљења и ставови учитеља о могућностима деловања и утицају почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика.

Независне варијабле су:

а) Експериментални програм – иновативни модел рада (посебно креирани задаци усмерени на развој различитих способности логичког мишљења).

б) Независне варијабле – обележја ученика:

- општи успех ученика постигнут за крај претходног разреда,

- оцена из математике постигнута на крају претходног разреда,

- пол ученика,

- стручна спрема родитеља.

в) Независне варијабле – обележја учитеља: место рада (село – град), разред, радни стаж.

5. ДЕФИНИСАЊЕ ОСНОВНИХ ПОЈМОВА ИСТРАЖИВАЊА

Основни појмови су: *почетна настава математике* и *логичко мишљење ученика*.

Почетна настава математике – Под почетном наставом математике подразумева се настава математике која се реализује у основној школи од првог до четвртог разреда.

У раду се појму *логичко мишљење* ученика у почетној настави математике прилази као сложеном феномену који је на основу постојећих одређења, уважавања узраста ученика и њихових развојних карактеристика, као и специфичности математичких садржаја, разложен на компоненте: логичке операције, мисаоне поступке и способности закључивања.

Логичко мишљење – представља сложен интелектуални процес. Обухвата способности ученика да: „користи и разуме значење *логичких операција* (конјункција, дисјункција, негација, импликација, еквиваленција), *мисаоних поступака* (анализа, синтеза, конкретизација, апстракција, генерализација, идентификација, специјализација и друге) и *облике закључивања* (интуиција, аналогија, индукција, дедукција)" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 440).

Наведене компоненте логичког мишљења су, за потребе рада, даље одређене преко различитих способности о којима је у посебном поглављу било речи. За потребе истраживања смо издвојили четири способности логичког мишљења које смо мерили, пратили и подстицали током реализације експерименталног програма. То су: „способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не) у почетној настави математике, способност уочавања узрочно-последичних веза и закључивање на основу уочених веза, способност откривања законитости и правила и закључивање на основу правила, способност уочавања удаљених (скривених) елемената у задатку (оштроумност)“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 327).

6. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

6.1. Методе истраживања

Основна метода коришћена у истраживању је метода педагошког експеримента са паралелним групама. Од помоћних метода, коришћене су: моделовање, метода теоријске анализе и дескриптивна метода.

Педагошки експеримент са паралелним групама је коришћен за упоређивање ефеката експеримантaлног програма и класично организоване наставе. Поменути експеримент смо користили да бисмо утврдили утицај експерименталног програма, односно одговарајућих математичких задатака тако формулисаних да делују на издвојене способности логичког мишљења, које смо за потребе рада издвојили. За потребе истраживања смо образовали две групе испитаника: експерименталну (119 ученика) и контролну групу (119 ученика). Групе су приближно уједначене у погледу претходних знања (успеха на крају претходног разреда), оцене из математике, пола, образовног статуса родитеља и у погледу нивоа развијености логичког мишљења у математици. Овом методом желели смо испитати колико експериментални програм (посебно креирани задаци) утиче на развијање и побољшање логичког мишљења ученика.

Експериментом са паралелним групама смо желели испитати утицај експерименталног програма на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, а с циљем испитивања улоге почетне наставе математике у развијању логичког мишљења ученика. Експериментални програм, који смо моделовали за потребе истраживања, чиниле су вежбе у оквиру којих су ученици решавали задатке којима је циљ развијање издвојених способности логичког мишљења. За сваку од четири способности логичког мишљења које смо за потребе рада издвојили, реализован је једнак број вежби (укупно 32 вежбе). Вежбе су реализоване са ученицима експерименталне групе. Ученици контролне групе су радили на уобичајен начин са својим учитељицама. Све вежбе у експерименталној групи ученика је реализовао експериментатор у сарадњи са учитељицама. Важно је напоменути да вежбе чији смо преглед дали у прилогу (Прилог 4) не представљају сценарије за реализацију часова, већ само задатке за које претпостављамо да позитивно утичу на подстицање и развијање издвојених способности логичког мишљења и које је експериментатор реализовао у једном делу часа.

Дескриптивна метода је примењена за прибављање информација о ученицима и учитељима. Такође, поменуту методу смо користили и код обраде података, при интерпретацији података и извођењу закључака.

Метода теоријске анализе је коришћена при проучавању литературе која се бави сличном проблематиком и стварања теоријске основе рада.

6.2. Технике и инструменти истраживања

У истраживању смо користили следеће технике:

- тестирање,
- анализирање педагошке документације у циљу прибављања података,
- анкетирање,
- скалирање.

Инструменти коришћени у истраживању су:

- тест (иницијални и финални),
- евиденциони лист,
- анкета за ученике,
- анкета за учитеље и
- скала процене за учитеље.

Тестирање смо спровели у два наврата (иницијално и финално тестирање):

1) Иницијални тест логичког мишљења (11 задатака) и

2) Финални тест логичког мишљења (11 задатака).

Прво, иницијално тестирање, реализовано је пре почетка деловања експерименталног програма у обе групе ученика (експерименталној и контролној). Њиме смо желели испитати полазно стање у погледу развијености логичког мишљења ученика обе групе и извршити уједначавање група. Друго, финално тестирање, смо реализовали након завршетка деловања експерименталног програма. Њиме смо желели испитати ниво развијености логичког мишљења ученика након спроведеног експерименталног програма, односно утврдити утицај и ефекте експерименталног програма на развијање логичког мишљења ученика.

Прво смо обавили иницијално тестирање ученика обе групе, а затим смо у експерименталну групу увели експериментални програм (задатке којима смо желели утицати на развијање логичког мишљења ученика). Након завршетка реализације експерименталног програма у експерименталној групи, спровели смо финално тестирање ученика обе групе.

На оба теста (иницијалном и финалном) одређени број задатака односио се на сваку од четири операционализацијом издвојене способности логичког мишљења.

Структура тестова (иницијалног и финалног) према способностима логичког мишљења, које смо издвојили за потребе рада:

- ***Способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не)*** – 6, 7. и 11. задатак;
- ***Способност уочавања узрочно-последичних веза*** – 4, 5. и 10. задатак;
- ***Способност откривања правила и законитости*** – 2, 3. и 9. задатак;
- ***Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку*** – 1. и 8. задатак;

Употребом тестова смо утврдили:

- претходни степен развијености логичког мишљења ученика, пре почетка деловања експерименталног програма и извршили уједначавање група – иницијално испитивање и
- финално стање развијености логичког мишљења после спроведеног експеримента – финално тестирање,
- међусобни однос резултата експерименталне и контролне групе.

Специфичност проблема истраживања изискивала је израду нових тестова који су намењени мерењу развијености логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Други разлог за креирање таквих тестова је и тај што нисмо пронашли готове тестове који би мерили развијеност логичког мишљења ученика у почетној настави математике, уз уважавање свих специфичности (узраст, природа садржаја и сл.), а којима смо се ми у раду детаљније бавили. Још један од разлога је и тај што смо за потребе рада издвојили специфичне способности логичког мишљења, које су, према нашем мишљењу, погодне за мерење и праћење у почетној настави математике. Сачинили смо две еквивалентне форме теста: иницијални тест логичког мишљења ученика (Прилог 2) и финални тест логичког мишљења ученика (Прилог 3). Структуру тестова (и иницијалног и финалног) сачињава по 11 задатака, тако креираних да за сваку компоненту логичког мишљења, коју смо за потребе рада издвојили, имамо одређени број задатака. Избор задатака је извршен тако што смо за потребе рада прво извршили операционализацију логичког мишљења ученика. На основу операционализације смо издвојили четири способности логичког мишљења које смо желели мерити, подстицати и пратити у истраживању и за које смо сматрали да су погодне за мерење и праћење током реализације експерименталног програма. Тестови су вредновани према унапред описаном начину бодовања, а сваки задатак носио је максимално пет поена, тако да је било могуће освојити укупно 55 поена. За решавање теста (и иницијалног и финалног) ученицима је дато 90 минута.

Валидност тестова обезбедили смо на тај начин што је првобитна верзија тестова (и иницијалног и финалног) садржала 20 различитих задатака подељених у четири способности логичког мишљења које смо за потребе рада операционализацијом издвојили. Након пилот тестирања, неки задаци из првобитне верзије тестова су елиминисани, тако су настале коначне форме тестова које су садржале четири групе задатака. Задаци су класификовани на оне који мере: 1. способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, односно способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу (два задатка), 2. способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила (три задатка), 3. способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација (три задатка) и 4. способност схватања значења и коришћења појмова *и, или, не* (три задатка). Примењене су логичка и садржајна валидација, при којима је утврђивано слагање задатака са садржајима на које се односе и захтевима наставног плана и програма. Отежавајућа околност приликом наведене валидације је била та што тестови, а самим тим и задаци, који су мерили способности логичког мишљења често не захтевају одређена математичка знања, већ поседовање одређених способности. Након извршене вишеструке валидације, можемо сматрати да су иницијални и финални тест логичког мишљења, конструисани за потребе рада, валидни.

Објективност иницијалног и финалног теста логичког мишљења које смо применили у истраживању испитивали смо израчунавањем Пирсоновог коефицијента корелације између резултата два независна оцењивача (аутор и један учитељ). Корелација резултата два оцењивача на иницијалном тесту је висока и износи 0.999. Корелација резултата два оцењивача на финалном тесту износи 1.000. Висока корелација је у великом степену обезбеђена и тиме што смо за иницијални и финални тест направили детаљан опис начина и критеријума бодовања.

Проверу поузданости тестова извршили смо након пилот тестирања израчунавањем Кронбаховог коефицијента алфа.

Кронбахов коефицијент алфа за иницијални тест износи 0.803 (Табела 1). Вредност Кронбаховог коефицијента алфа од 0.803 показује добру поузданост теста.

Табела 1. *Кронбахов коефицијент алфа за иницијални тест логичког мишљења*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.803	.832	11

Корелација између ставки за иницијални тест логичког мишљења је представљена у табели 2.

Табела 2. *Корелација између ставки на иницијалном тесту логичког мишљења*

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
ИМ 1. задатак	10.0000	108.231	.470	.573	.786
ИМ 2. задатак	8.2593	108.507	.331	.310	.806
ИМ 3. задатак	10.5556	121.179	.335	.877	.799
ИМ 4. задатак	9.1852	104.772	.449	.499	.790
ИМ 5. задатак	9.7407	105.430	.502	.694	.783
ИМ 6. задатак	10.0741	111.071	.528	.815	.783
ИМ 7. задатак	9.2222	107.872	.350	.465	.803
ИМ 8. задатак	9.6296	110.396	.322	.499	.805
ИМ 9. задатак	10.5556	115.026	.642	.736	.783
ИМ 10. задатак	10.1852	101.080	.794	.940	.755
ИМ 11. задатак	10.0000	104.154	.771	.874	.761

Табела 3. *Статистички показатељи за иницијални тест*

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
10.7407	129.199	11.36659	11

За финални тест логичког мишљења Кронбахоф коефицијент алфа износи 0.875, па можемо закључити да је финални тест веома поуздан (Табела 4).

Табела 4. *Кронбахов коефицијент алфа за финални тест логичког мишљења*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.875	.882	11

Корелација између ставки за финални тест логичког мишљења је представљена у табели 5.

Табела 5. *Корелација између ставки на финалном тесту логичког мишљења*

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Squared Multiple Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
ФМ 1. задатак	19.6296	245.396	.154	.519	.892
ФМ 2. задатак	18.7037	220.063	.522	.817	.868
ФМ 3. задатак	18.7778	215.872	.529	.549	.868
ФМ 4. задатак	18.2593	222.046	.515	.720	.868
ФМ 5. задатак	19.4815	211.028	.690	.783	.856
ФМ 6. задатак	20.2593	208.276	.829	.858	.848
ФМ 7. задатак	18.8148	215.157	.547	.683	.867
ФМ 8. задатак	20.4444	228.949	.440	.700	.873
ФМ 9. задатак	20.8148	217.311	.769	.892	.854
ФМ 10. задатак	20.5556	211.256	.826	.861	.849
ФМ 11. задатак	19.8148	213.003	.735	.808	.854

Табела 6. *Статистички показатељи за финални тест*

Mean	Variance	Std. Deviation	N of Items
21.5556	261.641	16.17532	11

Након иницијалног мерења развијености логичког мишљења ученика обе групе (Е и К), у експерименталну групу је уведен експериментални програм (Прилог 4). Финално мерење развијености логичког мишљења ученика обе групе (финално тестирање) извршено је по завршетку реализације експерименталног програма.

За потребе рада и прикупљање података о ученицима и родитељима ученика извршен је рад на педагошкој документацији. За прикупљање података о ученицима коришћен је евиденциони лист (Прилог 1) уз помоћ којег смо прикупили потребне информације о ученицима.

У раду смо применили и анкету за ученике експерименталне групе (Прилог 6) којом смо желели испитати ставове ученика о експерименталном програму (задацима којима је циљ развијање логичког мишљења) и да ли је применом одређених математичких задатака настава математике интересантнија за ученике и да ли их је мотивисала за учење. Анкета је састављена из две групе питања. Прва група питања у анкети се односила на опште податке о ученику (школа, разред, одељење, пол, успех који је ученик имао на крају претходног разреда и оцена из математике коју је ученик имао на крају претходног разреда). Други део анкете чинила су питања усмерена на испитивање мишљења ученика о експерименталном програму, односно питања која испитују заинтересованост ученика за учење математике након експерименталног програма.

Како смо имали за циљ да утврдимо мишљење и ставове учитеља о утицају који почетна настава математике врши на развијање логичког мишљења и о заступљености задатака којима се развија логичко мишљење, користили смо анкету за учитеље и скалу процене. Анкетни упитник за учитеље (Прилог 7) смо сами конструисали за потребе истраживања. Анкета садржи 11 питања. Први део анкете чине питања која се односе на опште податке (независне варијабле: средину у којој учитељи раде, разред којем предају и године радног искуства), док други део анкете чине питања која се односе на утицај и ефекте почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика. Питања у анкети су била, већим делом, затвореног типа и њима смо желели сазнати мишљења и ставове учитеља о питањима везаним за могућности подстицања логичког мишљења ученика.

Након анкете, учитељи су попуњавали и скалу процене (Прилог 7а). Скала је састављена од осам тврдњи о томе колико су у почетној настави математике заступљени различити типови задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика. Како смо у раду извршили операционализацију логичког мишљења и за потребе рада издвојили четири способности логичког мишљења (способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност уочавања правила и законитости и закључивања на основу уочених правила, способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не)) у скали су изнете по две тврдње које се односе на заступљеност математичких задатака који утичу, или би требало да утичу, на одговарајућу издвојену способност логичког мишљења.

6.3. Структура иницијалног теста логичког мишљења и начин бодовања

Иницијални тест се састојао од једанаест задатака. Сваки задатак је мерио једну операционализацијом издвојену способност логичког мишљења:

- Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу, мерили смо првим и осмим задатком на иницијалном тесту;

- Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила, мерили смо другим, трећим и деветим задатком;

- Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација, мерили смо четвртим, петим и десетим задатком;

- Способност схватања значења и коришћења појмова *и, или, не* мерили смо шестим, седмим и једанаестим задатком.

Задаци су бодовани на следећи начин:

Задатак 1. Први задатак је захтевао од ученика да преброји сиве и беле коцке на слици. Да би тачно решио задатак, ученик је морао схватити да постоје коцке у доњем слоју које се не виде.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је тачно избројао само коцке једне боје (беле или сиве), ученик је добијао три бода.

Приликом конципирања иницијалног теста логичког мишљења, водили смо се тиме да користимо задатке који нису у великој мери заступљени у уџбеницима који су одобрени за употребу и који се тренутно користе у основној школи. За потребе анализе заступљености појединих типова задатака, користили смо уџбенике за трећи разред издавачких кућа: *Klett* (анализирано 1117 задатака), *Вулкан* (анализирано 1122 задатка), *Бигз* (анализирано 1142 задатка) и *Логос* (анализирано 1188 задатака), који су највише у употреби у основним школама. Можемо констатовати да овакав тип задатака није у довољној мери заступљен у уџбеницима који се користе у настави математике.

Најчешће се овакви и слични задаци примењују на часовима додатне наставе и као припрема ученика за такмичење.

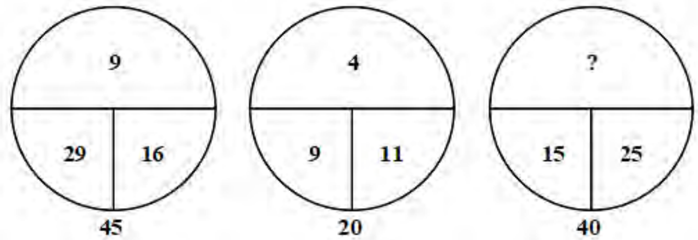
Задатак 2. Три двоцифрена броја су представљена помоћу симбола и од ученика се захтевало да открије правило представљања десетица и јединица и да по истом правилу, тј. применом откривеног правила, запише тражени број.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је тачно представио само једну цифру (цифру десетица или цифру јединица), ученик је добијао два бода.

Оно што и овде морамо нагласити јесте чињеница да овакве задатке нисмо проналазили у анализираним уџбеницима. Овакав тип задатака проналазимо у *Математичком листу* (2011), али је тешко говорити, без детаљнијег испитивања мишљења учитеља, колико њих користи поменути лист у настави.

Задатак 3. Трећи задатак је од ученика захтевао откривање правила по којем су у делове кругова уписани бројеви. Овај задатак је представљао виши степен способности откривања правила.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио правило и применом правила открио тражени број, ученик је добијао пет поена. Уколико је у простору за рад, око кругова, извршавао операције које су водиле ка тачном резултату, ученик је добијао три бода. Односно, ако је ученик приказао део решења, као на слици испод.



Слика 2. *Делимично решен трећи задатак*

Отежавајућа околност код решавања овог задатка је та што у уџбеницима математике, који се тренутно користе у почетној настави математике, а које смо анализирали приликом избора задатака за иницијални тест, нисмо пронашли овакве, а ни сличне задатке. Са друге стране, у уџбеницима има задатака који од ученика захтевају откривање правила и настављање започетог низа бројева. У таквим задацима, често, то правило захтева од ученика извршавање две рачунске операције, као у нашем случају. То указује на чињеницу да је ученицима отежавајућа околност, управо, нов, другачији начин постављања проблема, у односу на интерпретацију на коју су навикнути.

Задатак 4. Од ученика се захтевало да израчуна цену свеске и цену оловке. Да би израчунао цену, ученик је морао успоставити везу између података који су били дати у задатку: свеска и оловка коштају укупно 74 динара, а две такве оловке и свеска 100 динара. Тек успостављањем веза и увиђањем да се први и други податак разликују за цену једне оловке, ученик може израчунати цену оловке, а затим и цену свеске.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је ученик тачно израчунао само цену оловке, добијао је четири бода. Уколико је ученик рачунао цену оловке и представио начин израчунавања цене свеске, али имао грешку у рачуну, ученик је добијао три бода.

Олакшавајућа околност за решавање овог задатка је што се повремено примењују у почетној настави математике, у прилог томе говори и њихова повремена заступљеност у уџбеницима који се тренутно користе, а које смо анализирали приликом конципирања иницијалног теста.

Задатак 5. У овом задатку се од ученика тражило да израчунају колико свака девојчица има сличица. Био је дат укупан број Мириних, Лениних и Тининих сличица, укупан број Мириних и Лениних сличица, као и укупан број Мириних и Тининих сличица. Успостављањем узрочно-последичних веза између података који су дати и тражених података, ученици треба да уоче на који начин могу израчунати број Тининих сличица, број Лениних и број Мириних сличица.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је пронашао колико сличица има свака девојчица, ученик је добијао пет поена. За тачно израчунат број сличица за две девојчице, ученик је добијао четири бода, а уколико је одредио број сличица само једне девојчице, ученик је добијао три бода.

Овакви и слични задаци се повремено јављају у уџбеницима математике који се тренутно користе у почетној настави, а које смо анализирали приликом састављања задатака за иницијални тест.

Задатак 6. Овај задатак је од ученика захтевао разумевање значења термина *не (није)* и везника *и*. Односно, захтевао је од ученика разумевање негације и конјункције. Два податка у задатку била су дата у облику негације. Тачно разумевање негације у оба случаја и примена тог значења, као и правилно разумевање везника *и* водили су ученика до откривања бројева који су неопходни за решавање задатка.

Начин бодовања: Задатак има пет решења. За свако тачно решење ученик је добијао по један поен. Уколико је ученик тачно навео сва решења, добијао је пет поена.

У почетној настави математике има сличних захтева, код којих се од ученика тражи да наброје све парне или непарне бројеве одређене десетице. Такође, има и захтева да наведу који је то највећи паран или непаран број одређене десетице, али нема у довољној мери примене негације. Стога, сматрамо да је разумевање негације, које се јавља у наведеном задатку, захтев са којим се ученици ретко срећу. Морамо приметити да у уџбеницима математике који се користе у почетној настави, а које смо анализирали при састављању иницијалног теста, нема довољно задатака који од ученика захтевају познавање значења термина *и, или* и *не*. Са друге стране, ако на време и правилно ради са реченицама у којима се јављају наведени везници, везујући их за скупове и скуповне операције, ученик у њиховом усвајању, примењује природну методу асимилације. На тај начин ученик лако, правилно и јасно може савладати ове садржаје и потпуно је спреман за касније прихватање формалног начина излагања логике који почиње са истиносним таблицама логичких операција (Марјановић, 1996: 74).

Задатак 7. У овом задатку од ученика се захтевало правилно разумевање двоструке негације (*нису парни* и *није записао*).

Начин бодовања: За тачно решен задатак у потпуности, односно обојена четири поља, ученик је добијао пет поена. За тачно означена три поља, ученик је добијао четири поена. За тачно означена два поља, ученик је добијао три поена. Уколико је означио само једно поље, ученик је добијао два поена. Један поен је добијао ученик који је означио три или четири тачна поља и само једно погрешно.

Овакве и сличне задатке нисмо пронашли у уџбеницима математике који се користе у почетној настави, а које смо анализирали приликом конципирања иницијалног теста. Без детаљнијег испитивања мишљења учитеља, тешко је говорити о томе да ли учитељи користе овакве и сличне задатке у почетној настави математике.

Задатак 8. Ученик на основу датих података открива и податак који је скривен у самој поставци задатка. Од ученика се захтева да открије да четири цвета колико је остало (податак који је дат у задатку), заправо представљају четвртину цветова које је девојчица имала на почетку (податак који је неопходан и довољан за решавање).

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је само сликом представио податке дате у задатку, при чему је фигура на правилан начин подељена на делове који се помињу у задатку, ученик је добијао три бода.

На основу анализе уџбеника коју смо извршили приликом конципирања иницијалног теста, можемо констатовати да овај тип задатака није у довољној мери заступљен у уџбеницима математике који се тренутно користе у почетној настави.

Задатак 9. Од ученика се захтева да открију начин на који су уписивани бројеви у први и у други круг и да применом тог правила открију број који недостаје у трећем кругу.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио правило и применом правила открио тражени број, ученик је добијао пет поена. Уколико је у простору за рад, око кругова, извршавао операције које су водиле ка тачном резултату, ученик је добијао три бода.

Задатак 10. У задатку је био дат укупан број колача на три тацне. Остали подаци који су били дати у задатку су да је на првој тацни било два пута више колача него на другој, а на трећој тацни је дупло више колача него на прве две тацне укупно. Дакле, подаци су били дати кроз одређене међусобне односе. Од ученика се тражило да израчуна колико је колача било на свакој тацни. Успостављањем веза и релација између података који су дати у задатку, ученик треба да открије на који начин може израчунати број колача на другој тацни, а затим на првој и трећој.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио број колача на све три тацне, ученик је добијао пет поена. Уколико је ученик тачно израчунао број колача на две тацне, добијао је четири бода. Три бода је ученик добијао уколико је израчунао број колача на једној тацни. Уколико је ученик правилно представио податке дате у задатку сликом, методом дужи, добијао је два бода.

Оваквих задатака има у почетној настави математике, али у недовољној мери, у прилог томе говори и повремено појављивање оваквих и сличних задатака у уџбеницима који се тренутно користе, а које смо анализирали за потребе састављања иницијалног теста.

Задатак 11. Једанаести задатак је од ученика захтевао разумевање значења термина *и, или* и *не (није)*. Односно, захтевао је од ученика разумевање конјункције, дисјункције и негације. Стога, захтев који је стављен пред ученике може се сматрати сложеним захтевом који подразумева висок степен разумевања значења и коришћења наведених логичких операција.

Начин бодовања: Тачно решен задатак подразумева означених седам поља. За тачно решен задатак у потпуности, односно заокружених седам израза, ученик је добијао пет поена. За тачно означених шест израза, ученик је добијао четири поена. За тачно означених пет израза, ученик је добијао три поена. За четири означена израза, ученик је добијао два поена. Уколико је означио три израза, ученик је добијао један поен.

Овакве и сличне задатке нисмо пронашли у уџбеницима математике у чији садржај смо извршили увид, што смо поменули и код представљања начина бодовања седмог задатка. Понављамо да је без детаљнијег испитивања мишљења учитеља, тешко говорити о томе да ли их учитељи користе у почетној настави математике.

6.4. Структура финалног теста логичког мишљења и начин бодовања

За финално тестирање логичког мишљења ученика сачинили смо тест еквивалентан иницијалном тесту. Финални тест се, такође, састојао од једанаест задатака. Сваки задатак мерио је једну операционализацијом издвојену способност логичког мишљења:

- Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу, мерили смо првим и осмим задатком на финалном тесту;

- Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила, мерили смо другим, трећим и деветим задатком;

- Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација, мерили смо четвртим, петим и десетим задатком;

- Способност схватања значења и коришћења појмова *и, или, не* мерили смо шестим, седмим и једанаестим задатком.

Како је форма финалног теста еквивалентна иницијалном тесту, овде ћемо само кратко навести начин бодовања задатака на финалном тесту. О заступљености одређеног типа задатака у уџбеницима који се тренутно користе у почетној настави математике било је речи у опису иницијалног теста.

Задаци су бодовани на следећи начин:

Задатак 1. Први задатак је захтевао од ученика да преброје сиве и беле коцке на слици која је била нешто сложенија од слике на иницијалном тесту.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је тачно избројао само коцке једне боје (беле или сиве), ученик је добијао три бода. Нула поена је добијано за погрешно решен или нерешен задатак.

Задатак 2. Три троцифрена броја су представљена помоћу симбола и од ученика се захтевало да открије правило представљања стотина, десетица и јединица и да по истом правилу, тј. применом откривеног правила, запише тражени троцифрени број.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је тачно представио две цифре, ученик је добијао четири бода. За једну тачно представљену цифру, ученик је добијао три поена.

Задатак 3. Трећи задатак је од ученика захтевао откривање правила по којем су у делове кругова уписани бројеви и откривање броја који недостаје у трећем кругу. Овај задатак је представљао виши степен способности откривања правила.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио правило и применом правила открио тражени број, ученик је добијао пет поена. Уколико је у простору за рад, око два круга, извршавао операције које су водиле ка тачном резултату из којих се уочава да је ученик открио правило, добијао је четири бода. Три бода је добијао ученик који је само око првог круга извршавао операције које су водиле ка откривању правила.

Задатак 4. Од ученика се захтевало да израчуна цену свеске и цену књиге. Да би израчунао тражене цене, ученик је морао успоставити везу између података који су били дати у задатку: свеска и књига коштају укупно 740 динара, а две такве свеске и књига 906 динара. Тек успостављањем веза и увиђањем да се први и други податак разликују за цену једне свеске, ученик може израчунати цену свеске, а затим и цену књиге.

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је ученик тачно израчунао само цену свеске, добијао је четири бода. Уколико је ученик рачунао цену свеске и представио начин израчунавања цене књиге, али имао грешку у рачуну, ученик је добијао три бода.

Задатак 5. У овом задатку се од ученика тражило да израчунају колико књига има на свакој полици. Био је дат укупан број књига на три полице, укупан број књига на првој и трећој полици, као и укупан број књига на трећој и другој полици. Успостављањем узрочно-последичних веза између података који су дати и тражених података, ученици треба да уоче на који начин могу израчунати број књига на другој, првој и трећој полици.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је пронашао колико књига има на свакој полици, ученик је добијао пет поена. За тачно израчунат број књига на две полице, ученик је добијао четири бода, а уколико је одредио број књига на једној полици, ученик је добијао три бода.

Задатак 6. Овај задатак је од ученика захтевао разумевање значења термина *не (није)* и везника *и*. Захтевао је од ученика разумевање негације и конјункције. Два податка у задатку била су дата у облику негације. Тачно разумевање негације у оба случаја и примена тог значења, као и правилно разумевање везника *и* водили су ученика до откривања бројева који су неопходни за решавање задатка.

Начин бодовања: Задатак има пет решења. За свако тачно решење ученик је добијао по један поен. Уколико је ученик тачно навео сва решења, добијао је пет поена.

Задатак 7. У овом задатку од ученика се захтевало правилно разумевање двоструке негације (*нису парни* и *није записао*).

Начин бодовања: За тачно решен задатак у потпуности, односно прецртана три поља, ученик је добијао пет поена. За тачно означена два поља, ученик је добијао четири поена. За тачно означено једно поље, ученик је добијао три поена. Два поена је добијао ученик који је означио три тачна поља и само једно погрешно, а један поен уколико је означио два тачна поља и једно погрешно.

Задатак 8. У формулацији задатка се налази и скривени податак, тј. податак који није директно дат. Ученици на основу датих података треба да открију и податак који је скривен у самој поставци задатка. Од ученика се захтева да открију да 242 сличице, колико је остало (податак који је дат у задатку), заправо, представљају четвртину сличица које је Мира имала на почетку (податак који је неопходан и довољан за решавање).

Начин бодовања: За тачно решен задатак ученик је добијао пет поена. Уколико је само сликом представио податке дате у задатку, при чему је фигура на правилан начин подељена на делове који се помињу у задатку, ученик је добијао три бода. За погрешна решења или нерешен задатак, ученици су добијали 0 поена.

Задатак 9. Од ученика се захтева да открију начин на који су бројеви исписани у први и други круг и да применом тог правила открију број који недостаје у трећем кругу.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио правило и применом правила пронашао тражени број, ученик је добијао пет поена. Уколико је у простору за рад, око кругова, извршавао операције које су водиле ка тачном резултату, ученик је добијао три бода. За нерешен или погрешно решен задатак, ученици су добијали 0 поена.

Задатак 10. У задатку је био дат укупан број сличица које је Марко залепио у свој албум. Остали подаци који су били дати у задатку су да је у први албум залепио два пута више сличица него у други, а у трећи дупло више сличица него у први и други укупно. Дакле, подаци су били дати кроз одређене међусобне односе. Од ученика се тражило да израчуна колико је сличица било залепљено у сваки албум. Успостављањем веза и релација између података који су дати у задатку, ученик треба да открије на који начин може израчунати број сличица у другом албуму, а затим колико је залепљено у први и трећи.

Начин бодовања: За тачно решен задатак, уколико је открио број сличица залепљених у сваком албуму, ученик је добијао пет поена. Уколико је ученик тачно израчунао број сличица у два албума, добијао је четири бода. Три бода је ученик добијао уколико је израчунао број сличица у једном албуму. Уколико је ученик правилно представио податке дате у задатку сликом, методом дужи, добијао је два бода.

Задатак 11. Једанаести задатак је од ученика захтевао разумевање значења термина *и, или* и *не (није)*. Односно, захтевао је од ученика разумевање конјункције, дисјункције и негације.

Начин бодовања: Тачно решен задатак подразумева заокружених пет поља. За тачно решен задатак у потпуности, односно заокружених пет израза, ученик је добијао пет поена. За тачно означена четири израза, ученик је добијао четири поена. За тачно означена три израза, ученик је добијао три поена. За два означена израза, ученик је добијао два поена. Уколико је означио само један израз, ученик је добијао један поен.

7. ПОПУЛАЦИЈА И УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА

Популацију истраживања чине ученици трећег разреда основне школе школске 2018/2019. године. Узорак је бројао укупно 238 ученика трећег разреда основних школа на територији општине Ваљево. Наведени узорак има особине стратификованог, групног и случајног узорка.

Како је у раду примењен експеримент са паралелним групама, експерименталну групу је образовало 119 ученика, а исти број ученика имала је и контролна група. Експерименталну групу су чинили ученици из ОШ „Нада Пурић", ОШ „Сестре Илић" и ОШ „Свети Сава". Контролну групу су чинили ученици из ОШ „Прва основна школа", ОШ „Милован Глишић". Ученици свих одељења обе групе (Е и К) радили су по усаглашеном наставном плану и програму. У раду у свим одељењима, учитељи су користили уџбенике истог издавача. Стога, сматрамо да оваква подела није утицала на резултате истраживања. Са друге стране, тестови логичког мишљења, које смо за потребе рада конструисали, реализовани су почетком школске године и на крају исте школске године и захтевали су развијеност способности логичког мишљења, а не посебна математичка знања. Познавање математичких садржаја је било потребно, али не и од пресудног значаја за решавање већине задатака на тестовима.

У табелама које следе детаљније је представљена структура узорка ученика. У истраживање је на иницијалном и финалном мерењу био укључен већи број ученика, али смо, због осипања узорка, у истраживање и обраду података укључили само оне ученике који су били присутни на оба тестирања.

Уједначавање експерименталне и контролне групе извршено је по неколико критеријума:

- пол;
- општи успех ученика постигнут на крају претходне школске године, на крају другог разреда;
- оцена из математике на крају претходног разреда;
- стручна спрема родитеља;
- резултати иницијалног тестирања;
- резултати иницијалног теста по способностима логичког мишљења.

Полна структура узорка ученика обе групе представљена је у табели 7.

Табела 7. *Приказ структуре ученика по полу*

		Пол		
		мушки	женски	Укупно
Група	Е група	56 (47.1%)	63 (52.9%)	119 (100.0%)
	К група	51 (42.9%)	68 (57.1%)	119 (100.0%)
	Укупно	107 (45.0%)	131 (55.0%)	238 (100.0%)

Хи квадрат тест није показао значајну повезаност између групе и пола χ^2 (1, n = 238) = 0.272, p = 0.602, phi = 0.042. Можемо тврдити да разлика између група с обзиром на пол ученика није статистички значајна. Дакле, групе су у погледу пола уједначене.

Структура узорка ученика с обзиром на општи успех који су ученици постигли на крају другог разреда приказана је у табели 8.

Табела 8. *Приказ структуре ученика с обзиром на општи успех постигнут на крају претходне школске године*

		Успех			
		добар	врлодобар	одличан	Укупно
Група	Е група	0 (0.0%)	31 (26.1%)	88 (73.9%)	119 (100.0%)
	К група	5 (4.2%)	25 (21.0%)	89 (74.8%)	119 (100.0%)
	Укупно	5 (2.1%)	56 (23.5%)	177 (74.4%)	238 (100.0%)

Резултати тестирања нормалности расподеле успеха на крају претходног разреда ученика експерименталне и контролне групе су представљени у табели 9.

Табела 9. *Нормалност расподеле успеха ученика на крају другог разреда*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.462	119	.000	119.65	7062.500	14202.500	-.045	.964
К група	.454	119	.000	119.35				

Како експериментална (p = 0.000) и контролна група (p = 0.000) немају нормалну расподелу, применом Ман-Витнијевог теста закључујемо да разлика између успеха на крају другог разреда ученика Е и К групе (U = 7062.500, p = 0. 964) није статистички значајна. Групе су у погледу успеха уједначене.

Структура узорка ученика на основу оцене из математике претходне школске године (на крају другог разреда) дата је у табели 10.

Табела 10. *Структура узорка ученика према оцени из математике*

		Оцена				
		довољна	добра	врлодобра	одлична	Укупно
Група	Е група	4 (3.4%)	14 (11.8%)	25 (21.0%)	76 (63.9%)	119 (100.0%)
	К група	7 (5.9%)	12 (10.1%)	33 (27.7%)	67 (56.3%)	119 (100.0%)
	Укупно	11 (4.6%)	26 (10.9%)	58 (24.4%)	143 (60.1%)	238 (100.0%)

Тестирали смо нормалност расподеле оцена из математике на крају претходног разреда ученика Е и К групе (Табела 11).

Табела 11. *Нормалност расподеле оцена из математике на крају другог разреда*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.383	119	.000	123.71	6579.500	13719.500	-1.077	.281
К група	.333	119	.000	115.29				

Како експериментална (p = 0.000) и контролна група (p = 0.000) немају нормалну расподелу, применом Ман-Витнијевог теста закључујемо да разлика између оцена из математике ученика Е и К групе (U = 6579.5, p = 0.281) није статистички значајна. Е и К група су у погледу оцена из математике уједначене.

Структура узорка ученика с обзиром на стручну спрему родитеља представљена је у табелама 12 и 13. У табели 12 представљена је структура ученика с обзиром на образовни статус оца, док је у табели 13 представљена структура ученика према образовном статусу мајке.

Табела 12. *Структура узорка ученика према образовном статусу оца*

		Образовни статус оца				
		основна	средња	висока	факултет	Укупно
Група	Е група	16 (13.4%)	73 (61.3%)	14 (11.8%)	16 (13.4%)	119 (100.0%)
	К група	22 (18.5%)	59 (49.6%)	18 (15.1%)	20 (16.8%)	119 (100.0%)
	Укупно	38 (16.0%)	132 (55.5%)	32 (13.4%)	36 (15.1%)	238 (100.0%)

Није утврђена значајна веза између групе и стручне спреме оца χ^2 (3, n = 238) = 3.377, p = 0.337, phi = 0.119. Можемо тврдити да разлике између Е и К групе с обзиром на стручну спрему оца нису статистички значајне. Групе су у погледу стручне спреме оца уједначене.

Табела 13. *Структура узорка ученика према образовном статусу мајке*

		Образовни статус мајке				
		основна	средња	висока	факултет	Укупно
Група	Е група	12 (10.1%)	71 (59.7%)	21 (17.6%)	15 (12.6%)	119 (100.0%)
	К група	16 (13.4%)	62 (52.1%)	20 (16.8%)	21 (17.6%)	119 (100.0%)
	Укупно	28 (11.8%)	133 (55.9%)	41 (17.2%)	36 (15.1%)	238 (100.0%)

Веза између групе и стручне спреме мајке χ^2 (3, n = 238) = 2.205, p = 0.531 phi = 0.096 није откривена. Можемо тврдити да разлика међу групама с обзиром на стручну спрему мајке није статистички значајна. Групе су уједначене у погледу стручне спреме мајке.

Популацију истраживања из које је узет узорак учитеља обухваћених истраживањем је популација учитеља који су били у радном односу школске 2018/2019. године у основним школама у Ваљеву. Из популације учитеља изабран је узорак од 112 учитеља. Узорак има одлике случајног.

Учитељи су подељени на учитеље који раде у сеоској средини и оне који раде у градској средини (Табела 14).

Табела 14. *Структура узорка учитеља с обзиром на средину (градска – сеоска)*

Средина	Број учитеља	%
Градска	71	63.4
Сеоска	41	36.6
Укупно	112	100.0

Међу анкетираним учитељима више је оних који раде у градским срединама од учитеља који раде у сеоским. Један од разлога за мањи број учитеља који раде у сеоским школама у општини Ваљево је све мањи број сеоских школа услед природног гашења.

Учитељи су распоређени с обзиром на разред којем предају у четири групе (Табела 15).

Табела 15. *Структура узорка учитеља с обзиром на разред*

Разред	Број учитеља	%
Први	23	20.5
Други	22	19.6
Трећи	33	29.5
Четврти	34	30.4
Укупно	112	100.0

С обзиром на године рада, узорак учитеља је подељен на четири групе (Табела 16).

Табела 16. *Структура узорка учитеља с обзиром на радно искуство*

Радни стаж	Број учитеља	%
Од 0 до 10	26	23.2
Од 11 до 20	24	21.4
Од 21 до 30	49	43.8
Од 31 до 40	13	11.6
Укупно	112	100.0

У наредним табелама (Табеле 17 и 18) представљен је узорак ученика експерименталне групе који су попуњавали анкету којом смо желели испитати мишљења ученика о експерименталном програму и да ли је примена одређених задатака мотивисала ученике за учење математике.

Табела 17. *Структура узорка ученика експерименталне групе према полу*

Пол	Број ученика	%
Мушки	56	47.1
Женски	63	52.9
Укупно	119	100.0

Табела 18. *Структура узорка ученика експерименталне групе према успеху и оцени из математике на крају претходног разреда*

Општи успех	Број ученика	%
Одличан	88	73.9
Врлодобар	31	26.1
Оцена	Број ученика	%
Одлична	76	63.9
Врлодобра	25	21.0
Добра	14	11.8
Довољна	4	3.4
Укупно	119	100.0

8. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ИСТРАЖИВАЊА

Истраживање је реализовано током школске 2018/2019. године.

Септембра школске 2018/2019. године реализовани су договори са директорима школа, педагошко-психолошким службама и учитељима. Учитељи експерименталне групе су упознати са циљем и задацима истраживања, као и са проблемом и предметом. Учитељи експерименталне групе упознати су са садржајем експерименталног програма, као и са начином реализације истог.

Током школске 2017/2018. године извршено је пробно истраживање. Инструменти су по обављеном пробном истраживању кориговани.

У октобру школске 2018/2019. године реализована су иницијална тестирања обе групе ученика. Тестирање у оквиру једне групе вршено је истог дана. Сва тестирања је реализовао експериментатор према јединственим упутствима и условима. Током октобра су прикупљени подаци о ученицима из *Разредне књиге* и *Досијеа ученика*.

Након реализације иницијалног тестирања, крајем октобра школске 2018/2019. године, почели смо са примењивањем посебно креираних задатака експерименталног програма у експерименталној групи. Вежбе, посебно креиране задатке експерименталног програма, реализовао је експериментатор на редовним часовима математике. Експериментални програм је у потпуности пратио предвиђени наставни програм математике и реализован је до јуна школске 2018/2019. године. До јуна школске 2018/2019. године завршена је реализација експерименталног програма и у првој половини јуна школске 2018/2019. године, у обе групе (експерименталној и контролној) спроведено је финално тестирање ученика.

Експериментални програм је садржао 32 вежбе, које се састоје од математичких задатака чије решавање доприноси развијању логичког мишљења ученика, односно чије решавање подстиче развијање одговарајућих способности логичког мишљења које смо за потребе рада издвојили. Једна вежба је реализована у току једног дела школског часа. Како су вежбе садржале велики број задатака, задатке које ученици нису стигли да реше током часа добијали су за домаћи задатак уз додатна упутства. Вежбе у експерименталном програму су тематски груписане и односе се на једну од четири издвојене способности логичког мишљења: *способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење*, *способност успостављања узрочно-последичних веза*, *способност уочавања правила и законитости, способност откривања елемената који су прикривени или нису одмах уочљиви у задатку (оштроумност).* За сваку од четири издвојене способности (које су подстицане експерименталним програмом) је реализован исти број вежби. Укупно смо за сваку операционализацијом издвојену способност логичког мишљења реализовали по осам вежби.

Експериментални програм је реализован у оквиру следећих наставних тема:

- Основне рачунске операције у скупу природних бројева до 1000 (Сабирање и одузимање до 1000; Множење и дељење до 1000; Зависност збира, разлике, производа и количника од чланова; Једначине и неједначине; Математички изрази);
- Геометријске фигуре (Дуж; Квадрат, правоугаоник и троугао);
- Разломци;
- Мерење и мере;

Распоред наставних тема и јединица преузет је из *Годишњег програма рада школе* и он је утицао на редослед наставних јединица у експерименталном програму. У табели 19 приказани су називи наставних јединица у експерименталном програму, тип часа и способност логичког мишљења на коју се вежба односи, тј. коју математички задаци садржани у вежби подстичу.

Табела 19. *Вежбе експерименталног програма*

Ред. број	Наставна јединица	Тип часа	Способност логичког мишљења
1.	Разни задаци	Вежбање	Способност успостављања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и доношење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;
2.	Разни задаци	Вежбање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост; Способност коришћења података који нису јасно дати у задатку;
3.	Разни задаци	Вежбање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост; Способност решавања проблема на основу откривања нелогичности у задатку; Способност уочавања непотребних (сувишних) елемената у задатку;
4.	Бројеви прве хиљаде	Обрада	Способност успостављања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и доношење закључака на основу уочених релација и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;
5.	Бројеви прве хиљаде	Утврђивање	Способност уочавања правила; Способност уочавања (откривања) законитости; Способност закључивања на основу уочених правила и законитости;
6.	Римске цифре	Утврђивање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;
7.	Сабирање и одузимање стотина прве хиљаде	Обрада	Способност успостављања узрочно-последичних релација и односа међу елементима и доношење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;
8.	Сабирање и одузимање стотина прве хиљаде	Утврђивање	Способност уочавања правила и законитости; Способност закључивања на основу уочених правила и законитости; Способност примене правила на конкретне примере;
9.	Сабирање троцифреног и једноцифреног броја	Обрада	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила; Способност примене правила;
10.	Сабирање троцифреног и једноцифреног броја	Утврђивање	Способност успостављања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и доношење закључака на основу уочених релација и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;
11.	Одузимање једноцифреног броја од троцифреног	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
12.	Сабирање троцифреног и двоцифреног броја	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*

13.	Одузимање двоцифреног од троцифреног броја	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
14.	Сабирање троцифрених бројева облика 359 + 217	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
15.	Одузимање троцифрених бројева 562 – 236	Утврђивање	Способност успостављања узрочно-последичних релација и односа међу елементима и изношење закључака на темељу уочених веза и односа у задатку;
16.	Сабирање троцифрених бројева облика 378 + 246	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
17.	Одузимање троцифрених бројева 532 – 276	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
18.	Зависност збира и разлике	Утврђивање	Способност уочавања правила на конкретним примерима; Способност примене правила при решавању задатака;
19.	Мерење дужине и мерење времена	Вежбање	Способност успостављања узрочно-последичних релација и односа међу елементима и изношење закључака на основу уочених релација и односа у задатку;
20.	Мерење масе	Утврђивање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, као и коришћење нових идеја; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност и оригиналност у мишљењу;
21.	Мерење запремине течности	Утврђивање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, као и коришћење нових идеја; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;
22.	Множење и дељење збира и разлике бројем	Утврђивање	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака;
23.	Дељење троцифреног броја једноцифреним	Утврђивање	Способност уочавања правила и законитости; Способност закључивања на основу уочених правила;
24.	Дељење троцифреног броја једноцифреним	Вежбање	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација;
25.	Зависност производа и количника	Утврђивање	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака; Способност закључивања на основу уочених правила;
26.	Дуж, квадрат, правоугаоник, троугао	Утврђивање	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;
27.	Неједначине	Обрада	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
28.	Неједначине	Утврђивање	Способност схватања значења појмова (и, или, не) и њихово правилно коришћење при решавању задатака; Способност схватања логичке функције појмова *и, или, не.*
29.	Обим правоугаоника и квадрата	Вежбање	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација;
30.	Разломци	Утврђивање	Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу; Способност коришћења података на нов (другачији) начин;
31.	Разломци	Утврђивање	Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу; Способност коришћења података на нов (другачији) начин;
32.	Задаци за вежбање	Вежбање	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака; Способност закључивања на основу уочених правила;

У јуну школске 2018/2019. године извршена су финална тестирања. Тестирање у оквиру једне групе вршено је истог дана. Сва тестирања је реализовао експериментатор према јединственим упутствима и условима. Након тестирања ученика експерименталне групе, ученици исте су и анкетирани.

Анкетирање учитеља је извршено крајем школске 2018/2019. године.

9. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА ПОДАТАКА

Податке које смо добили истраживањем, помоћу коришћених инструмената истраживања, статистички смо обрадили уз употребу стандардних статистичких поступака.

При статистичкој обради података употребили смо софтверски пакет IBM SPSS 22.0. Резултате смо представљали графички и табеларно. Статистичке мере које смо употребљавали при приказивању података су: проценти и фреквенције, аритметичка средина, *Кронбах Алфа* (Cronbach's Alpha) коефицијент, *Колмогоров-Смирнов* (Kolmogorov-Smirnov) тест нормалности, *Ман-Витнијев* (Mann-Whitney) тест, *Крускал-Волисов* (Kruskal-Wallis) тест, *Фридманов* (Friedman) тест, *Хи-квадрат* (Chi-square) тест.

За испитивање поузданости тестова примењен је *Кронбах Алфа* (*Cronbach's Alpha*) коефицијент.

Пирсонов коефицијент корелације (*Pearson Correlation*) смо употребили за испитивање објективности тестова.

За испитивање нормалности расподеле података смо примењивали *Колмогоров-Смирнов* тест нормалности. *Ман-Витнијев* тест коришћен је када посматране величине немају нормалну расподелу за тестирање значајности њихових разлика. Њега смо користили за поређење резултата ученика Е и К групе.

Крускал-Волисов (Kruskal-Wallis) тест користили смо за поређење разлика у резултатима различитих група формираних с обзиром на пол, успех, оцену, стручну спрему оца и стручну спрему мајке, када резултати у групама немају нормалну расподелу.

Фридманов (Friedman) тест смо користили за анализу варијансе по ранговима, а *post hoc* анализе за испитивање које се групе међусобно значајно разликују, на основу разлика у средњем рангу група.

За испитивање уједначености узорка ученика с обзиром на пол и стручну спрему родитеља, за испитивање постојања разлика у одговорима ученика експерименталне групе с обзиром на пол, успех и оцену, као и за испитивање постојања разлике у мишљењима учитеља с обзиром на локацију рада, разред и радни стаж, користили смо *Хи-квадрат (Chi-square)* тест.

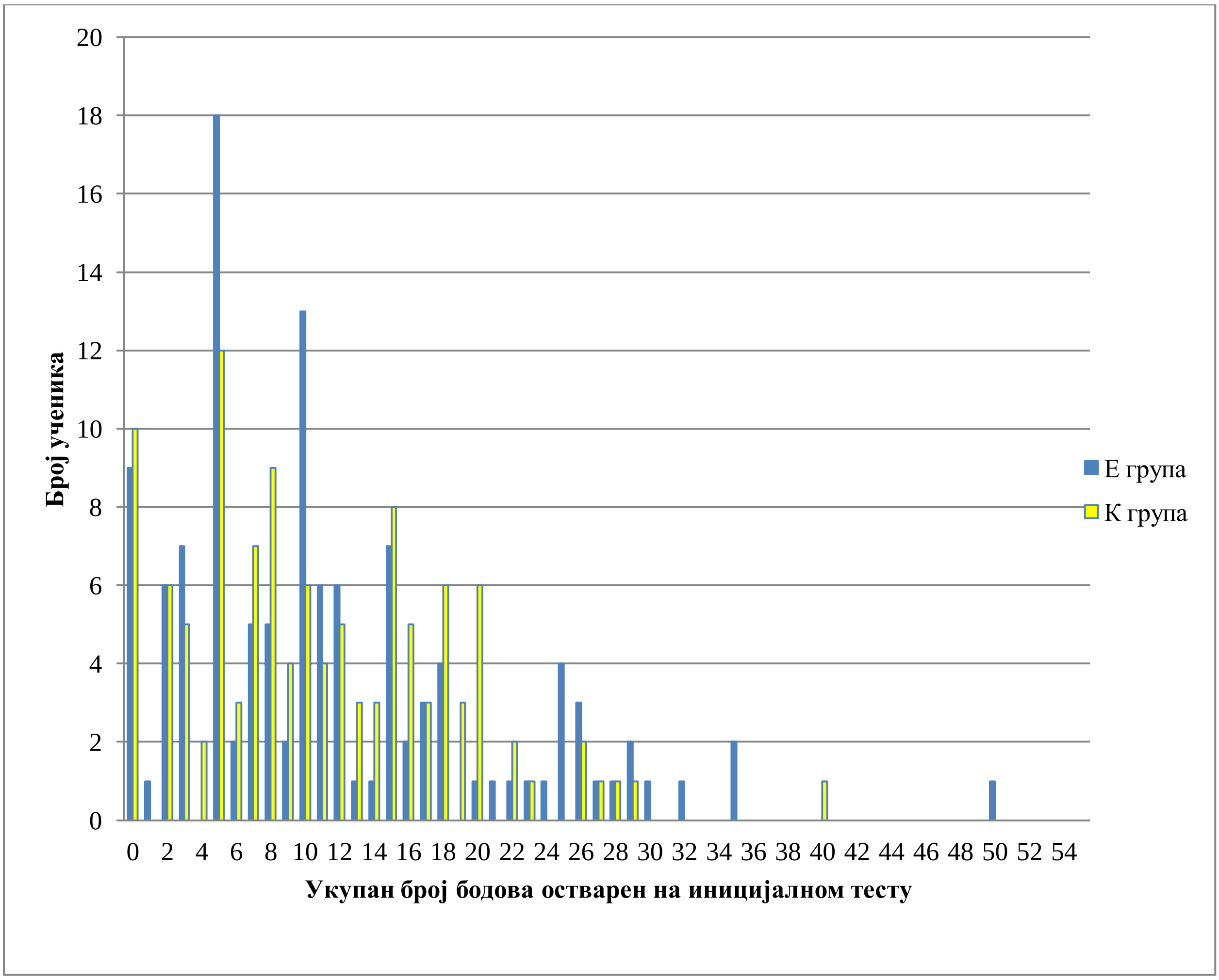
III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

1. АНАЛИЗА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА У РАЗВИЈАЊУ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА

1.1. Резултати иницијалног тестирања ученика

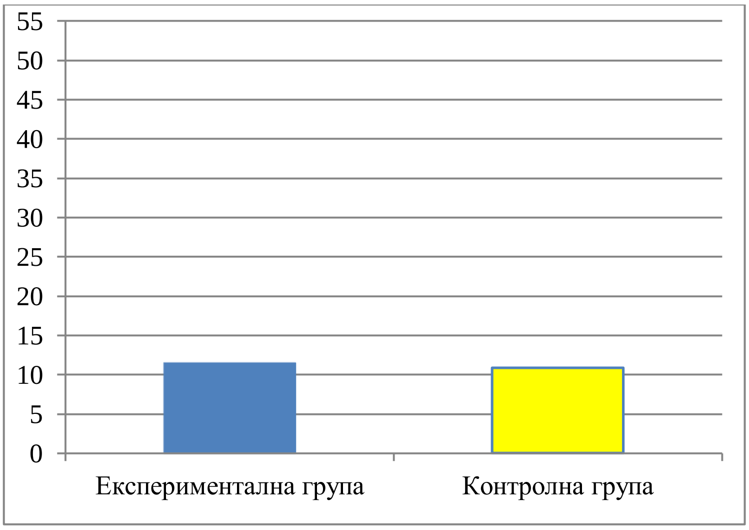
Иницијални тест логичког мишљења послужио је као критеријум уједначавања експерименталне и контролне групе ученика.

На основу добијених резултата направљен је графички приказ (Графикон 1) на којем је представљена прерасподела бодова по ученицима.



Графикон 1. *Приказ резултата иницијалног теста по броју освојених поена*

Просечан број поена који су освојиле експериментална и контролна група ученика представљен је на графикону 2. Просечан број остварених поена ученика Е групе је 11.49 и нешто је већи од просечног броја поена који су остварили ученици К групе који износи 10.87.



Графикон 2. *Просечан број поена остварен на иницијалном мерењу логичког мишљења*

Резултати, односно низак просечан број поена на иницијалном тесту логичког мишљења, који су оствариле обе групе, говори да логичко мишљење ученика није у довољној мери развијено.

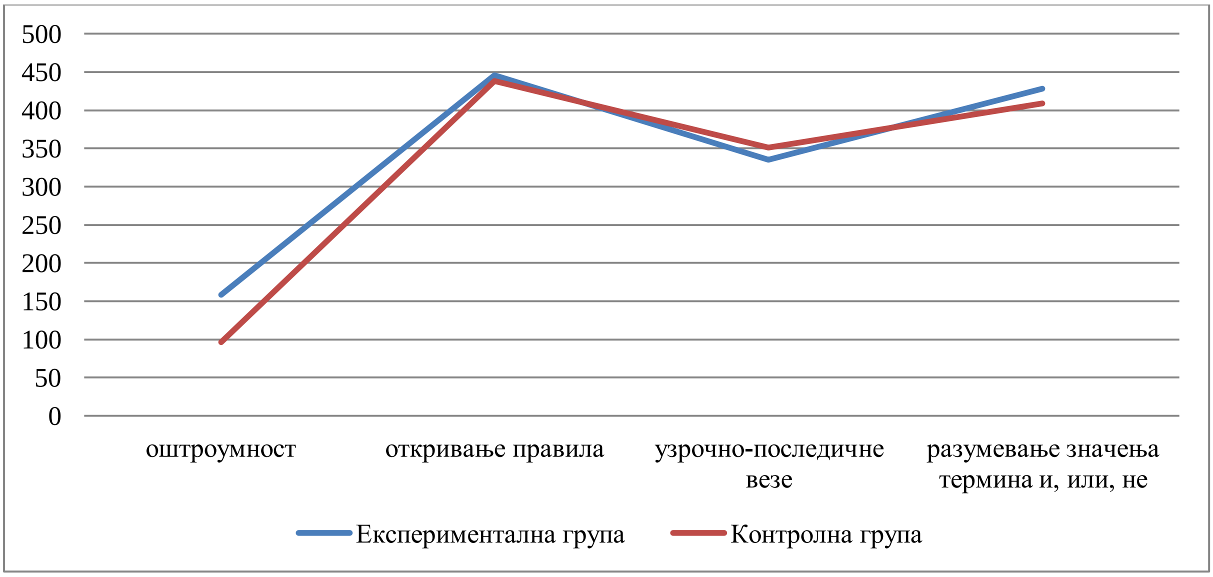
Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика Е и К групе, дошли смо до показатеља представљених у табели 20.

Табела 20. *Нормалност расподеле резултата иницијалног теста логичког мишљења*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.150	119	.000	119.05	7 134.500	0.102	0.919
К група	.102	119	.004	119.95			

На основу приказаних података закључује се да не постоји статистички значајна разлика између постигнућа Е и К групе на иницијалном мерењу логичког мишљења. Како у резултатима ученика Е и К групе на иницијалном тесту није откривена статистички значајна разлика, потврђујемо да су групе уједначене у погледу развијености логичког мишљења.

Укупан број поена Е и К групе ученика по издвојеним способностима логичког мишљења представљен је и упоређен графички (Графикон 3).



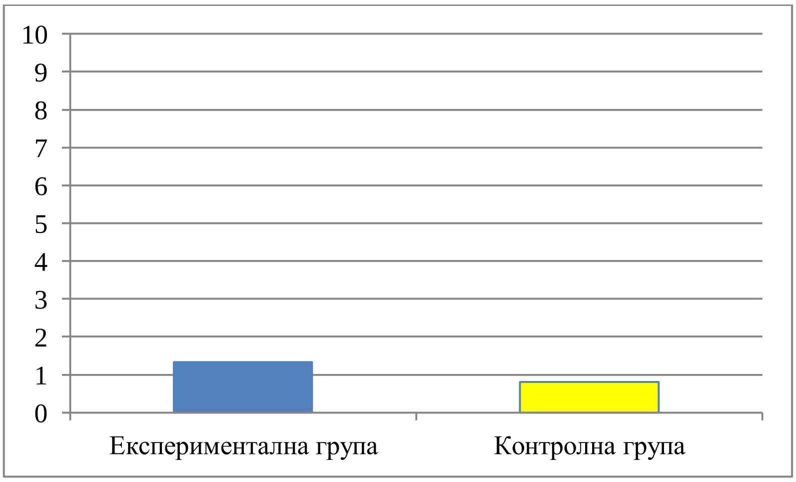
Графикон 3. *Укупан број освојених поена на иницијалном тесту логичког мишљења по издвојеним способностима логичког мишљења*

Како се линије на графикону приближно преклапају, претпостављамо да су групе са аспекта издвојених способности логичког мишљења уједначене, што ћемо у наставку и показати.

1.1.1. Анализа резултата способности откривања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност)

Способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност) мерила су два задатка на иницијалном тесту (1. и 8. задатак).

Графичко приказивање просечног броја добијених поена ученика Е и К групе на групи задатака који мере издвојену способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку дато је на графикону 4.



Графикон 4. *Просечан број поена ученика Е и К групе на задацима који су мерили оштроумност*

Ако анализирамо просечан број бодова остварен на задацима који су мерили способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност), можемо сматрати да ова способност није у довољној мери развијена код ученика. О томе сведочи веома низак број бодова обе групе (Е и К) остварен на овом делу теста. Ученици обе групе испољавају тешкоће у откривању скривених података, чак и када су они индиректно дати у задатку и када их је потребно редефинисати.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности у постигнућима Е и К групе, на задацима који су мерили способност оштроумности, дошли смо до резултата представљених у табели 21.

Табела 21. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере оштроумност и Ман-Витнијев тест*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.446	119	.000	125.27	6 394.0	-1.804	0.071
К група	.492	119	.000	113.73			

На основу добијених резултата утврђујемо да не постоји статистички значајна разлика између укупног броја постигнутих поена на задацима који су мерили способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност) Е и К групе, па их можемо сматрати уједначеним у погледу ове способности.

Показаћемо да су Е и К група по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност уједначене.

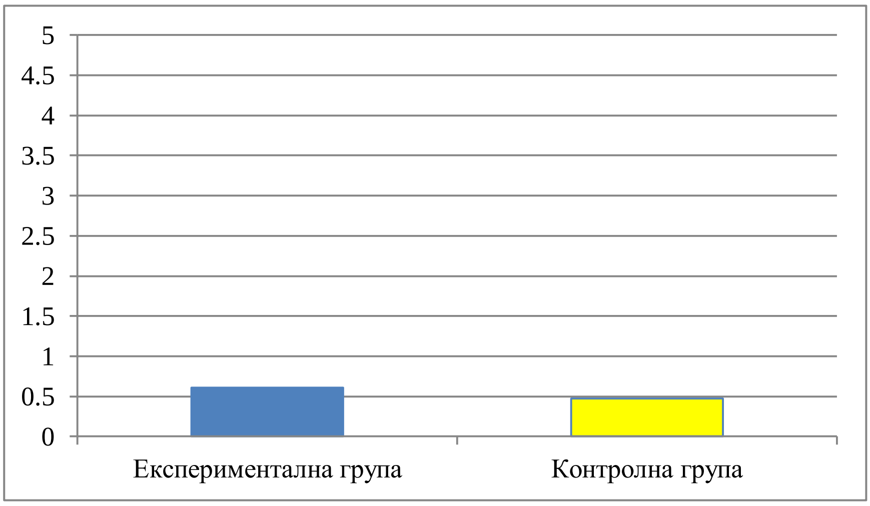
Први задатак није захтевао посебна математичка знања, изузев елементарних знања из области геометрије. Од ученика се захтевало да преброје коцке на задатој слици. Постигнуће ученика у првом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 22.

Табела 22. *Постигнуће ученика у првом задатку иницијалног теста логичког мишљења*

		број поена			Укупно
		0	3	5	
ГРУПА	Е група	100	11	8	119
	К група	103	12	4	119
Укупно		203	23	12	238

Као што се из табеле види, за највећи број ученика први задатак је представљао тешкоћу. Највећи број ученика није схватио да постоје и коцке које нису видљиве јер се налазе у доњем слоју. Мали број ученика је делимично решио задатак, што значи да је успео да изброји коцке једне боје. Одређени број ученика је грешио у томе што су бројали стране коцке које се виде, што указује на чињеницу да тај број ученика има тешкоће у разумевању појмова коцка и квадрат. Најмањи број ученика (5.04%) је успео да реши задатак у потпуности. Наведени подаци говоре о чињеници да је највећи број ученика још увек везан за конкретно, тј. оно што је видљиво на слици и да им недостаје способност уочавања скривених елемената.

Просечан број поена у првом задатку представљен је графиконом 5.



Графикон 5. *Просечан број поена у првом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у првом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика, откривамо резултате који су представљени табелом 23.

Табела 23. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за први задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.502	119	.000	121.22	6 876.0	-0.626	0.531
К група	.513	119	.000	117.78			

Није утврђено постојање статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку између Е групе и К групе ученика. Потврђено је да су у погледу успешности у овом задатку групе уједначене.

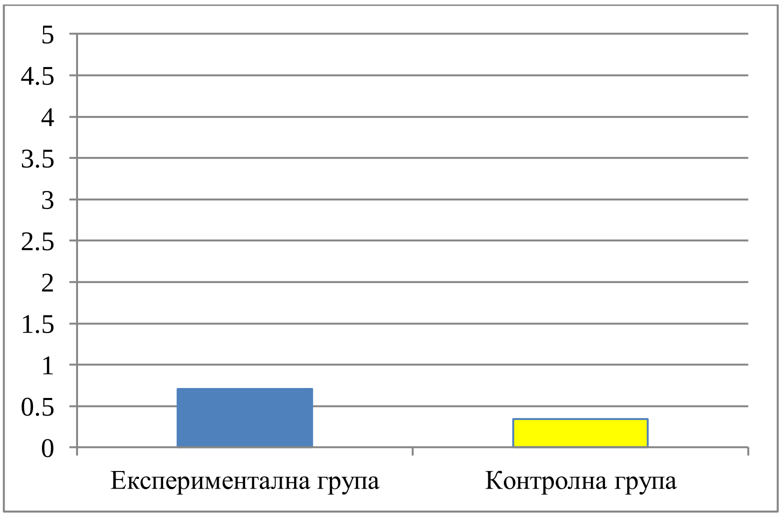
Постигнуће ученика обе групе у решавању осмог задатка приказано је табеларно (Табела 24).

Табела 24. *Постигнуће ученика у осмом задатку иницијалног теста*

		број поена		Укупно
		0 поена	5 поена	
ГРУПА	Е група	102	17	119
	К група	111	8	119
Укупно		213	25	238

Осми задатак је, поред способности коју је мерио, захтевао и познавање садржаја из области разломака. Највећи број ученика није успео да открије податак који је дат у задатку, да четири цвета која су остала Нати представљају четвртину цветова које је она имала на почетку. Друга врста грешке коју је правио велики број ученика односи се на тешкоће у израчунавању целине (броја цветова које је Ната имала на почетку) када је дат део. Такве грешке можемо приписати лошијем познавању садржаја из области разломака. Ученици су сликом представили податке дате у задатку, али услед тешкоћа у разумевању појмова из области разломака, нису успели да израчунају оно што се од њих тражи. Добијени резултати показују да код ученика није у довољној мери развијена способност уочавања скривених елемената. Чак и код ученика који су покушали решити задатак уз помоћ илустрације, уочљиве су тешкоће у разумевању података са те илустрације. То говори о чињеници да је код највећег броја ученика проблем у ригидном понашању у процесу решавања задатка. Основни проблем је што ученици користе дате податке, иако ти подаци треба да послуже за откривање новог податка. Ученици тешко излазе из „шаблона" и стереотипа на које су навикнути и испољавају тешкоће код решавања оваквих задатака где редефиницијом треба доћи до новог податка.

Просечан број поена у осмом задатку представљен је графиконом 6.



Графикон 6. *Просечан број поена у осмом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле укупног броја поена освојених у осмом задатку за обе групе, долазимо до резултата представљених у табели 25.

Табела 25. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за осми задатак*

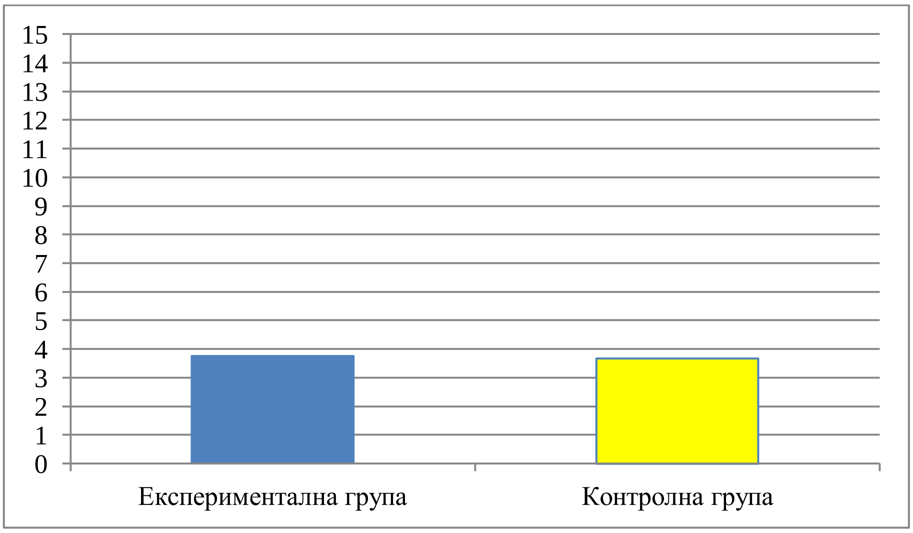
	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.515	119	.000	124.0	6 545.0	-1.899	0.058
К група	.538	119	.000	115.0			

Како експериментална и контролна група немају нормалну расподелу, тестирањем статистичке значајности добијених резултата у осмом задатку, који је мерио способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност), закључујемо да разлика Е и К групе у бодовима оствареним у осмом задатку није статистички значајна. Групе су са аспекта успешности у овом задатку уједначене.

1.1.2. Резултати мерења способности уочавања правила и законитости

Други, трећи и девети задатак на иницијалном тесту су мерили способност уочавања правила и законитости и способност примене откривених правила при решавању математичких задатака.

Просечан број бодова Е и К групе на задацима који су мерили способност уочавања правила и законитости представљен је на графикону 7.



Графикон 7. *Просечан број поена на задацима који су мерили способност откривања правила и законитости*

Добијени резултати показују да способност откривања правила и законитости није у довољној мери развијена код ученика. О томе сведочи низак просечан број бодова обе групе (Е и К) остварен на овом делу теста.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика обе групе (Е и К), на задацима који су мерили способност откривања законитости и правила, утврђени су резултати представљени у табели 26.

Табела 26. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност откривања правила и законитости и Ман-Витнијев тест*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.201	119	.000	119.43	7088.500	0.016	0.987
К група	.205	119	.000	119.57			

На основу добијених резултата, који нису открили постојање статистички значајне разлике између укупног броја поена добијених на овим задацима ученика експерименталне и ученика контролне групе, потврђујемо да су, у развијености способности откривања правила и законитости и примене откривених правила у решавању математичких задатака, групе уједначене.

Показаћемо да су групе (Е и К) и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност уједначене.

Други задатак је од ученика захтевао неку врсту дешифровања датих бројева, односно способност уочавања правила по којем су представљени дати бројеви у задатку и способност примене тог правила при шифровању траженог броја.

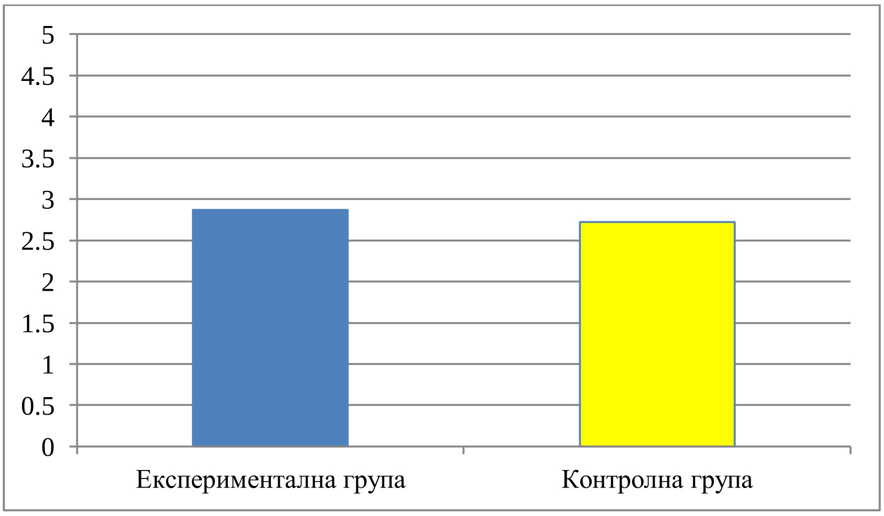
Постигнуће ученика у другом задатку приказано је у табели 27.

Табела 27. *Постигнуће ученика у другом задатку иницијалног теста логичког мишљења*

		број поена			
		0 поена	2 поена	5 поена	Укупно
ГРУПА	Е група	31	33	55	119
	К група	32	37	50	119
Укупно		63	70	105	238

Највећи број ученика је био успешан у решавању овог задатка, њих 105, док је њих 70 било делимично успешно у решавању овог задатка. То говори у прилог чињеници да представљање двоцифрених бројева симболима, уз поштовање правила које су ученици откривали, није превелики захтев за ученике. Такође, из наведених резултата се види да је велики број ученика делимично решио задатак, односно добио два поена. Делимично решен задатак је подразумевао тачно представљање једне цифре (или цифре десетица или цифре јединица) симболима по задатом правилу. Правило по којем је представљен број десетица је било једноставније утврдити па већи број ученика ту није имао тешкоћа. Ученици су најчешће грешили у откривању начина на који је представљен број јединица, јер су два херца представљала једну јединицу. Наведени подаци говоре да већина ученика има потешкоће у извођењу мисаоних операција које су неопходне за решавање наведеног задатка: анализа, упоређивање, синтеза. Како наведене мисаоне операције спадају у компоненте логичког мишљења, то још једном потврђује претпоставку да логичко мишљење ученика није у довољној мери развијено.

Просечан број поена у другом задатку представљен је графиконом 8.



Графикон 8. *Просечан број поена остварен у другом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у другом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика обе групе, долазимо до резултата представљених табеларно (Табела 28).

Табела 28. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за други задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.305	119	.000	121.62	6 828.5	-0.509	0.611
К група	.282	119	.000	117.38			

Потврђујемо да нема статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе. Стога, можемо тврдити да су групе у погледу успешности у другом задатку уједначене.

Трећи задатак је захтевао способност откривања правила по којем су у два круга уписани бројеви и примену тог правила на откривање броја који недостаје у трећем кругу. При његовом решавању је било доста тешкоћа. Трећи задатак је, уз способност откривања правила и законитости, захтевао и основна знања о рачунским операцијама, као и овладавање таблицом дељења.

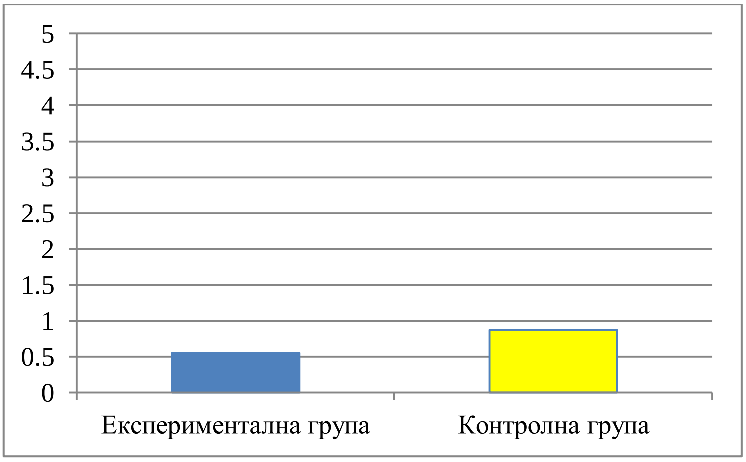
Постигнуће ученика у трећем задатку приказано је табеларно (Табела 29).

Табела 29. *Постигнуће у трећем задатку иницијалног теста*

		број поена			
		0 поена	3 поена	5 поена	Укупно
ГРУПА	Е група	106	0	13	119
	К група	97	3	19	119
Укупно		203	3	32	238

Највећи проценат ученика је имао тешкоће у решавању наведеног задатка, њих 85.29%. У прилог томе говори и податак да највећи број ученика није ни покушао решити поменути задатак. Један од разлога за такав однос према трећем задатку треба тражити у чињеници да се ученици ретко или уопште не срећу са оваквим начином представљања захтева, тј. у уџбеницима математике који се тренутно користе у почетној настави математике, а које смо анализирали приликом избора задатака за иницијални тест, нисмо пронашли овакве, а ни сличне задатке. Сматрамо да је то био највећи проблем за ученике када је у питању трећи задатак. Начин на који је (помоћу кругова) задатак постављен ученицима, за њих је представљао захтев са којим се први пут срећу. Анализа добијених резултата који се односе на укупан број бодова остварен у трећем задатку, указује на чињеницу да највећи проценат ученика одустаје када се нађе пред тешкоћом, пред новим и непознатим проблемом. Ови подаци говоре о чињеници да ученицима недостају све оне карактеристике које су од значаја за даље подстицање и развијање логичког мишљења, а које смо помињали у теоријском делу рада: мотивисаност и жеља за стицањем нових сазнања, стално трагање за новим и оригиналним решењима задатака, отвореност и изношење идеја, радозналост, коришћење различитих мисаоних поступака у решавању математичких проблема и сл.

Просечан број поена остварен у трећем задатку представљен је графиконом 9.



Графикон 9. *Просечан број поена остварен у трећем задатку*

Тестирали смо нормалност расподеле добијених резултата у трећем задатку и статистичку значајност постигнућа Е и К групе (Табела 30).

Табела 30. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за трећи задатак*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.527	119	.000	115.16	7 596.5	1.582	0.114
К група	.495	119	.000	123.84			

У броју бодова ученика Е и К групе остварених у овом задатку није откривена статистички значајна разлика. Дакле, групе су у погледу успешности у трећем задатку уједначене.

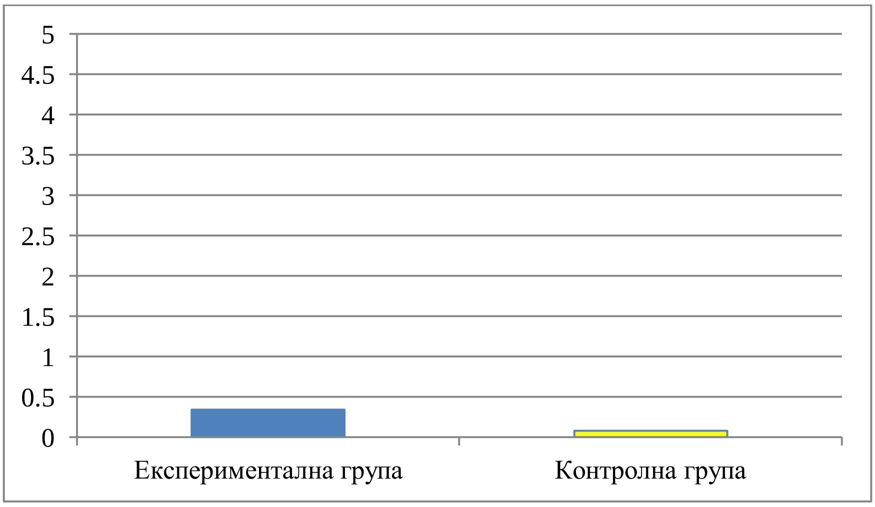
Постигнуће ученика обе групе у деветом задатку приказано је табеларно (Табела 31).

Табела 31. *Постигнуће у деветом задатку иницијалног теста*

		број поена		
		0 поена	5 поена	Укупно
ГРУПА	Е група	111	8	119
	К група	117	2	119
Укупно		228	10	238

У решавању овог задатка велики број ученика је имао тешкоћа у откривању правила по којем су били уписани бројеви у прва два круга. „Лоши резултати ученика у решавању овог задатка су везани за чињеницу да се већина ученика први пут среће са овако формулисаним проблемом. Највећи број ученика није ни покушао решити поменути задатак“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 334). Начин на који је захтев био постављен за ученике је представљао највећу тешкоћу, па су веома често одустајали од решавања деветог задатка. „Било је ученика који су покушали решити задатак о чему сведоче записи у простору за рад (поред кругова), где су покушавали да изврше рачунске операције између датих бројева, али их то није довело до откривања правила и решења задатка“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 334). Добијени резултати, као и у трећем задатку, говоре у прилог чињеници да ученицима недостају квалитети који су од значаја за даље подстицање и развијање логичког мишљења (мотивисаност и жеља за стицањем нових сазнања, стално трагање за новим и оригиналним решењима задатака, отвореност и изношење идеја, радозналост, коришћење различитих мисаоних поступака у решавању математичких проблема и сл.).

Просечан број поена обе групе (Е и К) у деветом задатку иницијалног теста логичког мишљења, представљен је на графикону 10.



Графикон 10. *Просечан број поена остварен у деветом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у деветом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика Е и К групе, утврдили смо резултате представљене у табели 32.

Табела 32. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за девети задатак*

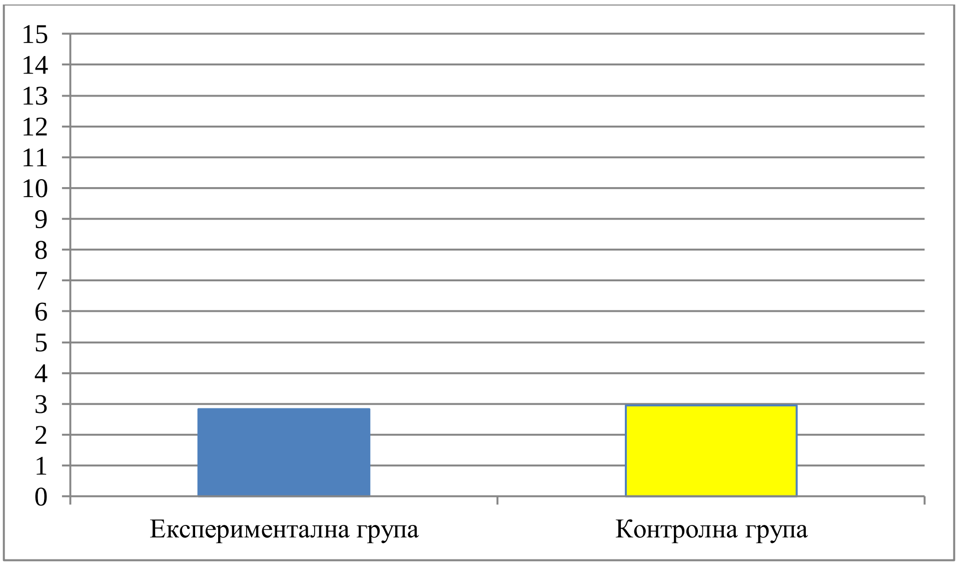
	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.538	119	.000	122.5	6 723.5	-1.934	0.053
К група	.535	119	.000	116.5			

Не постоји статистички значајна разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе. Дакле, групе су у погледу успешности у деветом задатку уједначене.

1.1.3. Анализа резултата способности уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима у задатку

Способност ученика да успоставља узрочно-последичне везе и односе међу елементима у задатку мерили смо четвртим, петим и десетим задатком на иницијалном тесту логичког мишљења.

Графички приказ просечног броја поена остварених на групи задатака који су мерили наведену способност приказан је графиконом 11.



Графикон 11. *Просечан број поена на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза*

Добијени резултати, који се односе на просечан број бодова остварен на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза, указују на чињеницу да ова способност није у довољној мери развијена код ученика. О томе сведочи веома низак просечан број бодова обе групе (Е и К) остварен на овом делу теста.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности у постигнућима између ученика Е и К групе, на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза, утврдили смо резултате представљене у табели 33.

Табела 33. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност уочавања узрочно-последичних веза и Ман-Витнијев тест*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.346	119	.000	117.74	7 290.0	0.432	0.666
К група	.313	119	.000	121.26			

На основу добијених резултата, није утврђено постојање статистички значајне разлике у броју поена Е и К групе остварених на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза. Дакле, групе су уједначене по овом критеријуму, тј. у погледу ове способности.

Показаћемо да су Е и К група и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност уједначене.

Четврти задатак је захтевао познавање природних бројева и операција са њима, а поред тих знања и способност успостављања веза и односа између елемената који су дати у задатку и тражених елемената.

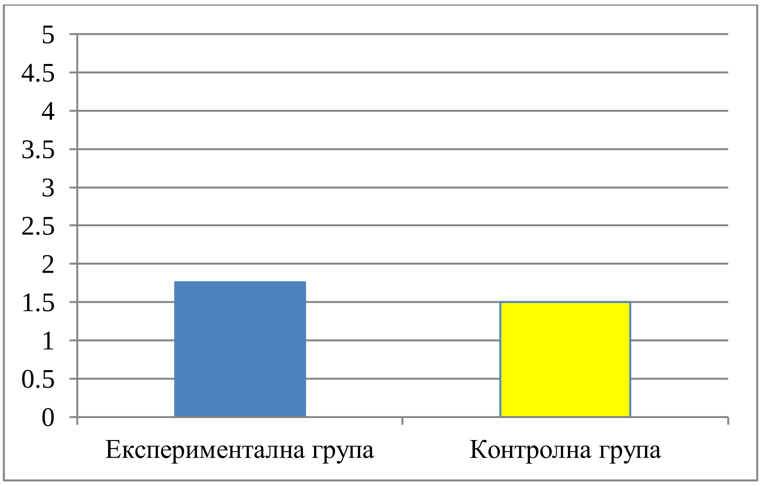
Постигнуће ученика у четвртом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 34.

Табела 34. *Постигнуће ученика у четвртом задатку иницијалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	71	15	0	33	119
	К група	78	13	1	27	119
Укупно		149	28	1	60	238

У решавању четвртог задатка, највећи број ученика је имао тешкоће, њих 149. При решавању четвртог задатка, ученици су најчешће грешили у уочавању везе између два податка дата у задатку. Оно што је, на основу те везе, требало да закључе је чињеница да се наведени подаци разликују за цену једне оловке. Размишљање ученика је требало да иде у правцу да се други податак дат у задатку разликује од првог за цену једне оловке. Највећи број ученика није уочио везу између датих података и самим тим није успео решити задатак. Одређени број ученика је уочио везу, али је имао грешке у рачунању. Анализа добијених резултата у четвртом задатку указује на чињеницу да ученици испољавају тешкоће у анализирању и сагледавању података датих у задатку са различитих становишта (из различитих углова), као и тешкоће у откривању релација и веза између података. Недостаје им способност довођења у везу различитих, најбитнијих информација и способност откривања последица те повезаности елемената.

Просечан број поена у четвртом задатку представљен је графиконом 12.



Графикон 12. *Просечан број поена остварен у четвртом задатку*

Тестирали смо нормалност расподеле добијених резултата у четвртом задатку и статистичку значајност у постигнућима Е и К групе (Табела 35).

Табела 35. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за четврти задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.382	119	.000	123.18	6 643.0	-0.960	0.337
К група	.413	119	.000	115.82			

На основу добијених вредности, потврђујемо да не постоји статистички значајна разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе и да су групе са аспекта успешности у четвртом задатку иницијалног теста уједначене.

Пети задатак је захтевао математичка знања из области природних бројева и операција са њима, али и успостављање узрочно-последичних веза и односа између елемената датих у задатку и тражених елемената. Овај задатак је од ученика захтевао да откривањем веза и односа између података датих у задатку дођу до закључка на који начин могу израчунати број сличица сваке девојчице.

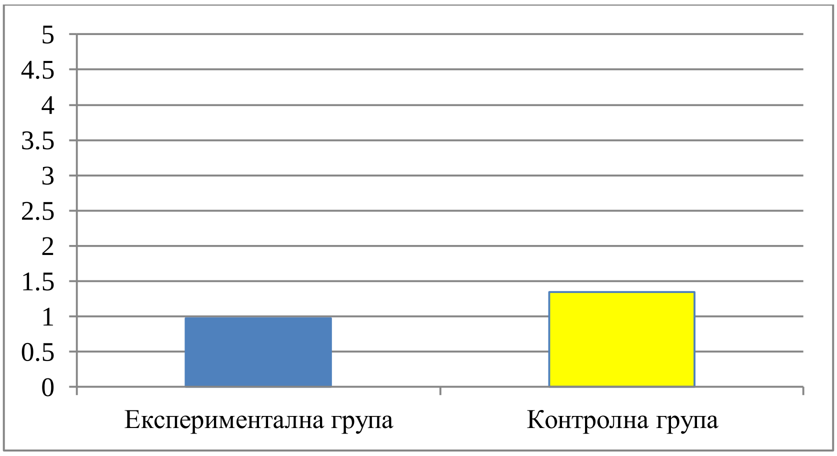
Постигнуће ученика у петом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 36.

Табела 36. *Постигнуће ученика у петом задатку иницијалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	93	6	3	17	119
	К група	81	10	9	19	119
Укупно		174	16	12	36	238

Највећи проценат ученика (73.11%) је испољио тешкоће у решавању петог задатка. Највећи број ученика је имао тешкоће у уочавању и успостављању веза између датих података и није успео доћи до решења. Одређени број ученика је имао грешке у рачунању. Морамо нагласити да је овакав тип задатака заступљен у почетној настави математике, о чему смо говорили у делу о конципирању иницијалног теста, што додатно говори о томе да ученици имају велике тешкоће у погледу способности успостављања узрочно-последичних веза и односа. Добијени резултати говоре да ученицима недостаје способност да дате податке доведу у везу и да на основу те везе дођу до закључка о ономе што је последица те узрочно-последичне повезаности података.

Графички приказ просечног броја поена који су остварили ученици Е и К групе у петом задатку иницијалног теста логичког мишљења представљен је графиконом 13.



Графикон 13. *Просечан број поена освојен у петом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у петом задатку и тестирањем статистичке значајности у постигнућима Е и К групе, утврдили смо резултате представљене у табели 37.

Табела 37. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за пети задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.478	119	.000	114.04	7 730.5	14 870.5	1.573	0.116
К група	.427	119	.000	124.96				

Можемо закључити да нема статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе ученика. Дакле, групе су у погледу успешности у петом задатку уједначене.

Десети задатак је представљао тежи захтев, јер је његово решавање захтевало и познавање методе дужи коју ученици користе за решавање оваквих и сличних проблема. С друге стране, примена наведене методе у решавању олакшава успостављање односа између елемената датих у задатку.

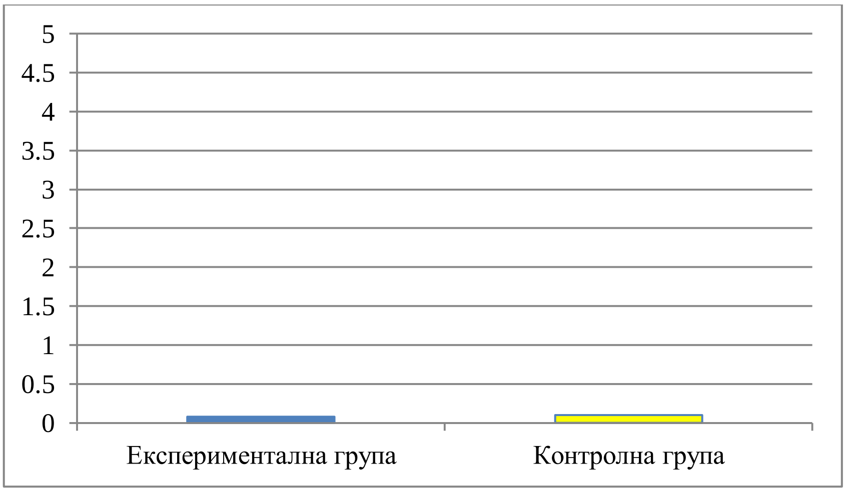
Постигнуће ученика у десетом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 38.

Табела 38. *Постигнуће ученика у десетом задатку иницијалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	117	0	0	2	119
	К група	116	1	1	1	119
Укупно		233	1	1	3	238

Десети задатак је од ученика захтевао откривање нешто сложенијих узрочно-последичних веза које владају између података датих у задатку, па је као такав представљао највећу тешкоћу за ученике. Такви резултати се могу приписати чињеници да велики број ученика нема развијену способност успостављања узрочно-последичних веза и односа између елемената датих у задатку када су поједини подаци представљени преко везе и односа са другим подацима, јер је тако дефинисан однос апстрактан за ученике. Већина ученика има тешкоће и у графичком представљању датих података. Основни проблем при решавању десетог задатка је био у представљању датих података, методом дужи, како би се односи јасније сагледали. Одређени број ученика је покушао представити однос између података који су дати у задатку методом дужи, али су и при том представљању грешили. Веома мали број ученика је успео да представи податке дате у задатку на правилан начин. Морамо напоменути да је било и оних ученика који су методом дужи представили везе које постоје између података датих у задатку, али су грешили у рачуну или начину на који су рачунали број колача на првој и трећој тацни. Све наведене тешкоће које су ученици испољавали приликом решавања десетог задатка на иницијалном тесту, довеле су до тога да је он представљао највећу тешкоћу за ученике.

Графички приказ броја поена остварених у десетом задатку иницијалног теста логичког мишљења представљен је графиконом 14.



Графикон 14. *Просечан број поена у десетом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у десетом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика Е и К групе, открили смо резултате представљене у табели 39.

Табела 39. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за десети задатак*

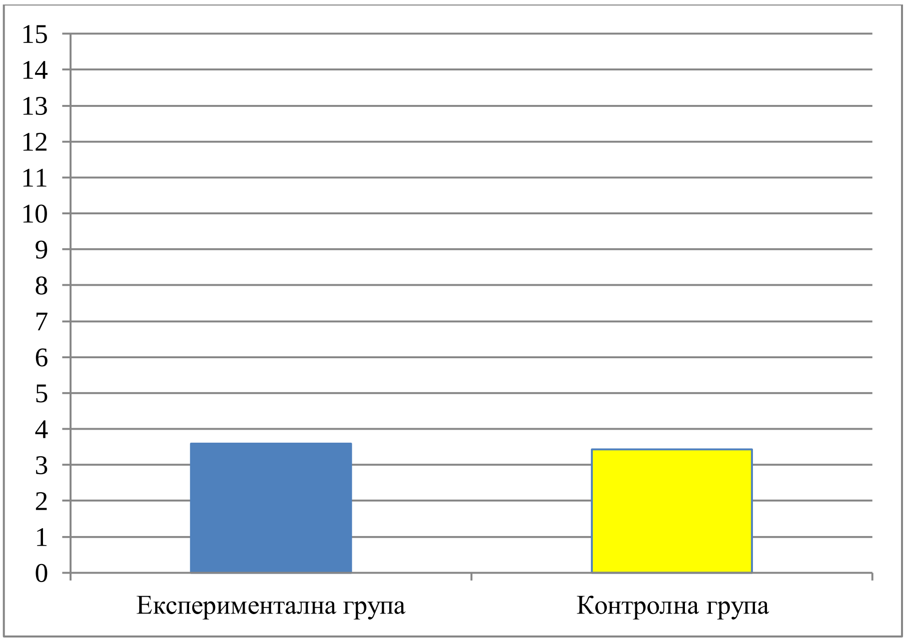
	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.535	119	.000	119.02	7 138.0	0.436	0.663
К група	.537	119	.000	119.98			

Можемо закључити да није уочена статистички значајна разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе. Дакле, групе су у погледу успешности у десетом задатку уједначене.

1.1.4. Резултати мерења способности схватања значења и коришћења појмова и, или, не

Шести, седми и једанаести задатак на иницијалном тесту логичког мишљења мерили су способност схватања значења појмова *и, или* и *не* и способност њиховог коришћења у решавању математичких задатака.

Графички приказ просечног броја поена остварених на групи задатака који су мерили поменуту способност приказан је графиконом 15.



Графикон 15. *Просечан број поена на задацима који су мерили способност схватања значења појмова и, или, не*

Добијени резултати, односно веома низак просечан број бодова обе групе (Е и К) остварен на овом делу теста, говоре о томе да способност схватања значења и коришћења појмова *и*, *или*, *не* није у довољној мери развијена код ученика.

Тестирањем нормалности расподеле укупног броја поена Е и К групе на задацима који су мерили ову способност и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, утврдили смо вредности које су представљене табеларно (Табела 40).

Табела 40. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност схватања појмова и, или, не*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.206	119	.000	119.47	7 084.0	0.007	0.995
К група	.198	119	.000	119.53			

На основу добијених резултата, односно непостојања статистички значајне разлике у укупном броју поена остварених на задацима који су мерили способност разумевања значења појмова *и, или, не* ученика Е и К групе, можемо потврдити да су групе у погледу поменуте способности уједначене.

Показаћемо да су групе (Е и К) и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност уједначене.

Шести задатак је, поред способности разумевања значења термина *и*, *или* и *не*, захтевао и познавање бројева до сто, као и сабирање бројева до сто.

Постигнуће ученика у шестом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 41.

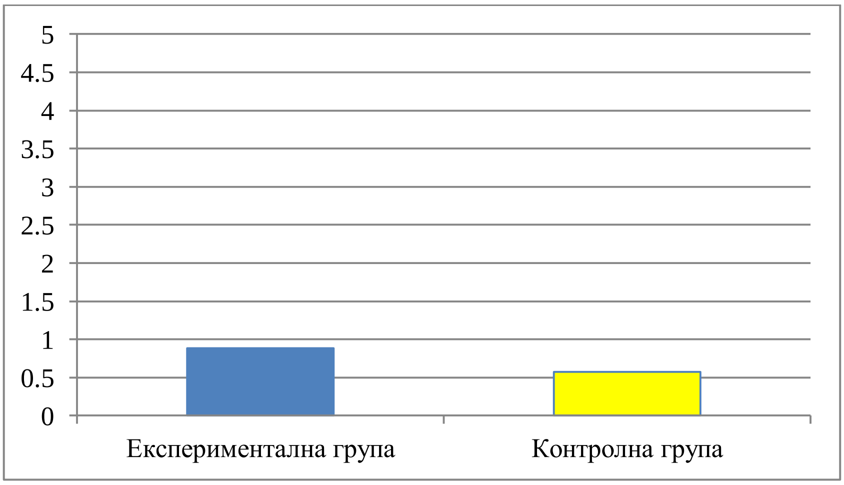
Табела 41. *Постигнуће ученика у шестом задатку иницијалног теста логичког мишљења*

		број поена						
		0	1	2	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	92	4	2	2	4	15	119
	К група	95	11	2	0	2	9	119
Укупно		187	15	4	2	6	24	238

Тешкоће у решавању овог задатка испољавао је највећи број ученика обе групе, њих 187. Формулација задатка, која је захтевала добро познавање значења речи „и“ и „није“, већини ученика је представљала проблем. Добијени резултати, односно мали број ученика (24) који су тачно решили шести задатак, говоре о томе да код већине ученика способност логичког мишљења, која се односи на разумевање значења термина *и*, *или* и *не*, није развијена у довољној мери. Разлог за такве резултате могуће је тражити и у чињеници да логичке операције нису посебно заступљене у програмима математике за млађе разреде основне школе.

При решавању шестог задатка било је различитих врста грешака. Ученици су најчешће грешили у способности коју је мерио шести задатак, односно у разумевању и примени негације *није непаран*. Одређени број ученика је испољавао тешкоће у идентификовању бројева који припадају четвртој десетици и идентификовању највећег броја пете десетице који није паран. Било је и ученика који су грешили у рачунању.

Просечан број поена у шестом задатку представљен је графиконом 16.



Графикон 16. *Просечан број поена остварен у шестом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у шестом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе ученика, дошли смо до показатеља представљених у табели 42.

Табела 42. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за шести задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.462	119	.000	121.81	6 805.5	-0.723	0.470
К група	.455	119	.000	117.19			

На основу статистичких показатеља, потврђујемо да нема статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе. Дакле, групе су са аспекта успешности у шестом задатку уједначене.

Седми задатак је поред знања из области сабирања бројева захтевао и способност разумевања негације.

Постигнуће ученика у седмом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 43.

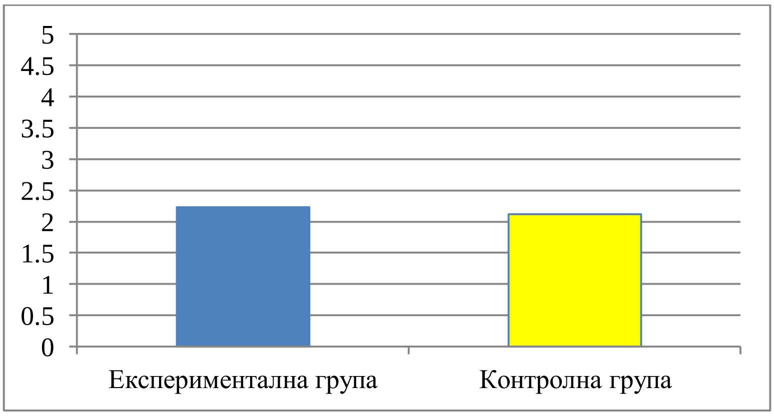
Табела 43. *Постигнуће ученика у седмом задатку иницијалног теста*

		број поена					
		0	1	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	60	3	6	6	44	119
	К група	65	0	7	4	43	119
Укупно		125	3	13	10	87	238

Велики проценат ученика (36.55%) је тачно решио седми задатак у потпуности, док је њих 125 испољило тешкоће у разумевању негације. До оваквих резултата доводи чињеница да сличних задатака има мало или чак и нема у уџбеницима математике за млађе разреде основне школе, о чему смо говорили у делу о конципирању иницијалног теста. С друге стране, логичке операције у почетној настави математике нису посебно предвиђене програмом математике за млађе разреде основне школе, али свакодневна комуникација у почетној настави математике и присутност логичких операција (речи *и, или, не, ако...тада, ако и само ако*) у математичким задацима обавезују учитеље на прецизно и правилно коришћење наведених термина. Само прецизном и правилном употребом наведених логичких операција у почетној настави математике, учитељ ће спонтано припремати ученике да разумеју строге форме логичког мишљења (Шпијуновић, Маричић, 2016: 79).

При решавању седмог задатка ученици су најчешће грешили у разумевању и примени негације. Отежавајућа околност је што се у задатку од ученика два пута захтева негација. Било је ученика који су разумели прву негацију, али испољили тешкоће у разумевању друге негације и бојили погрешна поља. Морамо нагласити и да је било грешака у рачунању, о чему сведоче подаци које су ученици бележили у поља или изнад поља у која су уписани изрази.

Просечан број поена у седмом задатку представљен је графиконом 17.



Графикон 17. *Просечан број поена остварен у седмом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у седмом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа ученика Е и К групе, утврдили смо вредности представљене у табели 44.

Табела 44. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за седми задатак*

	Kolmogorov-Smirnov			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.330	119	.000	121.26	6 871.0	-0.439	0.660
К група	.359	119	.000	117.74			

Нема статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе. Групе су у погледу успешности у седмом задатку уједначене.

Једанаести задатак на иницијалном тесту је мерио способност разумевања логичке функције појмова *и*, *или*, *не*. Поред наведене способности, једанаести задатак је захтевао и елементарна знања о бројевима до сто. Отежавајућа околност за ученике је била та што се у задатку негација јављала два пута, а поред ње ученици су морали добро познавати и употребу речи *и* и *или*.

Постигнуће ученика у једанаестом задатку иницијалног теста логичког мишљења приказано је у табели 45.

Табела 45. *Постигнуће ученика у једанаестом задатку иницијалног теста*

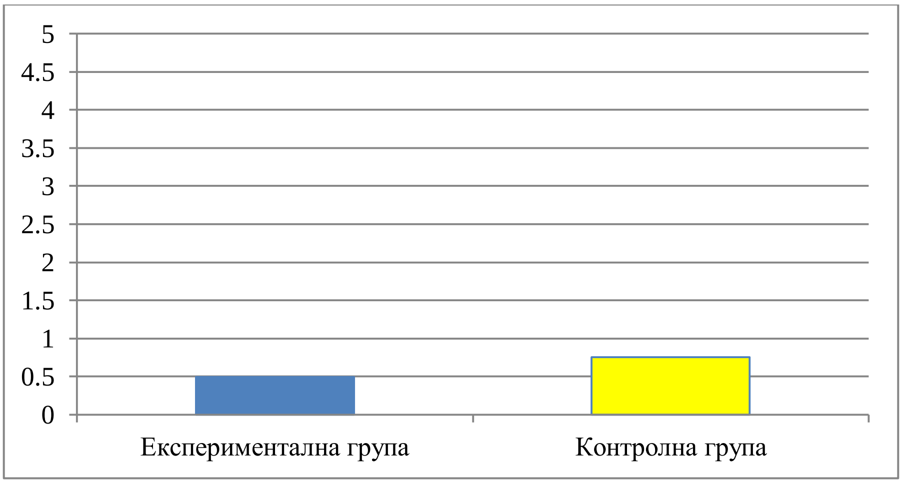
		број поена						Укупно
		0	1	2	3	4	5	
ГРУПА	Е група	102	1	6	0	5	5	119
	К група	92	3	4	7	8	5	119
Укупно		194	4	10	7	13	10	238

За већину ученика једанаести задатак је представљао тешкоћу, њих 194. Отежавајућа околност у решавању овог задатка је што је његово решавање захтевало добро разумевање значења више термина *и*, *или*, *не*, односно што је задатак имао више захтева датих истовремено, а било га је могуће решити само разумевањем и заједничком применом свих захтева.

Како је једанаести задатак на иницијалном тесту мерио способност разумевања значења термина *не*, *и* и *или*, при његовом решавању било је различитих грешака. Највише грешака у решавању једанаестог задатка ученици су испољавали у разумевању друге негације у задатку.

Добијени резултати и анализа врсте грешака говоре о чињеници да највећи проценат ученика може применити једну логичку операцију, али да имају извесне тешкоће у примени двоструке негације, као и тешкоће у истовременом укључивању два или више податка, тј. тешкоће у схватању суштине везника „и“ и „или“, да оно што је повезано тим везницима истовремено важи и да те податке морају истовремено узети у обзир.

Просечан број поена у једанаестом задатку представљен је графиконом 18.



Графикон 18. *Просечан број поена у једанаестом задатку*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у једанаестом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе ученика, дошли смо до статистичких показатеља представљених у табели 46.

Табела 46. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за једанаести задатак*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.				
Е група	.502	119	.000	114.62	7 661.0	1.615	0.106
К група	.463	119	.000	124.38			

Није утврђена статистички значајна разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе. Дакле, групе су у погледу успешности у једанаестом задатку уједначене.

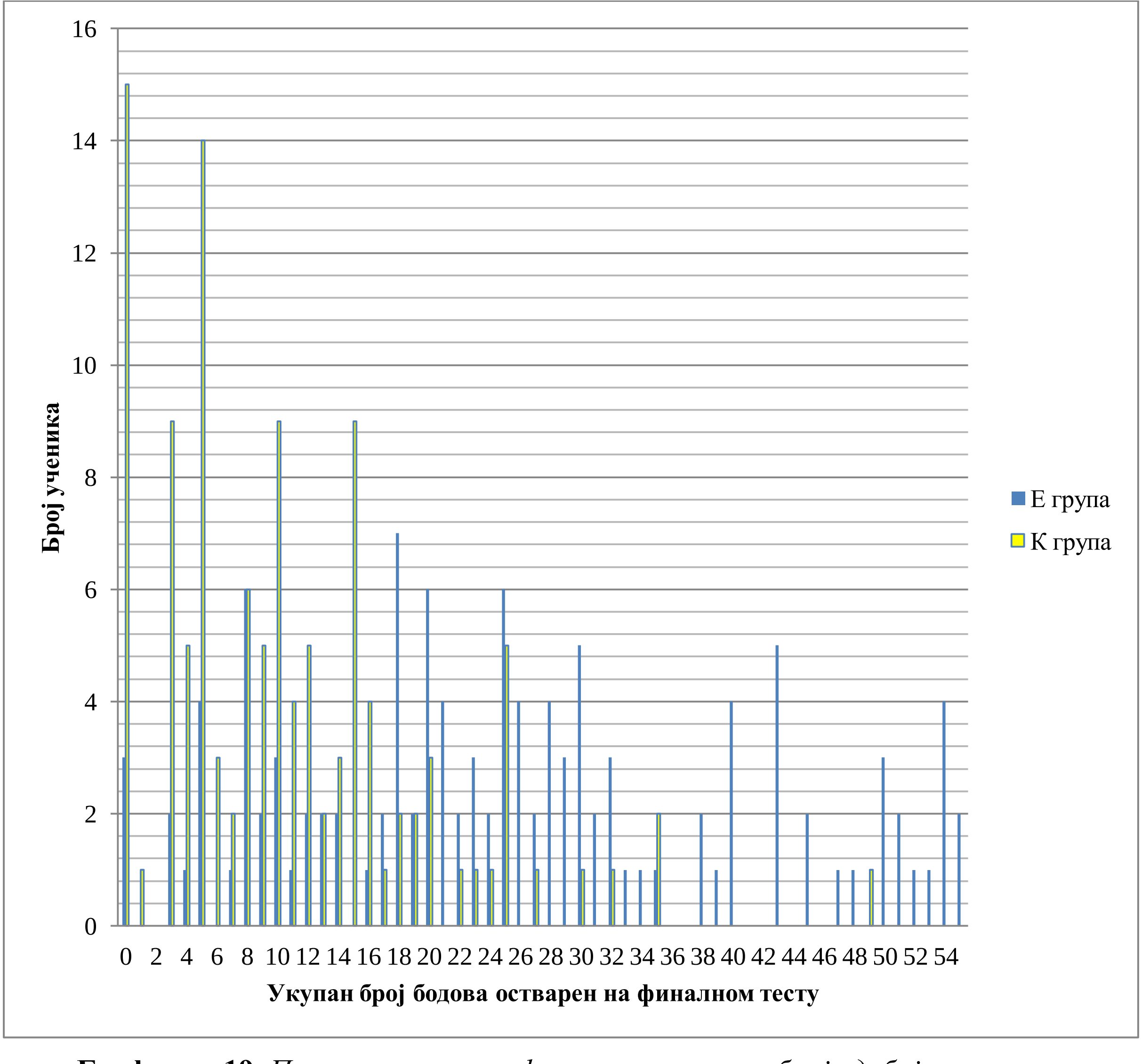
***

Показали смо да су Е и К група на иницијалном мерењу уједначене како у погледу развијености логичког мишљења, тако и са аспекта сваке од четири посматране способности логичког мишљења. Такође, групе су, ако се посматра сваки задатак иницијалног мерења појединачно, уједначене.

1.2. Резултати финалног тестирања ученика

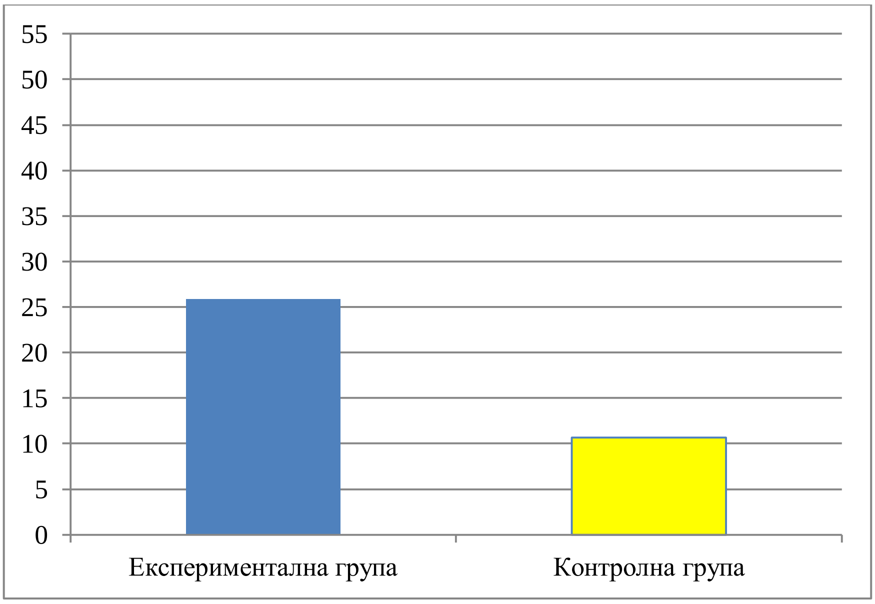
Финални тест логичког мишљења служио је за утврђивање статистичких разлика у резултатима ученика експерименталне и контролне групе. Он је послужио да испитамо ефекте и утицај експерименталног програма на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

На основу добијених резултата направљен је графички приказ (Графикон 19) на којем је представљена прерасподела бодова по ученицима.



Графикон 19. *Приказ резултата финалног теста по броју добијених поена*

Просечан број поена који су освојиле Е и К група ученика представљен је на графикону 20. Просечан број поена ученика експерименталне групе износи 25.85 и већи је од просечног броја поена који су остварили ученици контролне групе, који износи 10.68.



Графикон 20. *Просечан број поена остварен на финалном мерењу логичког мишљења*

На финалном тесту логичког мишљења већи просечан број поена су остварили ученици експерименталне групе у односу на просечан број поена ученика контролне групе на овом тесту. То говори у прилог чињеници да је експериментални фактор позитивно утицао на ову врсту математичког мишљења.

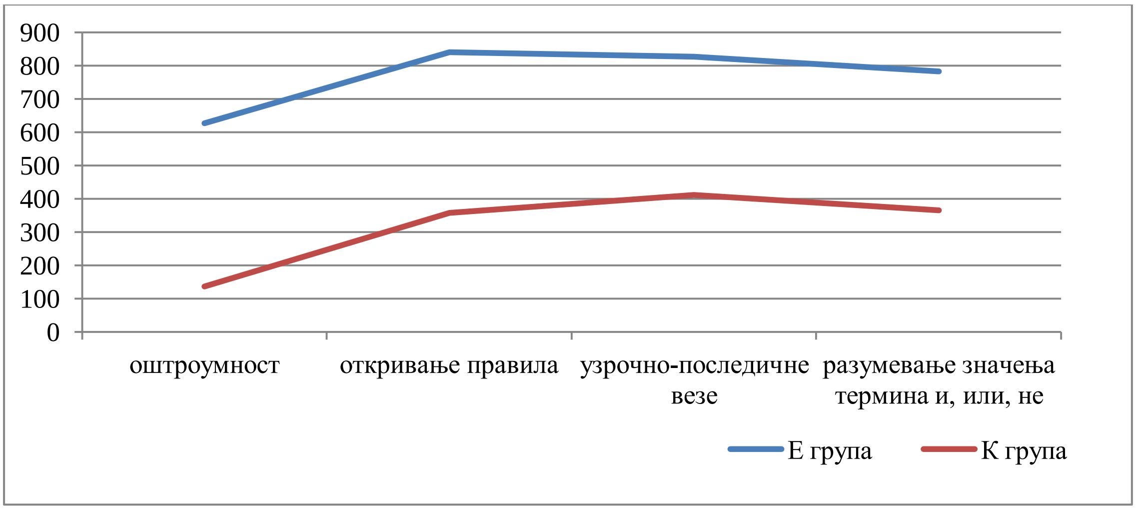
Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата на финалном мерењу логичког мишљења и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, добили смо показатеље представљене у табели 47.

Табела 47. *Нормалност расподеле резултата финалног теста логичког мишљења и Ман-Витнијев тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.078	119	.074	156.61	2665.00	9805.000	-8.321	0.000
К група	.114	119	.001	82.39				

На основу добијених података, утврђено је постојање статистички значајне разлике између постигнућа Е и К групе ученика на финалном мерењу логичког мишљења (U = 2665.0, p = 0.000). Резултати указују на чињеницу да су одговарајући, посебно конструисани задаци (експериментални фактор), имали велики утицај на развијање логичког мишљења ученика Е групе.

Укупан број поена Е и К групе ученика по издвојеним способностима логичког мишљења на финалном тесту представљен је и упоређен графички (Графикон 21).



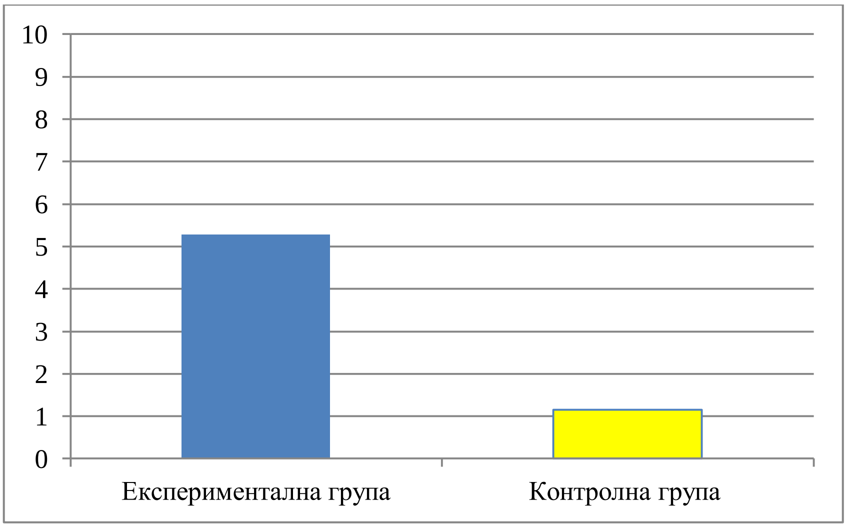
Графикон 21. *Укупан број освојених поена на финалном тесту логичког мишљења по издвојеним способностима логичког мишљења*

Како се линије на графикону доста разликују, то указује на чињеницу да су посебно конструисани задаци (експериментални фактор) позитивно деловали на развијање свих издвојених способности логичког мишљења ученика експерименталне групе, што ћемо тестирањем значајности разлика проверити.

1.2.1. Резултати финалног мерења способности откривања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност)

Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку (оштроумност) мерила су два задатка на финалном тесту (1. и 8. задатак).

Графички приказ просечног броја поена Е и К групе остварених на групи задатака који мере способност откривања скривених (удаљених) елемената у задатку приказан је графиконом 22.



Графикон 22. *Просечан број поена на задацима који су мерили оштроумност на финалном тесту*

Добијени резултати који се односе на просечан број бодова остварен на задацима који су мерили способност откривања скривених елемената у задатку на финалном тесту, говоре у прилог чињеници да је Е група постигла боље резултате, тј. задаци које су током експерименталног програма радили су позитивно деловали на подстицање и развијање ове способности.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, на задацима који су мерили способност оштроумности, утврдили смо вредности представљене у табели 48.

Табела 48. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере оштроумност и Ман-Витнијев тест за финално тестирање*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.176	119	.000	156.47	2680.500	9820.500	-8.859	0.000
К група	.447	119	.000	82.53				

На основу добијених резултата, утврђена је разлика између укупног броја добијених поена на овим задацима Е и К групе ученика и она је статистички значајна. Дакле, посебно конструисани задаци садржани у експерименталном програму су у значајној мери допринели подстицању и развијању способности оштроумности.

Показаћемо да се групе (Е и К) по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност разликују.

Први задатак на финалном тесту логичког мишљења мерио је способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу на примеру који је нешто сложенији од задатка на иницијалном тесту. Од ученика се захтевало да преброје сиве и беле коцке на слици.

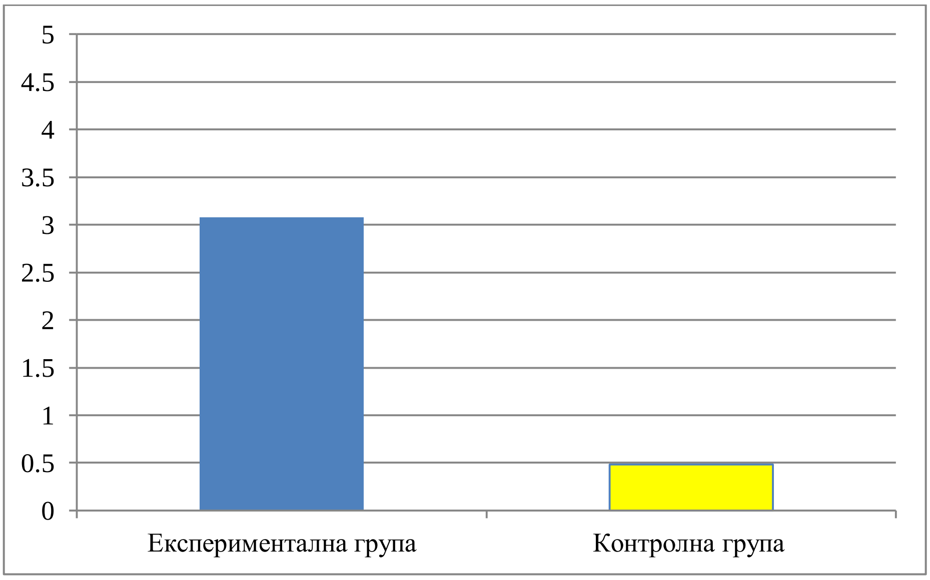
Постигнуће ученика у првом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 49.

Табела 49. *Расподела поена у првом задатку финалног теста логичког мишљења*

		број поена			Укупно
		0 поена	3 поена	5 поена	
ГРУПА	Е група	36	24	59	119
	К група	102	14	3	119
Укупно		138	38	62	238

У К групи највише ученика (102) је и даље испољавало грешке у решавању наведеног задатка. Највећи број ученика контролне групе није схватио да постоје и коцке које се налазе у доњем слоју и нису видљиве на слици. Мали број ученика контролне групе је делимично решио задатак, што значи да је успео да изброји коцке једне боје. Најмањи број ученика К групе (2.52%) је успео да реши задатак у потпуности. Наведени подаци говоре о чињеници да је највећи број ученика контролне групе још увек остао везан за оно што је видљиво на слици и да им недостаје способност уочавања скривених елемената. Дакле, ученици контролне групе и даље праве исте грешке као на иницијалном тесту. У експерименталној групи, резултати су значајно бољи него на иницијалном тесту. Највећи број ученика Е групе је успео у потпуности да реши задатак, тј. да тачно изброје коцке обе боје. То потврђује да су посебно конструисани задаци експерименталног програма у значајном степену допринели подстицању и развијању способности уочавања удаљених елемената у задатку. Ученици експерименталне групе сада јасније знају да постоје и коцке које се налазе у доњем слоју, а које се не виде. Они више немају толико тешкоћа у увиђању скривених елемената. Само известан број ученика Е групе и даље има тешкоћа.

Просечан број поена у првом задатку представљен је графиконом 23.



Графикон 23. *Просечан број поена остварен у првом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у првом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, добили смо вредности представљене у табели 50.

Табела 50. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за први задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.306	119	.000	155.67	2776.500	9916.500	-9.157	0.000
К група	.511	119	.000	83.33				

Можемо закључити да је разлика откривена у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе статистички значајна. Експериментални програм је веома позитивно деловао на способност логичког мишљења коју је мерио први задатак.

Осми задатак на финалном тесту је од ученика захтевао, поред способности коју је мерио, и познавање садржаја из области разломака.

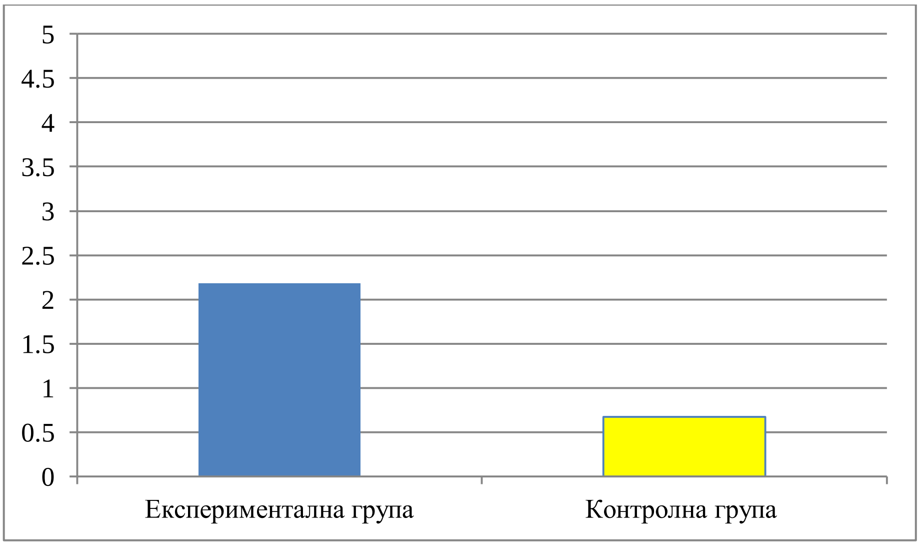
Постигнуће ученика у осмом задатку приказано је табеларно (Табела 51).

Табела 51. *Постигнуће ученика у осмом задатку финалног теста*

		број поена		
		0 поена	5 поена	Укупно
ГРУПА	Е група	67	52	119
	К група	103	16	119
Укупно		170	68	238

Постигнуће ученика контролне групе се није поправило у односу на резултате остварене на иницијалном мерењу. На финалном мерењу ученици К групе су правили идентичне грешке онима које су имали на иницијалном тесту. Највећи број ученика контролне групе није успео да открије податак који је скривен у поставци задатка. Постигнуће ученика Е групе се значајно поправило у односу на иницијални тест. Велики проценат ученика Е групе је успео тачно решити наведени задатак (43.7%). Ученици Е групе сада јасније увиђају скривене елементе у задатку. Значајно се поправио њихов начин размишљања о подацима датим у задатку. Ученици Е групе сада посматрају податке дате у задатку из другог угла и тиме откривају податак који није директно дат. Након реализације експерименталног програма они напуштају ригидни начин размишљања и стереотипе и сада редефиницијом долазе до новог податка. Код одређеног броја ученика Е групе присутне су грешке, али у већем броју случајева су то оне које се односе на познавање садржаја из области разломака. Наиме, они су успевали открити скривени податак (о чему сведочи илустрација у простору за рад), али услед тешкоћа у разумевању појмова из области разломака, нису успели да израчунају оно што је од њих тражено.

Просечан број поена у осмом задатку представљен је графиконом 24.



Графикон 24. *Просечан број поена остварен у осмом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у осмом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе утврдили смо показатеље представљене у табели 52.

Табела 52. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за осми задатак финалног теста*

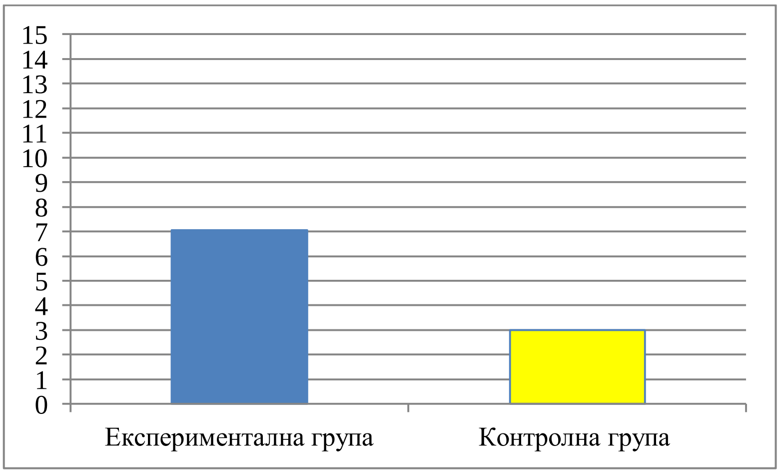
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.373	119	.000	137.5	4938.500	12078.500	-5.155	0.000
К група	.518	119	.000	101.5				

Можемо закључити да је разлика између бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе статистички значајна. На основу добијених вредности, потврђено је да је експериментални програм утицао на боље резултате које је постигла Е група ученика.

1.2.2. Резултати финалног мерења способности уочавања правила и законитости

Други, трећи и девети задатак на финалном тесту су мерили способност уочавања правила и законитости и способност примене откривених правила при решавању математичких задатака.

Просечан број бодова на задацима који су мерили ову способност на финалном тестирању, представљен је графиконом 25.



Графикон 25. *Просечан број поена на задацима који су мерили способност откривања правила и законитости на финалном тесту*

Резултати о просечном броју поена оствареном на задацима који су мерили способност откривања правила и законитости, показују да је Е група остварила боље резултате у поређењу са просечним бројем поена који је остварила контролна група. То указује на чињеницу да је експериментални програм позитивно деловао на подстицање и развијање способности откривања правила и законитости.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности између резултата Е и К групе, на задацима који су мерили способност откривања законитости и правила, добили смо вредности представљене у табели 53.

Табела 53. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност откривања правила и законитости на финалном тесту*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.170	119	.000	146.37	3883.00	11023.00	-6.240	0.000
К група	.310	119	.000	92.63				

Постоји разлика у броју бодова остварених на овим задацима ученика Е и К групе и она је статистички значајна. Значајан напредак уочљив је код ученика Е групе. Решавање задатака који су чинили експериментални фактор је значајно утицало на развијање способности откривања правила.

Показаћемо да се групе (Е и К) и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност разликују.

Други задатак на финалном тесту је од ученика захтевао дешифровање датих бројева, односно способност уочавања правила по којем су представљена три троцифрена броја у задатку и способност примене тог правила при шифровању задатог троцифреног броја.

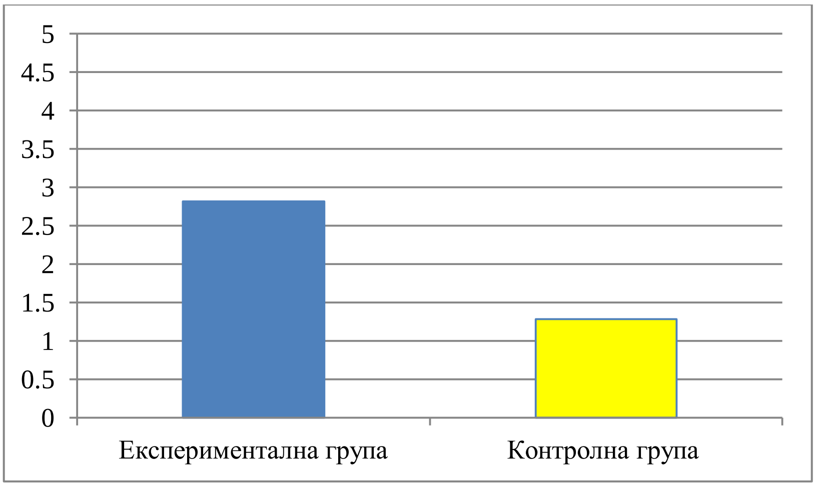
Расподела поена Е и К групе у другом задатку приказана је табелом 54.

Табела 54. *Расподела поена за други задатак финалног теста логичког мишљења*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	45	12	10	52	119
	К група	86	4	5	24	119
Укупно		131	16	15	76	238

„Постигнућа ученика контролне групе су лошија него на иницијалном тесту. Ученици К групе су правили већи број грешака при дешифровању и шифровању троцифрених бројева. Код ученика Е групе постигнућа су значајно боља у односу на постигнућа ученика К групе“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 335). Највећи број ученика Е групе је открио правило по којем су представљене цифра стотина, цифра десетица и цифра јединица. Поене су најчешће губили у откривању начина на који су шифроване цифра стотине и цифра десетице. „Одређени број ученика је тачно открио правило по којем су представљени троцифрени бројеви, што се закључује на основу записа у простору за рад, али је при шифровању траженог броја изостављао неки симбол. То упућује на закључак да је већина ученика Е групе разумела суштину задатка, али је и даље имала тешкоће у примени правила“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 335). Добијени подаци говоре у прилог чињеници да је експериментални програм позитивно деловао на развијање способности откривања правила. Ученици Е групе сада јасније изводе мисаоне операције које су неопходне за решавање наведеног задатка: анализа, упоређивање, синтеза и др.

Просечан број поена у другом задатку представљен је графиконом 26.



Графикон 26. *Просечан број поена остварен у другом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у другом задатку, и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, утврдили смо вредности представљене табелом 55.

Табела 55. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за други задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.269	119	.000	139.66	4681.000	11821.000	-5.051	0.000
К група	.451	119	.000	99.34				

Добијени показатељи откривају постојање статистички значајне разлике између бодова остварених у овом задатку Е и К групе. Стога, можемо закључити да је експериментални програм у великој мери допринео бољим резултатима које су остварили ученици Е групе у другом задатку.

Трећи задатак је, поред испитивања способности откривања правила и способности примене правила, захтевао и основна знања о рачунским операцијама.

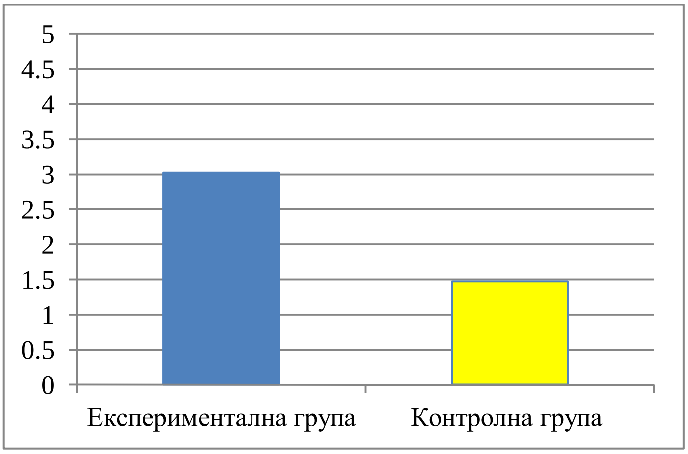
Расподела поена остварених у трећем задатку приказана је у табели 56.

Табела 56. *Постигнуће ученика у трећем задатку финалног теста*

		број поена			Укупно
		0 поена	4 поена	5 поена	
ГРУПА	Е група	47	1	71	119
	К група	84	0	35	119
Укупно		131	1	106	238

Ученици К групе и даље у највећем степену испољавају тешкоће и праве грешке у откривању правила. Посебно је важно истаћи и да је значајан број ученика К групе био успешнији него на иницијалном тесту и успео решити задатак. Е група је у овом задатку била доста успешнија, што можемо приписати позитивном деловању експерименталног програма. „Највећи проценат ученика Е групе, више нема тешкоћа у откривању правила. Од 47 ученика Е групе који нису тачно решили трећи задатак, има и оних који су успели да открију правило, али су правили грешке у извршавању рачунских операција. Напредак ученика Е групе се највише огледа у чињеници да они након примене експерименталног програма другачије размишљају када се нађу пред проблемом овог типа. Њихово мишљење је флексибилније и у свему теже открити неки поредак, правило, законитост. Активности које предузимају када се нађу пред оваквим и сличним проблемима говоре да њихово понашање није стереотипно, већ увек настоје открити нешто ново" (Јовановић, Вуловић, 2021: 335–336). Њих сада красе све оне карактеристике које смо помињали у теоријском делу рада, које су од значаја за даље развијање логичког мишљења: радозналост, отвореност за нове идеје, стално трагање за новим и оригиналним решењима задатака и коришћење различитих мисаоних поступака у решавању математичких проблема. Они су сада више мотивисани и имају жељу за стицањем нових сазнања.

Просечан број поена остварен у трећем задатку представљен је графиконом 27.



Графикон 27. *Просечан број поена остварен у трећем задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у трећем задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, долазимо до вредности приказаних табелом 57.

Табела 57. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за трећи задатак на финалном тесту*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.388	119	.000	137.85	4896.500	12036.500	-4.765	0.000
К група	.446	119	.000	101.15				

Можемо закључити да је утврђена разлика у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе статистички значајна. Другим речима, под утицајем експерименталног програма долази до значајног напредовања Е групе ученика у успешности у трећем задатку.

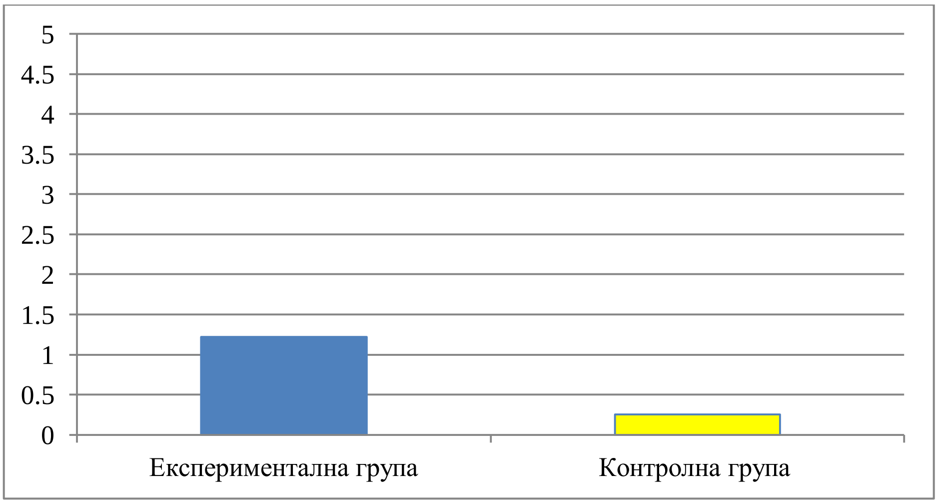
Постигнуће ученика у *деветом задатку* приказано је табеларно (Табела 58).

Табела 58. *Постигнуће ученика у деветом задатку финалног теста*

		број поена		
		0 поена	5 поена	Укупно
ГРУПА	Е група	90	29	119
	К група	113	6	119
Укупно		203	35	238

Тешкоће су и даље присутне код највећег броја ученика када је у питању девети задатак. То потврђује да је начин на који је проблем постављен већини ученика велика тешкоћа, јер њихово мишљење није флексибилно и не могу да изађу из стереотипних оквира. Већина ученика К групе има стереотипан начин мишљења. То је случај и код одређеног броја ученика Е групе, о чему сведоче записи у простору за рад (око кругова). Ученици обе групе су најчешће рачунали „збир“ датих бројева. Знатно већи број ученика експерименталне групе је успео решити овај проблем. „Највећи напредак се види у њиховом начину размишљања. Они сада дате бројеве посматрају на другачији начин и теже пронаћи нов начин доласка до решења. Мишљење одређеног броја ученика експерименталне групе је значајно отвореније за нове идеје и флексибилније“ (Јовановић, Вуловић, 2021: 336). Добијени резултати говоре у прилог чињеници да су задаци које су решавали ученици Е групе (експериментални програм) позитивно деловали на подстицање и развијање способности уочавања правила и законитости. Ученици Е групе сада другачије поступају када се нађу пред проблемом, радознали су, мотивисани и вођени жељом да открију решење. Експериментални програм је позитивно деловао на особине ученика које су од значаја за даље подстицање и развијање логичког мишљења (стално трагање за новим и оригиналним решењима задатака, отвореност и изношење идеја). Ученици Е групе при решавању задатка користе различите мисаоне поступке у решавању математичких проблема.

Просечан број поена у деветом задатку финалног теста логичког мишљења, представљен је графиконом 28.



Графикон 28. *Просечан број поена у деветом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у деветом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, утврдили смо показатеље представљене у табели 59.

Табела 59. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за девети задатак финалног теста*

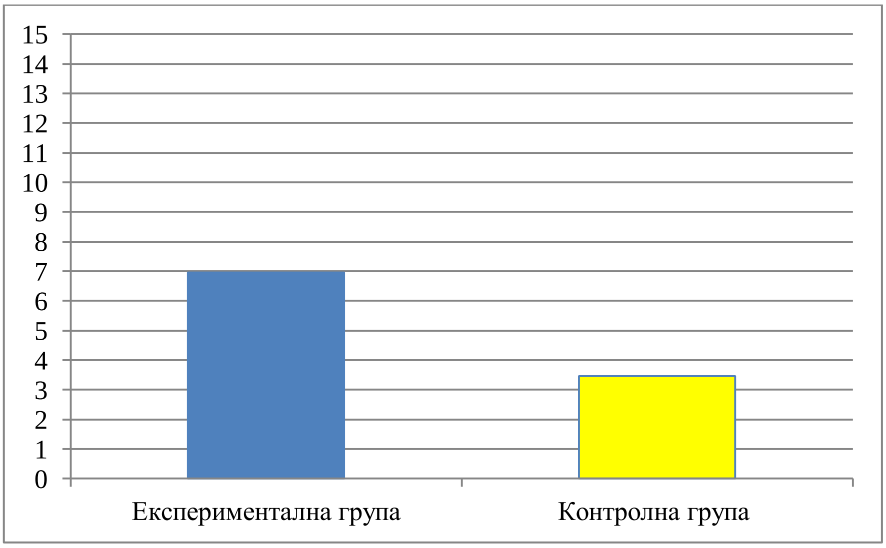
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.470	119	.000	131.00	5712.000	12852.000	-4.201	0.000
К група	.540	119	.000	108.00				

Добијене вредности показују да постоји разлика у броју бодова остварених у овом задатку између Е и К групе и да је она статистички значајна. Дакле, групе се у погледу успешности у деветом задатку статистички значајно разликују. Експериментални фактор (посебно креирани задаци) је у великој мери утицао на боље резултате које је постигла Е група ученика у овом задатку.

1.2.3. Резултати финалног мерења способности уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима у задатку

Способност успостављања узрочно-последичних релација и односа међу елементима у задатку мерили смо четвртим, петим и десетим задатком на финалном тесту логичког мишљења.

Графички приказ просечног броја поена на овим задацима приказан је на графикону 29.



Графикон 29. *Просечан број поена остварен на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза на финалном тесту логичког мишљења*

На финалном мерењу логичког мишљења експериментална група је остварила већи просечан број поена у односу на просечан број поена који је остварила контролна група. Добијени резултати, који се односе на просечан број поена остварен на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза на финалном тесту логичког мишљења, показују да је експериментални програм позитивно деловао на подстицање и развијање ове способности.

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза, дошли смо до резултата представљених у табели 60.

Табела 60. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност уочавања узрочно-последичних веза на финалном тесту логичког мишљења и Ман-Витнијев тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.125	119	.000	143.71	4199.500	11339.500	-5.551	0.000
К група	.263	119	.000	95.29				

Утврђена разлика између броја поена ученика Е и К групе добијених на задацима који су мерили способност уочавања узрочно-последичних веза је статистички значајна. Групе се статистички значајно разликују у степену развијености ове способности. Експериментални фактор (посебно креирани задаци) је значајно допринео развијању ове способности код ученика Е групе.

Показаћемо да се групе (Е и К) разликују и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност и да су те разлике статистички значајне.

Четврти задатак на финалном тесту је, поред способности коју је мерио, захтевао и елементарна математичка знања из области природних бројева и операција са њима.

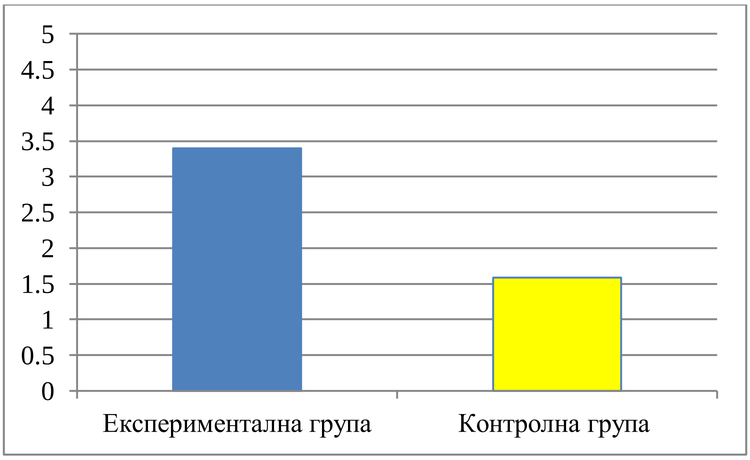
Постигнуће ученика у четвртом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 61.

Табела 61. *Постигнуће ученика у четвртом задатку финалног теста*

		број поена				Укупно
		0	3	4	5	
ГРУПА	Е група	32	14	2	71	119
	К група	76	13	0	30	119
Укупно		108	27	2	101	238

Постигнуће ученика К групе у четвртом задатку је приближно исто као и на иницијалном мерењу. Уочљиво је побољшање Е групе. Е група у четвртом задатку постиже значајно боље резултате. Бољи резултати указују да су задаци из експерименталног програма веома позитивно деловали на развијање способности уочавања узрочно-последичних веза. Ученици Е групе сада јасније успостављају релације између података изнетих у задатку и тражених података. Често тај однос представљају и сликом, што јасно указује на чињеницу да разумеју узрочно-последичне везе које постоје између елемената датих у задатку и немају тешкоћа да их представе. Највећи број ученика Е групе јасно је разумео да се наведени подаци у задатку разликују за цену једне свеске. То им је довољан податак на основу којег схватају како ће израчунати цену свеске, а затим и цену књиге. Напредак ученика Е групе је у самом начину размишљања. Они податке дате у задатку сада посматрају другачије и траже узрочно-последичне везе између датих података. Напредак се огледа и у систематичности у раду, што доприноси јаснијем сагледавању узрочно-последичних веза. Ученици бележе шта је дато, а шта се тражи и сагледавањем датих и тражених елемената, уочавају постојеће узрочно-последичне везе између података и успостављају нове, како би дошли до решења.

Просечан број поена остварен у четвртом задатку представљен је графиконом 30.



Графикон 30. *Просечан број поена остварен у четвртом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у четвртом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе у четвртом задатку, откривамо статистичке показатеље представљене у табели 62.

Табела 62. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за четврти задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.366	119	.000	143.47	4228.000	11368.000	-5.900	0.000
К група	.404	119	.000	95.53				

На основу статистичких показатеља, утврђено је да постоји разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе и да је она статистички значајна. Другим речима, експериментални програм је у великој мери утицао на боље резулате ученика Е групе.

Пети задатак на финалном тесту је, поред способности коју је мерио, захтевао и основна знања из области природних бројева и операција са њима. Уочавањем узрочно-последичних веза и односа ученици су могли открити начин на који ће израчунати број књига на свакој полици у библиотеци.

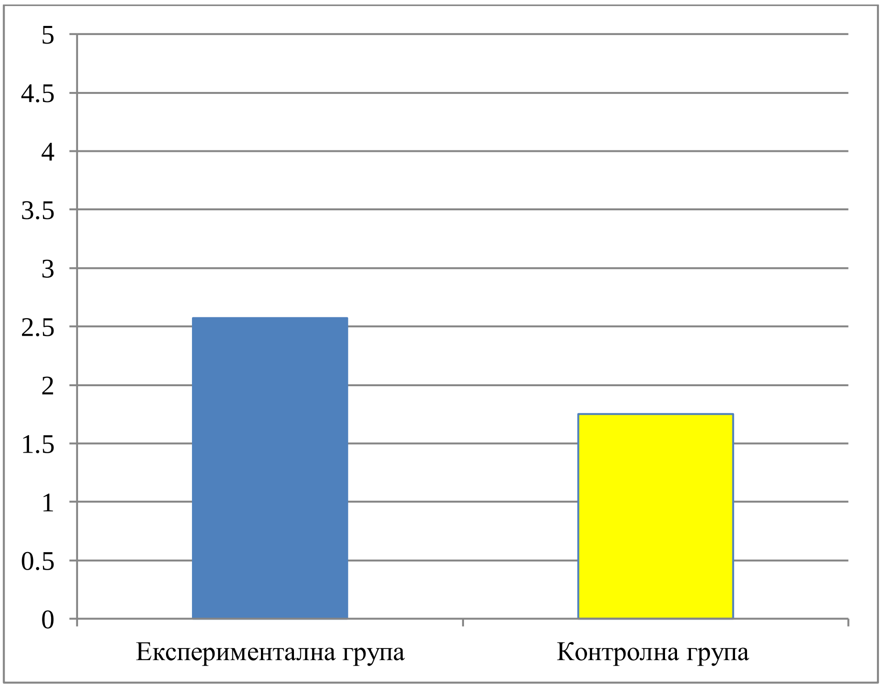
Постигнуће ученика у петом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 63.

Табела 63. *Постигнуће ученика у петом задатку финалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	52	8	13	46	119
	К група	71	10	12	26	119
Укупно		123	18	25	72	238

Оваквих и сличних задатака има у почетној настави математике, па су на финалном мерењу обе групе биле успешније. К група је била мало успешнија него на иницијалном мерењу, док је Е група постигла видно боље резултате него на иницијалном мерењу. Напредак ученика Е групе се огледа у систематичнијем решавању задатка, при чему су узрочно-последичне везе које постоје између података датих у задатку јасно представљене и тиме уочљивије и разумљивије. Ученици Е групе често податке представљају сликом, што указује на чињеницу да јасније сагледавају узрочно-последичне везе између података, јасно их схватају и разумеју, па више немају великих тешкоћа у решавању оваквих и сличних задатака. Добијени резултати говоре да су задаци примењени у експерименталном програму у великој мери допринели бољим резултатима Е групе.

Просечан број остварених поена у петом задатку финалног теста логичког мишљења, представљен је графиконом 31.



Графикон 31. *Просечан број поена остварен у петом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у петом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, откривамо показатеље представљене у табели 64.

Табела 64. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за пети задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.302	119	.000	131.10	5700.000	12840.000	-2.849	0.004
К група	.384	119	.000	107.90				

Откривено је да постоји разлика у броју бодова остварених у овом задатку ученика Е и К групе и да је она статистички значајна. Дакле, групе се у погледу резултата у петом задатку статистички значајно разликују. Овакви резултати се могу приписати позитивном утицају експерименталног програма, који је довео до значајно бољих резултата код ученика Е групе.

Десети задатак је на финалном тесту представљао велику тешкоћу за ученике, али је напредак ученика Е групе веома значајан.

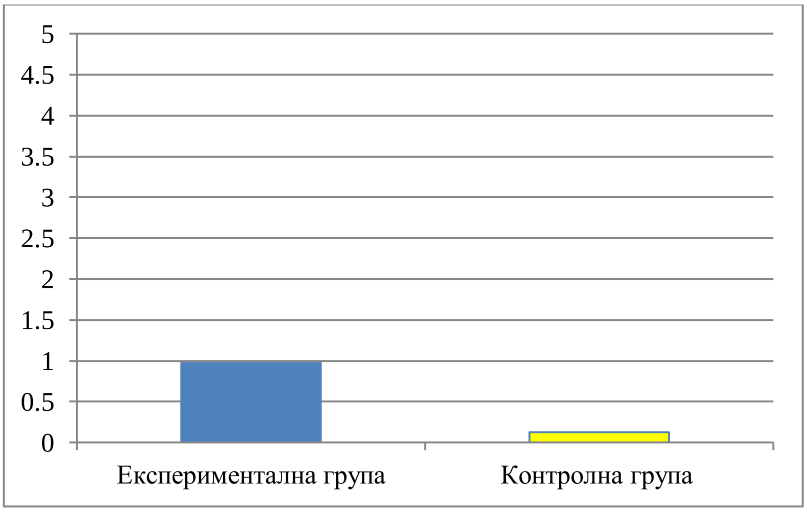
Постигнуће ученика у десетом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 65.

Табела 65. *Постигнуће ученика у десетом задатку финалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	94	3	3	19	119
	К група	116	0	0	3	119
Укупно		210	3	3	22	238

Контролна група је остварила скоро идентичне резултате као на иницијалном тесту. Код Е групе резултати су значајно бољи, што можемо приписати позитивном деловању експерименталног програма. Напредак ученика Е групе се огледа, пре свега, у систематичности и јаснијем уочавању узрочно-последичних веза. Они чешће примењују методу дужи и самим тим јасније уочавају везе које постоје између података. Начин размишљања ученика Е групе усмерен је на јасније и систематичније сагледавање датих и тражених података, јасније успостављање узрочних релација и последичних веза између њих и решавање проблема уз помоћ тих веза. На тај начин, они схватају како могу израчунати тражени број сличица у сваком од албума. Они сада у извесном степену поседују и способност да на основу успостављених узрочно-последичних веза, изводе закључке који следе као последица те повезаности. Овде морамо нагласити да резултати показују да је овакав тип задатака најтежи за ученике, јер су односи између података у задатку доста сложени и поједини подаци су представљени преко везе и односа са другим подацима, а тако дефинисан однос је још увек апстрактан за ученике. Са друге стране, напредак ученика експерименталне групе охрабрује, јер говори у прилог чињеници да је могуће подстицати способност успостављања узрочно-последичних односа и када су они сложени и апстрактни.

Просечан број добијених поена у десетом задатку финалног теста логичког мишљења, представљен је графиконом 32.



Графикон 32. *Просечан број поена остварен у десетом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у десетом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе ученика у десетом задатку, утврдили смо статистичке показатеље представљене у табели 66.

Табела 66. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за десети задатак финалног тестирања*

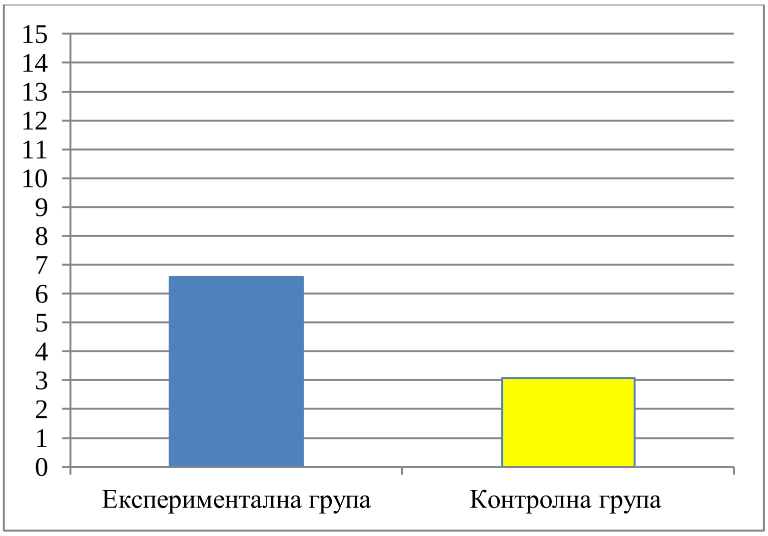
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.484	119	.000	130.42	5780.500	12920.500	-4.381	0.000
К група	.538	119	.000	108.58				

Добијени показатељи су потврдили постојање разлике у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе, као и да је та разлика статистички значајна. Групе се у погледу успешности у десетом задатку статистички значајно разликују. Статистички значајну разлику можемо приписати утицају експерименталног програма. Дакле, одређени задаци садржани у експерименталном програму су у великој мери утицали на боље резултате које су остварили ученици Е групе.

1.2.4. Резултати финалног мерења способности схватања значења и коришћења појмова и, или, не

Шести, седми и једанаести задатак на финалном тесту логичког мишљења мерили су способност схватања значења појмова *и*, *или* и *не* у решавању математичких задатака.

Графички приказ просечног броја поена добијених на задацима који су мерили способност схватања значења и коришћења појмова *и, или, не* на финалном мерењу приказан је на графикону 33.



Графикон 33. *Просечан број поена на задацима који су мерили способност разумевања логичког смисла појмова и, или, не на финалном мерењу*

Добијени резултати који се односе на просечан број поена остварен на задацима који су мерили способност разумевања логичког смисла појмова *и*, *или*, *не* на финалном тесту, показују да је експериментални фактор извршио позитиван утицај на поменуту способност, на шта указује већи просечан број поена који је остварила Е група ученика.

Тестирањем нормалности расподеле укупног броја поена Е и К групе на задацима који су мерили способност схватања значења појмова *и, или, не* и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, добили смо статистичке вредности представљене у табели 67.

Табела 67. *Нормалност расподеле бодова остварених на задацима који мере способност разумевања логичког смисла појмова и, или, не на финалном мерењу*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.136	119	.000	145.97	3931.000	11071.000	-6.040	0.000
К група	.234	119	.000	93.03				

На основу добијених резултата и вредности, потврђено је постојање статистички значајне разлике у броју поена Е и К групе остварених на задацима који су мерили способност схватања значења појмова *и*, *или*, *не*. Групе се статистички значајно разликују у погледу развијености ове способности. Одговарајући задаци који су чинили експериментални фактор су значајно допринели развијању способности схватања значења појмова *и*, *или*, *не* код ученика Е групе.

Показаћемо да се групе (Е и К) разликују и по броју поена освојених у сваком појединачном задатку који је мерио ову способност и да су те разлике статистички значајне.

Шести задатак је мерио способност разумевања значења термина *и*, *или* и *не*. Поред наведене способности, захтевао је и познавање бројева до хиљаду, као и сабирање бројева до хиљаду.

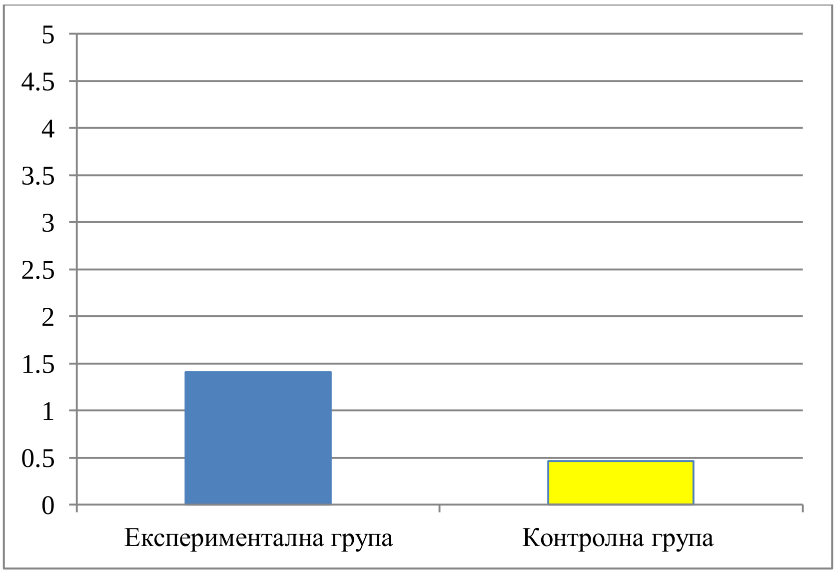
Постигнуће ученика у шестом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 68.

Табела 68. *Постигнуће ученика у шестом задатку финалног теста логичког мишљења*

		број поена						
		0	1	2	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	75	10	1	2	5	26	119
	К група	101	8	0	0	3	7	119
Укупно		176	18	1	2	8	33	238

Ученици К групе су правили идентичне грешке као на иницијалном мерењу. Значајно боље резултате остварују ученици Е групе. Њихов напредак се огледа у бољем разумевању логичких операција, односно у бољем разумевању значења термина *и*, *или* и *не*. Они су пажљивији у раду и схватају суштину наведених термина. Поступност и систематичност у раду ученика Е групе, доводи их до јаснијег сагледавања термина у задатку и они у решавању задатка поступно испуњавају све услове. Поменуто говори да је експериментални програм позитивно деловао на разумевање значења термина *и*, *или* и *не*, као и на способност примене логичких операција при решавању математичких задатака. Експериментални програм је допринео јаснијем сагледавању реченица у којима се јављају наведени термини, што ће ученицима бити од велике користи за касније прихватање формалног начина излагања логике, као и за даље развијање логичког мишљења.

Просечан број поена у шестом задатку представљен је графиконом 34.



Графикон 34. *Просечан број поена остварен у шестом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у шестом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе у шестом задатку, дошли смо до статистичких вредности приказаних табелом 69.

Табела 69. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за шести задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.379	119	.000	133.28	5441.000	12581.000	-4.011	0.000
К група	.486	119	.000	105.72				

Статистичке вредности указују на постојање разлике. Разлика која је утврђена у броју поена остварених у овом задатку ученика Е и К групе (U = 5441.0, p = 0.000) је статистички значајна. Закључујемо да се групе у погледу успешности у шестом задатку статистички значајно разликују и да је експериментални програм у великој мери утицао на боље резултате ученика Е групе.

Седми задатак је, поред способности коју је мерио, захтевао и знања из области сабирања бројева до хиљаду.

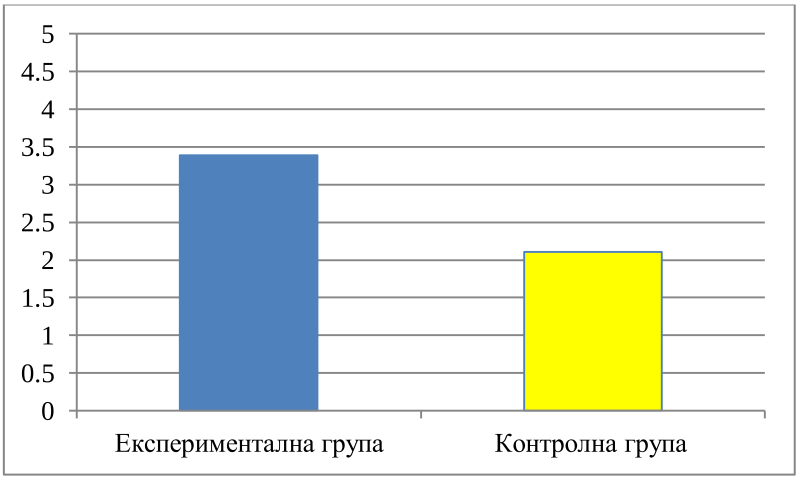
Постигнуће ученика у седмом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 70.

Табела 70. *Постигнуће ученика у седмом задатку финалног теста*

		број поена				
		0	3	4	5	Укупно
ГРУПА	Е група	35	2	13	69	119
	К група	63	7	15	34	119
Укупно		98	9	28	103	238

Резултати ученика Е и К групе се веома разликују. У К групи највећи број ученика (63) није успео решити седми задатак, док је највећи број ученика у Е групи успео тачно решити задатак. Ученици К групе су правили идентичне грешке као на иницијалном тестирању. Код ученика Е групе напредак у разумевању термина *и*, *или* и *не* је очигледан. Напредак ученика Е групе се види у јасном разумевању негације *нису парни* и *није могла записати*. Напредак се огледа и у томе што они поступно решавају задатак, део по део, и тиме јасније сагледавају прво прву негацију, а затим другу и испуњавају све услове задатка. Резултати показују да ученици Е групе разумеју значење термина *и*, *или* и *не* и испољавају способност примене конјункције, дисјункције и негације у задацима. Експериментални програм је позитивно деловао на прецизно и тачно коришћење термина *и*, *или* и *не*.

Просечан број поена у седмом задатку представљен је графиконом 35.



Графикон 35. *Просечан број поена остварен у седмом задатку финалног мерења*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у седмом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе, утврђени су показатељи представљени табелом 71.

Табела 71. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за седми задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.345	119	.000	137.99	4880.000	12020.000	-4.501	0.000
К група	.350	119	.000	101.01				

Добијени показатељи откривају разлику. Разлика која је откривена у броју поена остварених у седмом задатку ученика Е и К групе је статистички значајна. Дакле, закључујемо да се групе у погледу успешности у седмом задатку статистички значајно разликују и ту разлику можемо приписати утицају експерименталног програма.

Једанаести задатак је захтевао добро разумевање термина *и, или* и *не*. Овај задатак је представљао највећу тешкоћу за ученике на финалном тесту.

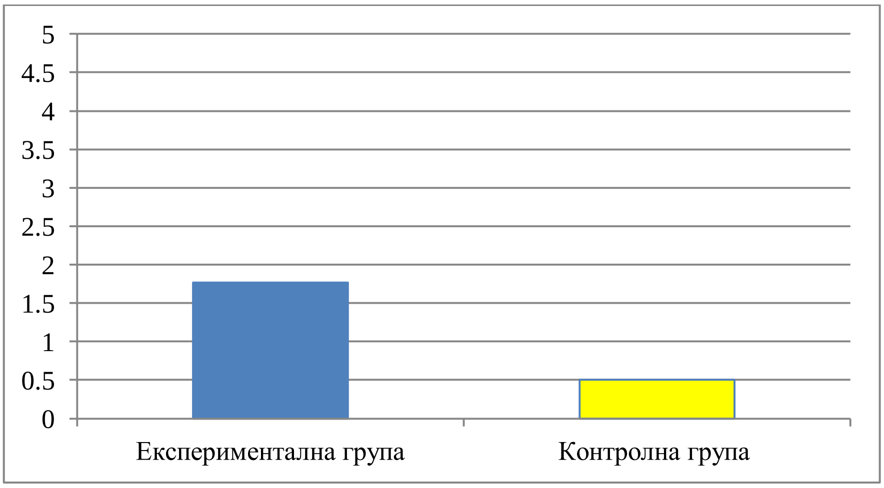
Постигнуће ученика у једанаестом задатку финалног теста логичког мишљења приказано је у табели 72.

Табела 72. *Постигнуће ученика у једанаестом задатку финалног теста*

		број поена						Укупно
		0	1	2	3	4	5	
ГРУПА	Е група	66	0	2	13	22	16	119
	К група	99	6	1	5	4	4	119
Укупно		165	6	3	18	26	20	238

Добијени резултати показују да је експериментални програм (посебно осмишљени задаци) позитивно утицао на развијање способности схватања значења појмова *и, или* и *не* и њихове логичке функције у задацима. На финалном мерењу ученици Е групе постижу боље резултате, а ученици К групе праве грешке идентичне грешкама на иницијалном тесту. Значајно бољи резултати Е групе у једанаестом задатку показују да ученици јасније разумеју термине *и*, *или* и *не*. Такође, ученици Е групе поступно решавају задатак, део по део, примењујући логичку операцију која се у том делу задатка тражи. Све то бележе у простору око поља са изразима и јасно уочавају које изразе је Сара могла записати, а које не. Њихова поступност и систематичност у раду указују на чињеницу да они сада јасније разумеју логичке операције. Они јасно схватају смисао реченица у којима се јављају наведени термини, јасно схватају смисао конјункције, дисјункције и негације у задацима. Другим речима, они су сада спремнији за примену логичких операција у процесу решавања математичких задатака. Недостатак који је довео до нешто слабијих резултата у овом задатку треба тражити у чињеници да је ученицима још увек велика тешкоћа више захтева које добијају истовремено и које морају узети у обзир.

Просечан број поена у једанаестом задатку представљен је графиконом 36.



Графикон 36. *Просечан број поена остварен у једанаестом задатку финалног теста*

Тестирањем нормалности расподеле добијених резултата у једанаестом задатку и тестирањем статистичке значајности постигнућа Е и К групе у једанаестом задатку, долазимо до вредности представљених у табели 73.

Табела 73. *Нормалност расподеле бодова и Ман-Витнијев тест за једанаести задатак финалног теста*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Mean Rank	Mann-Whitney U	Wilcoxon W	Z	Sig.
	Statistic	df	Sig.					
Е група	.359	119	.000	137.70	4914.500	12054.500	-5.003	0.000
К група	.484	119	.000	101.30				

Вредности указују на постојање статистички значајне разлике у броју бодова остварених у овом задатку Е и К групе ученика. Закључујемо да се групе у погледу успешности у једанаестом задатку статистички значајно разликују. Дакле, одређени задаци су у великој мери извршили позитивно деловање на боље резултате ученика Е групе.

***

Како смо у истраживању желели утврдити да ли постоји разлика у развијености логичког мишљења ученика експерименталне и ученика контролне групе и да ли је она статистички значајна, резултати и статистички показатељи до којих смо дошли су показали да је експериментални програм допринео развијању логичког мишљења ученика експерименталне групе. Експериментални програм је допринео и развијености сваке од четири операционализацијом издвојене способности логичког мишљења које смо у раду издвојили. Тиме је хипотеза: *Претпоставља се да постоји статистички значајна разлика у развијености логичког мишљења ученика експерименталне и ученика контролне групе, под утицајем експерименталног програма (одређених математичких задатака који утичу на развијање логичког мишљења),* потврђена.

Резултати говоре да се логичко мишљење ученика може подстицати и развијати у наставном процесу одговарајућим задацима. До сличних резултата је дошао и Л. Вуд (Wood, 1980), разрађујући програм компјутерских игрица којима се успешно може подстицати и развијати логичко размишљање. На значај и утицај вежбања различитих игара и загонетки на подстицање логичког мишљења, као и на чињеницу да логичко мишљење ученика у настави треба побољшати решавањем адекватних вежби, указује и М. Бако (Bakó, n. d.).

Наведена истраживања и резултати које смо открили говоре да се у почетној настави математике логичко мишљење ученика може успешно подстицати и развијати одговарајућим задацима. У експерименталном програму смо задатке поделили у четири групе, према утицају на једну од четири способности логичког мишљења које смо за потребе рада издвојили. То представља само један модел и могућност у подстицању и развијању логичког мишљења. У наставном процесу учитељи треба посебну пажњу да посвете развијању логичког мишљења, а то могу постићи комбиновањем различитих математичких задатака усмерених на подстицање различитих способности логичког мишљења.

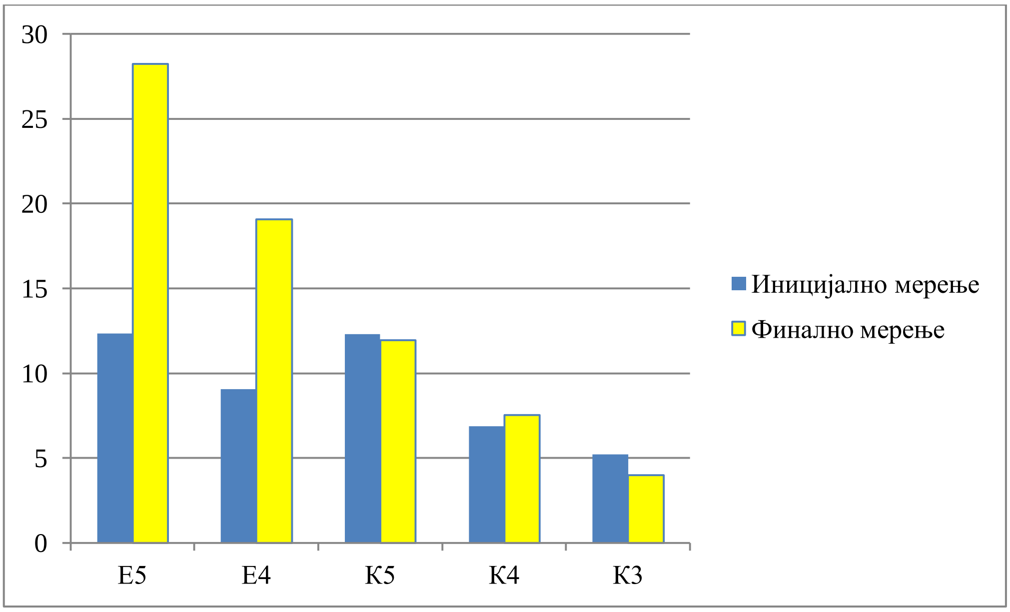
1.3. Општи успех ученика и развијање логичког мишљења ученика

Истраживањем смо желели испитати да ли постоји повезаност општег успеха ученика и напредовања у развијању логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма. Пошли смо од задатка: *Утврдити повезаност између општег успеха ученика и напредовања у развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма*. У истраживању смо ученике Е и К групе, с обзиром на општи успех, сврстали у категорије према успеху који су остварили на крају другог разреда. Ученике Е и К групе разврстали смо у три категорије: одлични, врлодобри и добри и придружили им ознаке подгрупа, ради јаснијег сагледавања резултата. Формирано је укупно 5 подгрупа. Ознаке подгрупа представљене су у табели 74.

Табела 74. *Подрупе узорка формиране с обзиром на општи успех ученика*

Група	Категорија успеха	Табеларна ознака
Експериментална	Одличан	Е5
	Врлодобар	Е4
Контролна	Одличан	К5
	Врлодобар	К4
	Добар	К3

Након деловања експерименталног програма реализовано је финално мерење и све подгрупе експерименталне групе постигле су просечно већи број поена у односу на резултате које су постигле на иницијалном мерењу, док је просечан број поена ученика контролне групе на финалном мерењу приближно исти (Графикон 37).



Графикон 37. *Просечан број поена који су освојиле подгрупе формиране с обзиром на општи успех*

Разлике између подгрупа ученика формираних с обзиром на општи успех на финалном тестирању су изражене.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на иницијалном тесту утврдили смо вредности представљене табелом 75.

Табела 75. *Нормалност расподеле бодова остварених на иницијалном тесту подгрупа формираних с обзиром на општи успех и Крускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Општи успех	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е5	.162	88	.000	.900	88	.000			
Е4	.170	31	.023	.881	31	.002			
К5	.072	89	.200*	.965	89	.017	17.422	4	0.002
К4	.238	25	.001	.886	25	.009			
К3	.243	5	.200*	.875	5	.286			

Као што се у табели види, поједине групе немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, утврђено је да између подгрупа формираних према успеху постоје разлике (p = 0.002) и да су оне статистички значајне. Разлике постоје између подгрупа са различитим општим успехом и оне су биле очекиване. У наставку ћемо посебно посматрати да ли између подгрупа са истим општим успехом постоје статистички значајне разлике, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој).

Нас посебно занимају резултати ученика Е5 и К5 групе, као и резултати Е4 и К4 групе. Између ученика Е групе са одличним општим успехом и ученика К групе са одличним успехом нема статистички значајне разлике у резултатима оствареним на иницијалном тесту (p = 0.487), па их можемо сматрати уједначеним. Такође, разлика између ученика Е групе са врлодобрим успехом и оних са истим успехом у К групи (p = 0.377) није статистички значајна. Подгрупе Е4 и К4 су уједначене у постигнућима на иницијалном тесту логичког мишљења.

Тестирана је нормалност расподеле резултата остварених на финалном тесту по групама формираним с обзиром на општи успех (Табела 76).

Табела 76. *Нормалност расподеле бодова остварених на финалном тесту подгрупа формираних с обзиром на општи успех и Kрускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Општи успех	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е5	.070	88	.200*	.967	88	.023			
Е4	.125	31	.200*	.932	31	.049			
К5	.103	89	.022	.919	89	.000	81.015	4	0.000
К4	.144	25	.192	.922	25	.056			
К3	.231	5	.200*	.881	5	.314			

Као што се у табели види, поједине групе немају нормалну расподелу (К5, p = 0.022 и Е4, p = 0.049). Коришћењем Kрускал-Волисовог теста и добијених резултата, потврђено је да између подгрупа формираних према успеху постоје разлике и да су оне статистички значајне (p = 0.000). Ми ћемо посебно посматрати да ли постоје разлике између група са истим општим успехом. Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој).

Нас посебно интересује напредак који је група Е5 остварила у поређењу са ученицима контролне групе који имају исти општи успех (К5). Добијени показатељи говоре да постоји разлика између бодова остварених на финалном тесту логичког мишљења између ученика Е5 и К5 групе и да је она статистички значајна (p = 0.000). Потврђено је да су посебно конструисани задаци из експерименталног програма у великој мери утицали на боље резултате које је постигла Е5 група ученика. Статистички значајну разлику у развијености логичког мишљења остварила је и подгрупа ученика Е групе који имају општи успех врлодобар (Е4) у односу на подгрупу К4 (p = 0.000).

На основу изнетих резултата и статистичких показатеља, можемо потврдити хипотезу истраживања *да код ученика са одличним и врлодобрим успехом, под утицајем експерименталног програма, долази до статистички значајног напредовања у развијености логичког мишљења*.

1.4. Развијање логичког мишљења и оцена коју ученик има из математике

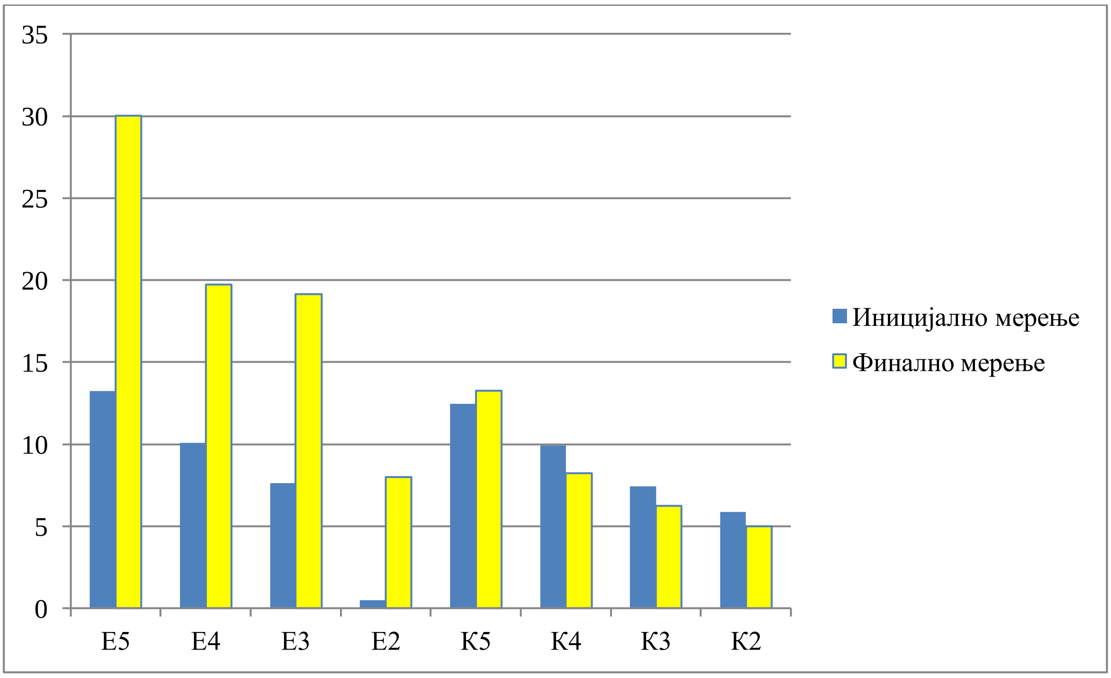
Трећим задатком истраживања желели смо *утврдити повезаност развијања логичког мишљења и оцене коју ученик има из математике под утицајем експерименталног програма*.

Подгрупе ученика формирали смо према оцени коју су ученици имали из математике на крају претходног разреда. Према том критеријуму ученике Е и К групе смо поделили у 4 подгрупе: одлична оцена, врлодобра, добра и довољна оцена. На тај начин формирано је 8 подгрупа ученика. Ознаке подгрупа представљене су у табели 77.

Табела 77. *Подгрупе узорка ученика формиране према оцени из математике*

Групе	Категорија ученика формирана према оцени	Табеларна ознака групе
Експериментална група	Ученици који имају оцену *одличан* (5)	Е5
	Ученици који имају оцену *врлодобар* (4)	Е4
	Ученици који имају оцену *добар* (3)	Е3
	Ученици који имају оцену *довољан* (2)	Е2
Контролна група	Ученици који имају оцену *одличан* (5)	К5
	Ученици који имају оцену *врлодобар* (4)	К4
	Ученици који имају оцену *добар* (3)	К3
	Ученици који имају оцену *довољан* (2)	К2

Просечан број поена који су оствариле подгрупе ученика формиране с обзиром на оцену из математике представљен је на графикону 38.



Графикон 38. *Просечан број поена на иницијалном и финалном мерењу подгрупа формираних према оцени*

Подгрупе ученика Е групе формиране с обзиром на оцену из математике на финалном мерењу су оствариле просечно боље резултате у поређењу са резултатима подгрупа К групе са истом оценом.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на иницијалном тесту с обзиром на оцену из математике, утврдили смо вредности представљене табелом 78.

Табела 78. *Нормалност расподеле бодова остварених на иницијалном тесту подгрупа формираних с обзиром на оцену и Крускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Оцена	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е5	.157	76	.000	.910	76	.000	26.189	7	0.000
Е4	.175	25	.046	.844	25	.001			
Е3	.164	14	.200*	.865	14	.036			
Е2	.441	4	.	.630	4	.001			
К5	.089	67	.200*	.958	67	.024			
К4	.095	33	.200*	.944	33	.088			
К3	.238	12	.059	.891	12	.120			
К2	.144	7	.200*	.990	7	.994			

Поједине групе немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, можемо закључити да између подгрупа формираних с обзиром на оцену постоје разлике и да су оне статистички значајне ($p = 0.000$).

Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој). Нас посебно занима да ли су подгрупе ученика Е и К групе које имају исту оцену из математике уједначене. Морамо указати на чињеницу да број испитаника у Е2 групи износи 4 и да је због малог узорка немогуће вршити поређења Е2 и К2 групе. Значајна разлика није уочена између Е3 и К3 групе ученика ($p = 0.988$). Није утврђена статистички значајна разлика између постигнућа ученика Е4 и К4 групе на иницијалном тесту логичког мишљења ($p = 0.864$). Такође, између ученика Е5 и К5 подгрупе није утврђена статистички значајна разлика у броју бодова остварених на иницијалном мерењу логичког мишљења ($p = 0.950$). Представљени показатељи потврђују да су подгрупе ученика Е и К групе са истом оценом из математике уједначене.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на финалном тесту по групама формираним с обзиром на оцену из математике, откривене су вредности представљене у табели 79.

Табела 79. *Нормалност расподеле бодова остварених на финалном тесту подгрупа формираних с обзиром на оцену и Крускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Оцена	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е5	.100	76	.057	.966	76	.039	98.743	7	0.000
Е4	.137	25	.200*	.911	25	.032			
Е3	.172	14	.200*	.927	14	.281			
Е2	.250	4	.	.927	4	.577			
К5	.108	67	.053	.932	67	.001			
К4	.122	33	.200*	.910	33	.010			
К3	.260	12	.024	.890	12	.118			
К2	.247	7	.200*	.872	7	.195			

Као што се у табели види, поједине групе немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, утврђено је да између подгрупа формираних према оцени постоје разлике ($p = 0.000$) и да су оне статистички значајне. Нас посебно занима постојање разлика између група са истом оценом из математике.

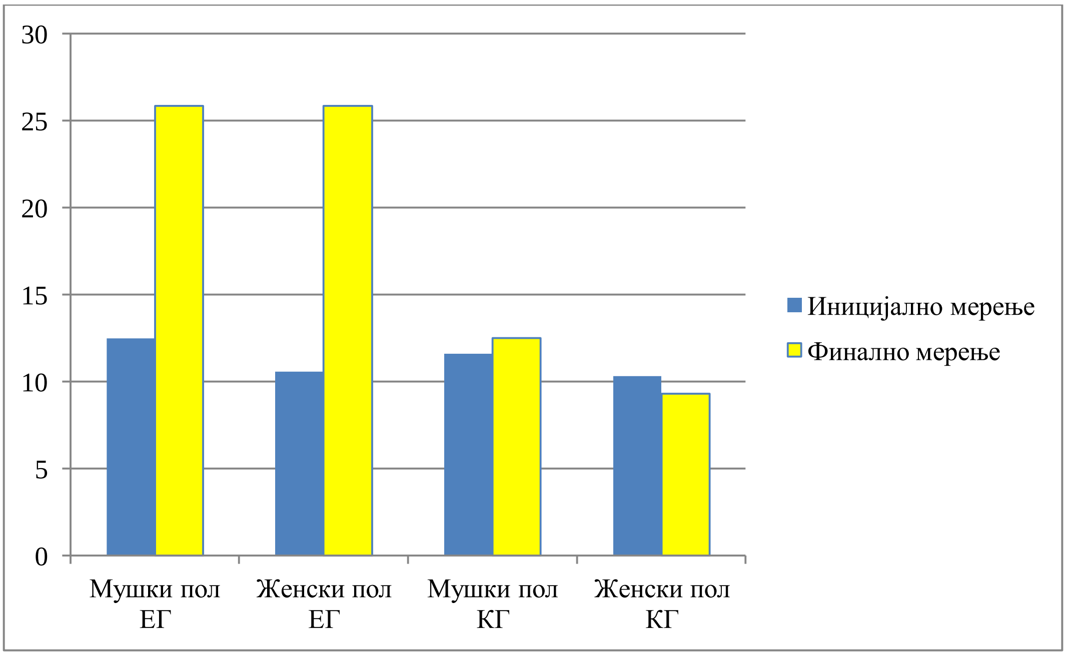
У наставку ћемо показати да ли постоји статистички значајна разлика у оквиру група са истом оценом. Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој). Између ученика Е3 и К3 групе уочена је статистички значајна разлика ($p = 0.007$). Разлика постоји између Е и К групе са оценом врлодобар ($p = 0.001$). Између ученика Е5 и К5 групе уочена је разлика у резултатима оствареним на финалном мерењу логичког мишљења и она је статистички значајна ($p = 0.000$). Дакле, експериментални програм је утицао на боље резултате које су оствариле посматране подгрупе ученика експерименталне групе формиране према оцени.

На основу изнетих показатеља и уочених разлика можемо потврдити полазну хипотезу истраживања којом смо претпоставили да *не постоји повезаност између оцене из математике и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма*.

1.5. Развијање логичког мишљења и пол ученика

Занимало нас је да ли између ученика мушког и женског пола постоје разлике у развијености логичког мишљења, стога смо као четврти задатак истраживања поставили: *Утврдити да ли постоје разлике у развијености логичког мишљења у односу на пол ученика под утицајем експерименталног програма.*

Просечан број поена који су освојили ученици мушког и женског пола на иницијалном и финалном тесту логичког мишљења представили смо на графикону 39.



Графикон 39. *Просечан број поена ученика мушког и женског пола на иницијалном и финалном мерењу*

Уочене разлике у развијености логичког мишљења између различитих подгрупа ученика формираних с обзиром на пол на финалном тесту, навеле су нас да тестирамо статистичку значајност тих разлика.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на иницијалном тесту с обзиром на пол ученика, добијени су показатељи које смо приказали у табели 80.

Табела 80. *Нормалност расподеле бодова остварених на иницијалном тесту подгрупа формираних с обзиром на пол и Крускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Пол	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Мушки ЕГ	.116	56	.056	.909	56	.000	0.785	3	0.853
Женски ЕГ	.176	63	.000	.883	63	.000			
Мушки КГ	.111	51	.164	.932	51	.006			
Женски КГ	.095	68	.200*	.964	68	.046			

Како подгрупа женски пол ЕГ нема нормалну расподелу, израчунат је Крускал-Волисов тест. Разлике између подгрупа формираних с обзиром на пол ученика Е и К групе нису статистички значајне (p = 0.853). Дакле, све подгрупе формиране с обзиром на пол ученика су уједначене у погледу постигнућа на иницијалном тесту логичког мишљења.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на финалном тесту по групама формираним с обзиром на пол ученика, добијене су вредности које су приказане у табели 81.

Табела 81. *Нормалност расподеле бодова остварених на финалном тесту подгрупа формираних с обзиром на пол ученика и Крускал-Волисов тест*

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
Пол	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Мушки ЕГ	.086	56	.200*	.960	56	.061	71.558	3	0.000
Женски ЕГ	.108	63	.067	.931	63	.002			
Мушки КГ	.167	51	.001	.882	51	.000			
Женски КГ	.130	68	.006	.928	68	.001			

Како подгрупе К групе формиране с обзиром на пол ученика немају нормалну расподелу, израчунат је Крускал-Волисов тест. Он је показао да су уочене разлике између подгрупа формираних с обзиром на пол ученика статистички значајне (p = 0.000).

Како су на иницијалном тесту све подгрупе ученика формиране с обзиром на пол биле изједначене, овде ћемо извршити поређења свих парова и применити Бонферонијеву корекцију. Табелом 82 приказани су резултати који указују између којих подгрупа формираних према полу су уочене статистички значајне разлике у развијености логичког мишљења, а између којих не.

Табела 82. *Статистички приказ резултата подгрупа формираних с обзиром на пол ученика - финално мерење*

Sample 1 - Sample 2	Test Statistik	Std. Error	Std. Test Statistik	Sig.	Adj. Sig.
женски КГ - мушки КГ	18.645	12.743	1.463	0.143	0.861
женски КГ - мушки ЕГ	79.399	12.414	6.396	0.000	**0.000**
женски КГ - женски ЕГ	84.691	12.030	7.040	0.000	**0.000**
мушки КГ - мушки ЕГ	60.755	13.315	4.563	0.000	**0.000**
мушки КГ - женски ЕГ	66.046	12.958	5.097	0.000	**0.000**
мушки ЕГ - женски ЕГ	-5.292	12.634	-0.419	0.675	1.000

Постоји разлика између постигнућа ученика мушког пола Е групе и мушког пола К групе (p = 0.000). Уочена разлика између мушког пола Е групе и женског пола К групе (p = 0.000) је статистички значајна. Такође, женски пол Е групе се разликује у поређењу са мушким полом К групе (p = 0.000), као и у односу на женски пол контролне групе (p = 0.000). Наведене разлике у развијености логичког мишљења настале су под деловањем експерименталног програма. Одређени математички задаци експерименталног програма су веома утицали на боље резултате ученика оба пола Е групе. Разлике у резултатима на финалном мерењу логичког мишљења између ученика мушког пола Е групе и женског пола Е групе нису утврђене (p = 1.000). Разлике у резултатима на финалном мерењу логичког мишљења између ученика мушког пола К групе и женског пола К групе нису утврђене (p = 0.861). То додатно говори у прилог чињеници да под дејством експерименталног програма до напретка долази и код ученика мушког и код ученика женског пола.

Анализом резултата, можемо потврдити полазну хипотезу истраживања *да не постоји повезаности између пола ученика и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма*. Дакле, наше истраживање је показало да се логичко мишљење под дејством експерименталног програма подједнако може развијати и код ученика мушког и код ученика женског пола.

До сличних резултата су дошли А. Туна, А. Ц. Бибер и Л. Инцикапи при испитивању утицаја разреда, врсте средњошколског образовања и пола на логички ниво размишљања кандидата за наставнике математике. Поменути аутори су утврдили да пол кандидата није значајно утицао на ниво логичког размишљања (Tuna, Biber, İncikapı, 2013).

Можемо закључити да се код испитаника оба пола успешно може развијати логичко мишљење и да се то може чинити планским и систематским одабиром адекватних математичких задатака усмерених на развијање различитих способности логичког мишљења.

1.6. Образовни статус родитеља и развијање логичког мишљења ученика

Истраживањем смо желели испитати да ли образовни статус родитеља има утицај на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Поставили смо задатак истраживања: *Утврдити повезаност између образовног статуса родитеља ученика и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма.*

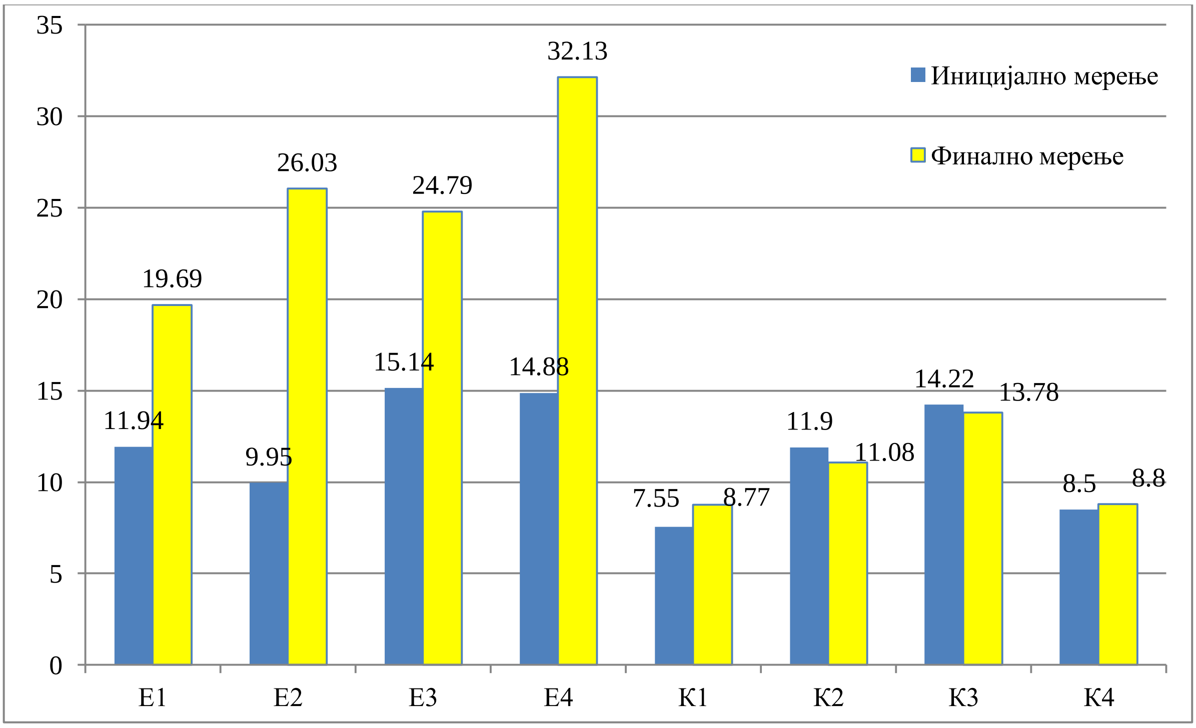
Родитеље ученика смо поделили у четири групе према степену стручне спреме. На основу тога формирано је осам подгрупа, а ознаке подгрупа представљене су у табели 83.

Табела 83. *Подгрупе ученика формиране с обзиром на стручну спрему родитеља*

Група	Стручна спрема родитеља	Ознака групе
Е група	Основна школа	Е1
	Средња школа	Е2
	Висока	Е3
	Факултет	Е4
К група	Основна школа	К1
	Средња школа	К2
	Висока	К3
	Факултет	К4

Ради прегледности резултата, посебно смо разматрали утицај образовног статуса оца и образовног статуса мајке на развијање логичког мишљења ученика.

Просечан број поена који су на иницијалном и финалном тестирању оствариле подгрупе формиране с обзиром на образовни статус оца приказан је на графикону 40.



Графикон 40. *Просечан број поена који су оствариле подгрупе ученика Е и К групе формиране на основу стручне спреме оца*

Уочене разлике у развијености логичког мишљења на финалном мерењу, између различитих подгрупа ученика формираних с обзиром на стручну спрему оца, навеле су нас да тестирамо статистичку значајност тих разлика.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на иницијалном тесту, с обзиром на стручну спрему оца ученика, утврђене су вредности које су приказане табелом 84.

Табела 84. *Нормалност расподеле бодова остварених на иницијалном тесту подгрупа формираних с обзиром на стручну спрему оца ученика и Крускал-Волисов тест*

Стручна спрема оца	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
E1	.222	16	.034	.869	16	.026	14.734	7	0.040
E2	.130	73	.004	.921	73	.000			
E3	.183	14	.200*	.833	14	.013			
E4	.244	16	.012	.855	16	.016			
K1	.192	22	.034	.884	22	.015			
K2	.106	59	.095	.940	59	.006			
K3	.145	18	.200*	.930	18	.197			
K4	.130	20	.200*	.961	20	.573			

Поједине групе немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, потврђено је да између подгрупа формираних према стручној спреми оца ученика постоје разлике и да су оне статистички значајне (p = 0.040).

У наставку ћемо показати да ли постоје статистички значајне разлике у оквиру група са истом стручном спремом оца. Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој). Од посебног значаја за наше истраживање је да између подгрупа ученика Е групе и подгрупа ученика К групе, чији очеви имају исту стручну спрему, разлике у резултатима нису статистички значајне. На иницијалном мерењу, између ученика Е групе, чији очеви имају завршену основну школу, и ученика К групе, чији очеви имају завршену основну школу, нема статистички значајне разлике у развијености логичког мишљења (p = 0.294). Такође, разлика између ученика Е групе, чији очеви имају завршену средњу школу, и ученика К групе са истом стручном спремом очева, није статистички значајна (p = 0.117). Разлика није статистички значајна ни између ученика Е групе, чији очеви имају завршену високу школу, и ученика К групе чији очеви имају исти степен стручне спреме (p = 0.749). Статистички значајна разлика у резултатима оствареним на иницијалном мерењу логичког мишљења не постоји ни између ученика Е групе, чији очеви имају завршен факултет, и ученика К групе, чији очеви имају завршен факултет (p = 0.052). Стога, можемо закључити да су посматране подгрупе ученика, у погледу стручне спреме оца, уједначене.

Све подгрупе ученика Е групе формиране с обзиром на стручну спрему оца су на финалном мерењу оствариле боље резултате, док су на финалном мерењу ученици свих подгрупа К групе постигли приближно исти просечан број поена као на иницијалном мерењу.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на финалном тесту по групама формираним с обзиром на стручну спрему оца, дошли смо до показатеља у табели 85.

Табела 85. *Нормалност расподеле бодова остварених на финалном тесту подгрупа формираних с обзиром на стручну спрему оца и Крускал-Волисов тест*

Стручна спрема оца	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е1	.168	16	.200*	.916	16	.145	78.409	7	0.000
Е2	.093	73	.195	.952	73	.008			
Е3	.201	14	.131	.867	14	.038			
Е4	.118	16	.200*	.947	16	.445			
К1	.204	22	.017	.845	22	.003			
К2	.131	59	.014	.885	59	.000			
К3	.228	18	.014	.896	18	.048			
К4	.154	20	.200*	.937	20	.210			

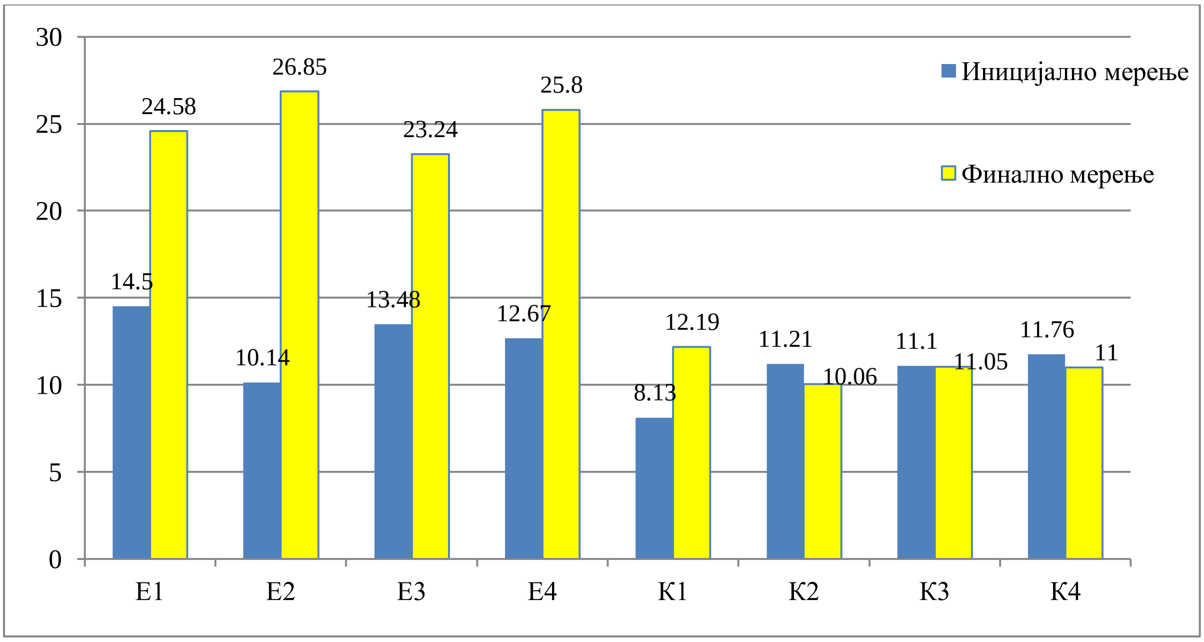
Поједине групе немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, потврђено је да између подгрупа формираних према стручној спреми очева постоје разлике и да су оне статистички значајне (p = 0.000). Нас посебно занима постојање разлика између група са истом стручном спремом очева. Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој).

Уочавамо разлике међу појединим групама формираним с обзиром на стручну спрему очева ученика. Нас посебно занима постојање разлика између подгрупа Е и К групе са истом стручном спремом оца. Разлика између ученика Е групе, чији очеви имају завршену основну школу, и ученика К групе, чији очеви имају завршену основну школу, статистички је значајна (p = 0.014). Разлика постоји између ученика Е групе, чији очеви имају завршену средњу школу, и ученика К групе, чији очеви имају исту стручну спрему (p = 0.000), и она је статистички значајна. Разлика постоји између ученика Е групе, чији очеви имају завршену високу школу, и ученика К групе, чији очеви имају исту стручну спрему (p = 0.016), и она је статистички значајна. Разлика је статистички значајна између ученика Е4 и К4 (p = 0.000).

Наведени резултати говоре да су све подгрупе ученика Е групе, формиране на основу стручне спреме оца, под утицајем експерименталног програма напредовале, што нас наводи на закључак да стручна спрема оца није значајно утицала на резултате ученика Е групе. Дакле, *стручна спрема оца нема статистички значајан утицај на развијање логичког мишљења ученика*.

Поред утицаја стручне спреме оца, желели смо испитати и утицај стручне спреме мајке на развијање логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма.

Просечан број поена који су на иницијалном и финалном тестирању оствариле подгрупе ученика формиране с обзиром на стручну спрему мајке приказан је на графикону 41



Графикон 41. *Просечан број поена који су оствариле подгрупе ученика Е и К групе формиране на основу стручне спреме мајке*

Уочене разлике у развијености логичког мишљења на финалном мерењу између различитих подгрупа ученика формираних с обзиром стручну спрему мајке, навеле су нас да тестирамо статистичку значајност тих разлика.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на иницијалном тесту с обзиром на стручну спрему мајке ученика, долазимо до вредности представљених у табели 86.

Табела 86. *Нормалност расподеле бодова остварених на иницијалном тесту подгрупа формираних с обзиром на стручну спрему мајке ученика и Крускал-Волисов тест*

Стручна спрема мајке	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е1	.193	12	.200*	.918	12	.273	6.369	7	0.497
Е2	.147	71	.001	.901	71	.000			
Е3	.139	21	.200*	.883	21	.017			
Е4	.275	15	.003	.863	15	.027			
К1	.178	16	.187	.898	16	.074			
К2	.108	62	.070	.939	62	.004			
К3	.158	20	.200*	.923	20	.111			
К4	.120	21	.200*	.978	21	.894			

Поједине групе немају нормалну расподелу. На основу Крускал-Волисовог теста и добијених резултата, доказано је да између подгрупа формираних према стручној спреми мајке нема статистички значајних разлика (p = 0.497). Дакле, подгрупе формиране према образовном статусу мајке (Е1 и К1; Е2 и К2; Е3 и К3; Е4 и К4; Е5 и К5) су уједначене у погледу постигнућа на иницијалном тесту логичког мишљења.

Тестирањем нормалности расподеле резултата остварених на финалном тесту подгрупа формираним с обзиром на стручну спрему мајке ученика, откривени су показатељи представљени у табели 87.

Табела 87. *Нормалност расподеле бодова остварених на финалном тесту подгрупа формираних с обзиром на стручну спрему мајке и Крускал-Волисов тест*

Стручна спрема мајке	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk			Kruskal-Wallis Test		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.	Test Statistic	Degrees of Free	Asymptotic Sig. (2-sided test)
Е1	.214	12	.137	.942	12	.518	70.798	7	0.000
Е2	.079	71	.200*	.960	71	.025			
Е3	.140	21	.200*	.941	21	.231			
Е4	.152	15	.200*	.967	15	.813			
К1	.148	16	.200*	.911	16	.121			
К2	.128	62	.013	.876	62	.000			
К3	.126	20	.200*	.928	20	.141			
К4	.169	21	.118	.867	21	.008			

Групе К2 и К4 немају нормалну расподелу. Коришћењем Крускал-Волисовог теста, а на основу добијених резултата, доказано је да између подгрупа формираних према образовном статусу мајке постоје разлике и да су оне статистички значајне ($p = 0.000$). Нас посебно занима постојање разлика између Е и К подгрупа са истом стручном спремом мајке. Извршили смо поређења само одабраних парова група, како бисмо задржали алфа ниво на употребљивој висини (не премалој).

Разлика између ученика Е групе, чије мајке имају завршену основну школу, и ученика К групе, чије мајке имају исту стручну спрему, статистички је значајна ($p = 0.024$). Разлика постоји између ученика Е2 и ученика К2 групе и она је статистички значајна ($p = 0.000$). Разлика постоји у оствареним резултатима на финалном мерењу између ученика Е3 групе и ученика К3 групе и она је статистички значајна ($p = 0.006$). Између ученика Е4 и К4 постоји разлика и она је статистички значајна ($p = 0.001$).

Потврђено је да су све подгрупе ученика Е групе, формиране на основу стручне спреме мајке, под утицајем експерименталног програма напредовале. Такви резултати наводе на закључак да образовни статус мајке није значајно утицао на резултате ученика Е групе. Дакле, *стручна спрема мајке нема статистички значајан утицај на развијање логичког мишљења ученика*.

На основу резултата са аспекта утицаја образовног статуса родитеља на успешност ученика на тесту логичког мишљења, где смо показали да стручна спрема оца, као ни образовни статус мајке, нису статистички значајно утицали на напредовање ученика под утицајем експерименталног програма, можемо потврдити полазну хипотезу истраживања да *степен стручне спреме родитеља нема утицаја на развијеност логичког мишљења ученика експерименталне групе.*

***

Испитујући ефекте експерименталног програма, резултати су показали да су ученици експерименталне групе који су решавали посебно креиране задатке на финалном мерењу логичког мишљења остварили статистички значајно боље резултате. До статистички значајног напретка у развијености логичког мишљења долази код ученика са одличним и врлодобрим успехом. Резултати су показали и да не постоји повезаност између оцене из математике и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма. Све подгрупе ученика Е групе формиране с обзиром на оцену из математике су под утицајем експерименталног програма оствариле боље резултате на финалном тесту логичког мишљења. Ученици мушког и женског пола експерименталне групе су напредовали у поређењу са ученицима оба пола контролне групе и тај напредак је значајан, што говори у прилог чињеници да се логичко мишљење под дејством експерименталног програма подједнако развија и код ученика мушког и код ученика женског пола, односно да нема повезаности пола ученика и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма. Такође, потврдили смо и да степен стручне спреме родитеља није значајно утицао на развијеност логичког мишљења ученика експерименталне групе. Све подгрупе ученика Е групе формиране с обзиром на стручну спрему родитеља су оствариле значајан напредак који се може приписати утицају експерименталног програма. На крају, на основу свих резултата који се односе на резултате утицаја експерименталног програма, можемо потврдити полазну хипотезу да *решавање одређених математичких задатака (експериментални програм) у великој мери доприноси развијању логичког мишљења ученика.*

Овакве резултате проналазимо и у студији која је реализована у Северној Каролини и Јапану, а која се односила на вештине логичког размишљања и интегрисан процес вештина ученика средње школе. Овом студијом аутори (Maltheis et al. 1992) су показали да су јапански ученици седмог, осмог и деветог разреда постигли боље резултате него ученици у Северној Каролини у обе области вештина које су испитиване. Разлике које су утврђене могу се приписати одређеној организацији наставе, која се састојала у подстицању логичког расуђивања различитим задацима (Maltheis et al. 1992).

Наведени резултати говоре у прилог чињеници да се различитим задацима може подстицати логичко мишљење ученика и да на учитељима остаје да одговарајућим задацима то и чине. У наставном процесу треба бирати задатке који ће утицати на различите способности логичког мишљења, јер ће се тиме и целокупно логичко мишљење ученика успешно развијати. Ученици са развијеним логичким мишљењем ће моћи да расуђују о животним проблемима и да се самостално сналазе у новим, раније недоживљеним проблемским ситуацијама, а на томе се инсистира у савременој школи.

2. РАЗВИЈАЊЕ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА И ИНТЕРЕСОВАЊЕ УЧЕНИКА - РЕЗУЛТАТИ АНКЕТИРАЊА УЧЕНИКА

2.1. Мишљење ученика о експерименталном програму (о задацима којима је циљ развијање логичког мишљења) и изазивање интересовања ученика за учење математике

Мотивација и интересовање за учење у школи су од великог значаја за остваривање свих задатака наставе, па тиме и за подстицање логичког мишљења у почетној настави математике. У периоду млађег школског узраста код деце се може стварати добра основа за учење. Посебну пажњу треба обратити на ученика, уважавати узрасне карактеристике ученика и на тим основама будити његово интересовање за учење математике, као и за учење уопште. Мотивација за учење је значајан чинилац успешног учења. Стога, на различите начине треба подстицати мотивацију ученика у настави. Како смо желели испитати улогу и утицај експерименталног програма на ставове ученика, њихово интересовање и мотивацију за учење математике, пошли смо од задатка *испитати мишљења ученика о експерименталном програму, тј. задацима којима је циљ развијање логичког мишљења ученика и изазивању интересовања ученика за учење математике*.

У жељи да испитамо мишљења ученика о експерименталном програму и изазивању интересовања ученика за учење математике, након деловања експерименталног програма, анкетирано је 119 ученика експерименталне групе.

Анкетирањем ученика експерименталне групе, желели смо испитати следеће:

- Заинтересованост ученика за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења;

- Шта им се на часовима, који су имали за циљ развијање логичког мишљења ученика, највише допало, тј. које су то, према мишљењима ученика, добре стране експерименталног програма;

- Каква је заинтересованост ученика за учење математике након реализације експерименталног програма.

Кроз анализу одговора добијених анкетирањем ученика експерименталне групе желели смо потврдити хипотезу да *одговарајућа организација наставе математике (експериментални програм) у великој мери изазива интересовање ученика за учење математике.*

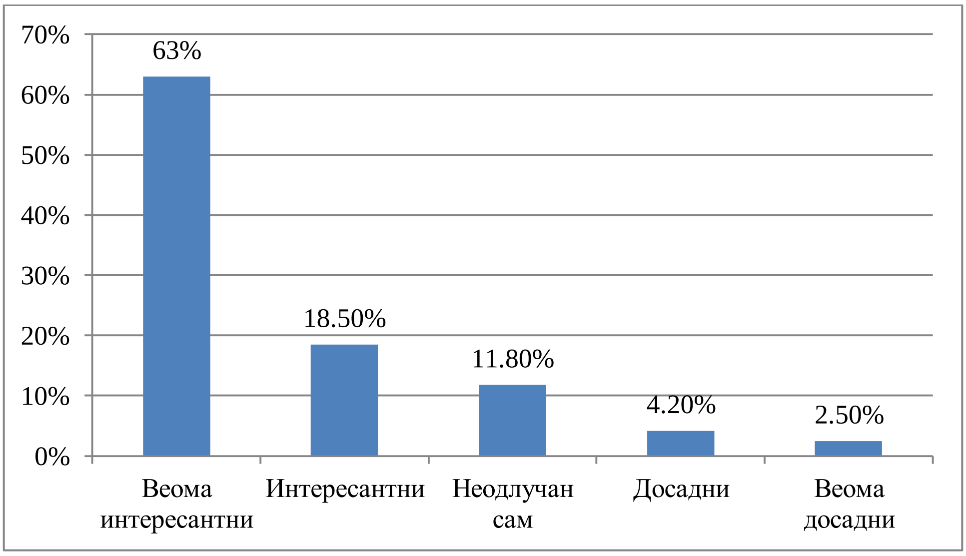
2.1.1. Заинтересованост ученика за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења

Желели смо *испитати заинтересованост ученика за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења*. Стога, пошли смо од претпоставке да *су ученици заинтересовани за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења.* Наведену претпоставку проверавали смо првим, другим и четвртим питањем у анкети за ученике.

1. ПИТАЊЕ

Након реализације експерименталног програма занимало нас је мишљење ученика о часовима математике које је реализовао експериментатор. Другим речима, занимало нас је мишљење ученика експерименталне групе о часовима на којима су решавани задаци који су имали за циљ подстицање и развијање логичког мишљења.

Пред ученике је постављен задатак да изнесу свој став о часовима математике које су имали, а које је реализовао експериментатор. Добијени резултати су представљени на графикону 42.



Графикон 42. *Мишљења ученика експерименталне групе о часовима на којима су решавали задатке којима је циљ развијање логичког мишљења*

На основу резултата, закључујемо да ученици најчешће имају позитиван став о часовима на којима су примењивани задаци којима се желело утицати на развијање логичког мишљења ученика и да су им овакви часови *веома интересантни* или *интересантни*. Највећи проценат ученика изјаснио се да су им часови на којима је био примењиван експериментални програм (задаци који су имали за циљ развијање логичког мишљења) *веома интересантни* и *интересантни*. Неодлучних ученика је било 14 (11.8%). Било је и ученика којима су овакви часови били *досадни*, па чак и *веома досадни*. Највећи број ученика који се определио за став да су часови које су имали интересантни говори о томе да је ученицима млађег школског узраста интересантно све што је ново и другачије од уобичајеног начина рада. Већи број задатака који су ученици решавали на часовима са експериментатором је другачији од оних задатака са којима се ученици свакодневно срећу, што директно утиче на интересовање ученика, буди њихову радозналост и тиме позитивно утиче на мотивацију за учење. Овакви резултати су били и очекивани, јер код ученика све што је за њих ново и другачије буди радозналост. Како истичу Љ. Пауновић и З. Гајтановић „примена занимљивих задатака у настави математике у великој мери може повећати квалитет наставе и заинтересованост ученика. Решавајући овај тип задатака који су логички и несвакидашњи ствара се пријатнија и опуштенија атмосфера на часу. Ученици су растерећени што у великој мери утиче на њихово логичко расуђивање“ (2020: 330).

У погледу пола, успеха и оцене из математике нису установљене статистички значајне разлике у одговорима на прво питање. Како не бисмо прекршили претпоставку хи-квадрат теста у погледу најмање очекиване ћелијске учесталости, спојили смо одговоре ученика и направили две категорије одговора. Из тих разлога смо спојили и оцене довољан (2) и добар (3), као и оцене врлодобар (4) и одличан (5). На тај начин направили смо две категорије ученика према оцени из математике (Табела 88).

Табела 88. *Мишљења ученика о часовима на којима су решавали задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика према полу, успеху и оцени из математике*

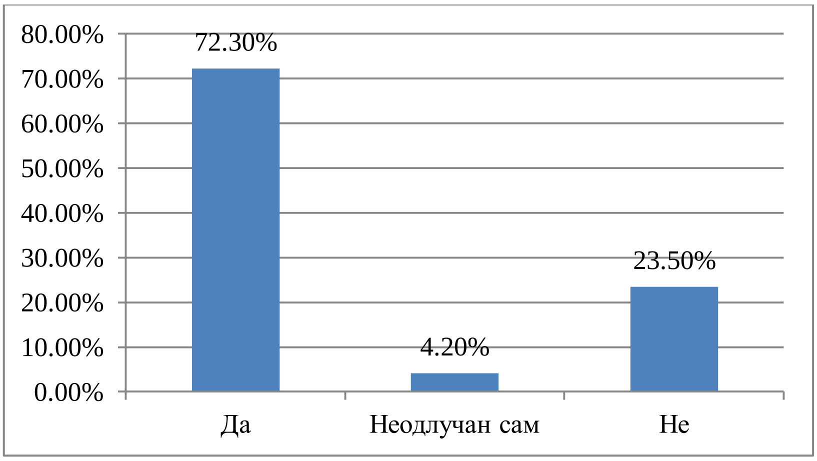
		Одговори на прво питање		
		Веома интересантни и интересантни	Неодлучан сам, досадни и веома досадни	Укупно
Пол	мушки	42 (75.0%)	14 (25.0%)	56 (100.0%)
	женски	55 (87.3%)	8 (12.7%)	63 (100.0%)
Успех	врлодобар	27 (87.1%)	4 (12.9%)	31 (100.0%)
	одличан	70 (79.5%)	18 (20.5%)	88 (100.0%)
Оцена	довољна и добра	17 (94.4%)	1 (5.6%)	18 (100.0%)
	врлодобра и одлична	80 (79.2%)	21 (20.8%)	101 (100.0%)
Укупно		97 (81.5%)	22 (18.5%)	119 (100.0%)

Одговори ученика нису статистички значајно условљени полом ученика (χ^2 (1, n = 119) = 2.217, p = 0.137), као ни општим успехом (χ^2 (1, n = 119) = 0.439, p = 0.508, Фишеров тачан показатељ вероватноће p = 0.429) и оценом из математике (χ^2 (1, n = 119) = 1.451, p = 0.228, Фишеров тачан показатељ вероватноће p = 0.189).

Добијени резултати истраживања говоре да ученици имају изразито позитиван став према часовима на којима се примењују задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике (експерименталном програму).

2. ПИТАЊЕ

Анкетирањем ученика желели смо испитати и њихову заинтересованост за решавање математичких задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Стога је пред ученике постављено питање: *Да ли волиш да решаваш задатке које је на претходним часовима реализовао експериментатор?* Резултате које смо добили анкетирањем ученика представили смо на графикону 43. Како је експериментатор спроводио и анкетирање ученика, ученицима је објашњено на које се тачно задатке мисли.



Графикон 43. *Заинтересованост ученика за решавање задатака који подстичу логичко мишљење*

Резултати показују да ученици воле да решавају задатке експерименталног програма и да су заинтересовани за примену оваквих задатака. Како смо у првом делу рада показали да експериментални програм доприноси подстицању и развијању логичког мишљења, а овде и да су ученици заинтересовани за такав одабир задатака, то учитељу у великој мери олакшава подстицање логичког мишљења ученика.

Разлике у одговорима на друго питање у погледу пола, успеха и оцене из математике нису значајне (Табела 89).

Табела 89. *Заинтересованост ученика за решавање задатака који подстичу логичко мишљење с обзиром на пол ученика, успех и оцену из математике*

		Одговори на друго питање		Укупно
		Да	Неодлучан сам и не	
Пол	мушки	37 (66.1%)	19 (33.9%)	56 (100.0%)
	женски	49 (77.8%)	14 (22.2%)	63 (100.0%)
Успех	врлодобар	23 (74.2%)	8 (25.8%)	31 (100.0%)
	одличан	63 (71.6%)	25 (28.4%)	88 (100.0%)
Оцена	добар (3) довољан (2)	14 (77.8%)	4 (22.2%)	18 (100.0%)
	одличан (5) врлодобар (4)	72 (71.3%)	29 (28.7%)	101 (100.0%)
Укупно		86 (72.3%)	33 (27.7%)	119 (100.0%)

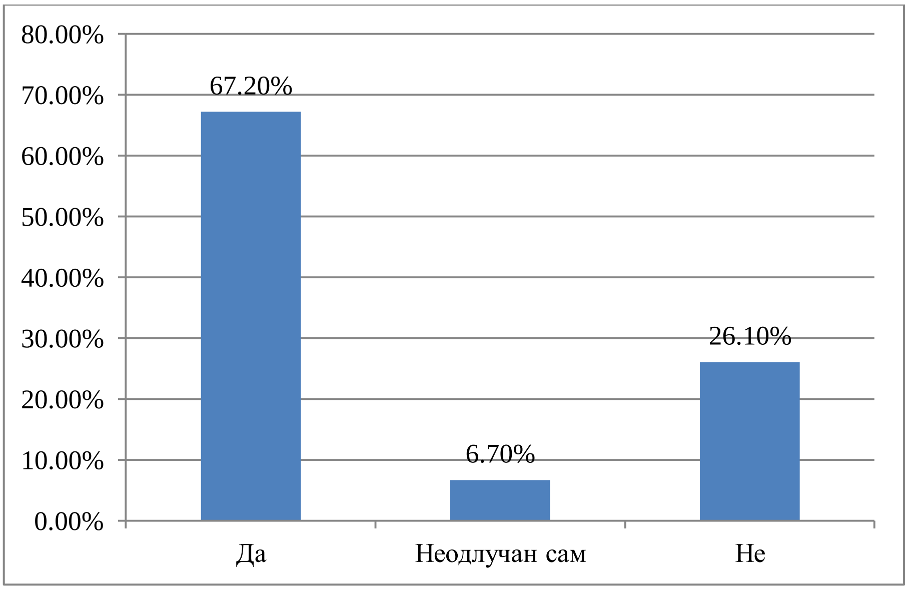
Највећи проценат ученика у обе групе формиране с обзиром на пол изјаснио се да воли да решава задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења. Нешто је већи проценат девојчица које су изнеле такво мишљење од процента дечака који има такво мишљење.

Највећи проценат ученика у обе групе формиране с обзиром на оцену из математике се изјаснио да су заинтересовани за решавање задатака којима је циљ развијање логичког мишљења.

Анализом резултата анкетирања ученика видели смо да се највећи проценат ученика изјаснио да воли да решава задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења. Одговори ученика нису статистички значајно условљени полом ученика (χ^2 (1, n = 119) = 1.485, p = 0.223), општим успехом (χ^2 (1, n = 119) = 0.002, p = 0.964), као ни оценом из математике (χ^2 (1, n = 119) = 0.079, p = 0.779, Фишеров тачан показатељ вероватноће p = 0.776). Ученици су заинтересовани за решавање посебно креираних задатака.

4. ПИТАЊЕ

Желели смо испитати заинтересованост ученика за часове математике на којима су примењивани задаци који подстичу логичко мишљење. Пред ученике смо поставили питање: *Да ли би желели још оваквих часова?* Резултати су представљени на графикону 44.



Графикон 44. *Заинтересованост ученика за часове математике на којима се примењују задаци који подстичу логичко мишљење*

Највећи број ученика изјаснио се да жели још оваквих часова, што сведочи да је експериментални програм утицао на заинтересованост ученика за учење математике. Резултат је био очекиван, јер је у природи детета да му се допадне све што је ново и другачије. Како је часове на којима су примењивани задаци којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика (експериментални програм) реализовао експериментатор, јасно је да је сама ситуација за ученике била другачија и нова и изазивала интересовање.

У одговорима ученика на четврто питање с обзиром на пол ученика, успех и оцену из математике нису утврђене значајне разлике (Табела 90).

Табела 90. *Заинтересованост ученика за часове математике на којима се примењују задаци који подстичу логичко мишљење с обзиром на пол, успех и оцену*

		Одговори ученика на четврто питање		
		Да	Неодлучан сам и не	Укупно
Пол	мушки	35 (62.5%)	21 (37.5%)	56 (100.0%)
	женски	45 (71.4%)	18 (28.6%)	63 (100.0%)
Успех	врлодобар	22 (71.0%)	9 (29.0%)	31 (100.0%)
	одличан	58 (65.9%)	30 (34.1%)	88 (100.0%)
Оцена	добар (3) довољан (2)	13 (72.2%)	5 (27.8%)	18 (100.0%)
	одличан (5) врлодобар (4)	67 (66.3%)	34 (33.7%)	101 (100.0%)
	Укупно	80 (67.2%)	39 (32.8%)	119 (100.0%)

Одговори ученика на четврто питање нису статистички значајно условљени полом (χ^2 (1, n = 119) = 0.706, p = 0.401). Закључујемо да пол ученика није утицао на њихову заинтересованост за часове на којима се примењују задаци којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

Одговори на четврто питање нису условљени успехом ученика χ^2 (1, n = 119) = 0.086, p = 0.769. Нема разлике између ученика са одличним и ученика са врлодобрим успехом у истицању жеље (заинтересованости) за још часова на којима се примењују задаци који имају за циљ подстицање логичког мишљења ученика.

Одговори на четврто питање нису условљени оценом ученика χ^2 (1, n = 119) = 0. 047, p = 0.828.

С обзиром да је највећи проценат ученика исказао жељу за још часова на којима се примењују задаци који подстичу логичко мишљење ученика и да њихови одговори нису условљени полом, општим успехом, као ни оценом из математике, можемо закључити да су ученици заинтересовани за часове математике на којима се примењују одговарајући задаци (експериментални програм) чији је циљ утицај на подстицање и развијање логичког мишљења.

***

У истраживању мишљења ученика о експерименталном програму пошли смо од претпоставке да су *ученици заинтересовани за решавање задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.* Анализом одговора ученика на прво питање код којег је највећи проценат ученика изнео став да су им часови на којима је реализован експериментални програм *веома интересантни* и *интересантни* и изношењем става да би желели још оваквих часова, о чему сведоче одговори ученика на четврто питање у анкети, као и изношењем става да воле да решавају задатке који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења (одговори на друго питање), можемо потврдити полазну хипотезу.

Ако се осврнемо на речи аутора М. Зубац, Д. Милинковић и М. Пикуле према којима „мотивисан ученик постиже боље резултате у учењу од оног ученика који није довољно мотивисан“ (2017: 24), резултати до којих смо дошли говоре у прилог чињеници да ће ученици решавањем задатака експерименталног програма бити мотивисани, а, са друге стране, од тако мотивисаних ученика можемо очекивати боље резултате у развијености логичког мишљења. Аутори истичу и да је мотив радозналости присутан код деце од најранијег узраста и да тај мотив треба користити у настави и давати ученицима необичне и неочекиване активности које саме по себи побуђују њихову пажњу (Зубац, Милинковић, Пикула, 2017: 29). Као један од начина буђења мотивације истичу и занимљиве задатке. Аутори наглашавају да „већина ученика сматра да је математика досадан предмет јер су им задаци често неразумљиви и апстрактни. Зато би требало задатке учинити интересантним за ученике“ (Зубац, Милинковић, Пикула, 2017: 30). Ученици имају изразито позитиван став према експерименталном програму и ту карактеристику експерименталног програма треба користити у њиховом мотивисању за рад.

2.1.2. Добре стране примене задатака који подстичу логичко мишљење ученика у почетној настави математике

У раду смо више пута истицали да примена задатака који подстичу развијање логичког мишљења ученика има низ предности. Мишљења смо да примена ових задатака има доста добрих страна којима ови задаци и доводе до подстицања и развијања логичког мишљења ученика као крајњег исхода њихове примене. У испитивању ученика пошли смо од задатка: *Испитати које су то, према мишљењима ученика, добре стране примене задатака који утичу на подстицање логичког мишљења у настави математике*. Пошли смо од претпоставке да *примена задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, према мишљењима ученика, има низ предности*. Наведену претпоставку проверавали смо трећим и шестим питањем у анкети за ученике.

3. ПИТАЊЕ

Како бисмо испитали мишљење ученика о добрим странама примене задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења, покушали смо издвојити добре стране примене ових задатака и формулисати их на начин разумљив и близак ученицима. Пред ученике смо поставили пет фактора (добрих страна) који доприносе утицају математичких задатака (експерименталног програма) на подстицање логичког мишљења у почетној настави математике. Издвојили смо следеће добре стране: *Задаци које смо добијали су веома занимљиви, Схватио/ла сам да је математика занимљивија него што сам раније мислио/ла, Схватио/ла сам да је математика много корисна, Стално смо били активни, Научио/ла сам да више мислим при решавању математичких задатака*.

Ученици су према свом мишљењу, редним бројевима од 1 до 5 рангирали по важности (1 – највише доприноси; 5 – најмање) наведене добре стране примене задатака који утичу на развијање логичког мишљења (експерименталног програма).

Табела 91. *Добре стране примене задатака који подстичу логичко мишљење ученика у почетној настави математике*

Добре стране	Прво место	Друго место	Треће место	Четврто место	Пето место	**Mean Rank**	**Rank**
Задаци које смо добијали су веома занимљиви	50 (42.0%)	14 (11.8%)	8 (6.7%)	10 (8.4%)	37 (31.1%)	2.75	I
Схватио/ла сам да је математика занимљивија него што сам раније мислио/ла	10 (8.4%)	24 (20.2%)	26 (21.8%)	33 (27.7%)	26 (21.8%)	3.34	V
Схватио/ла сам да је математика много корисна	13 (10.9%)	29 (24.4%)	36 (30.3%)	30 (25.2%)	11 (9.2%)	2.97	II, III,
Стално смо били активни	17 (14.3%)	33 (27.7%)	22 (18.5%)	30 (25.2%)	17 (14.3%)	2.97	II, III,
Научио/ла сам да више мислим при решавању математичких задатака	29 (24.4%)	18 (15.1%)	27 (22.7%)	16 (13.4%)	29 (24.4%)	2.98	IV

Резултати Фридмановог теста указују да нема значајне разлике између одговора ученика у рангирању понуђених фактора. То показују добијене вредности c2 (4, n = 119) = 8.520, p = 0.074. Тврдње су рангиране након поређења средњих вредности рангова (Mean Ranks).

Највише ученика сматра да је добра страна примене математичких задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика што су ови задаци врло занимљиви и интересантни и да су приликом њиховог решавања били активнији и схватили да је математика корисна. Можемо приметити да се средње вредности крећу од 2.75 до 3.34 и говоре о томе да су мале разлике у мишљењима ученика о добрим странама примене математичких задатака којима је циљ развијање логичког мишљења, тј. ученици су приближно слично рангирали наведене факторе. То сведочи о чињеници да су ученици свесни свих добрих страна примене ових задатака.

6. ПИТАЊЕ

Желели смо сазнати и шта је то што се ученицима допало на часовима на којима је реализован експериментални програм. У анкети смо пред ученике поставили питање отвореног типа: *Шта ти се допало на часовима које је реализовао експериментатор?*

На постављено питање, најчешће смо добили уопштене и веома различите одговоре. Било је и ученика који су оставили празно поље. Ради јаснијег сагледавања одговора, одговоре ученика сврстали смо у неколико група (Графикон 45).

Графикон 45. *Одговори ученика Е групе на шесто питање*

Из формираних категорија одговора и различитих одговора ученика се види да су ученици веомо добро идентификовали добре стране примене задатака који имају за циљ подстицање логичког мишљења. Ако занемаримо ученике који нису одговорили на ово питање, највећи проценат ученика сматра да је добра страна примене експерименталног програма то што су задаци које су решавали били изазовни, занимљиви, интересантни. Такви одговори ученика указују на чињеницу да су ученици заинтересовани за решавање задатака којима је циљ развијање логичког мишљења.

***

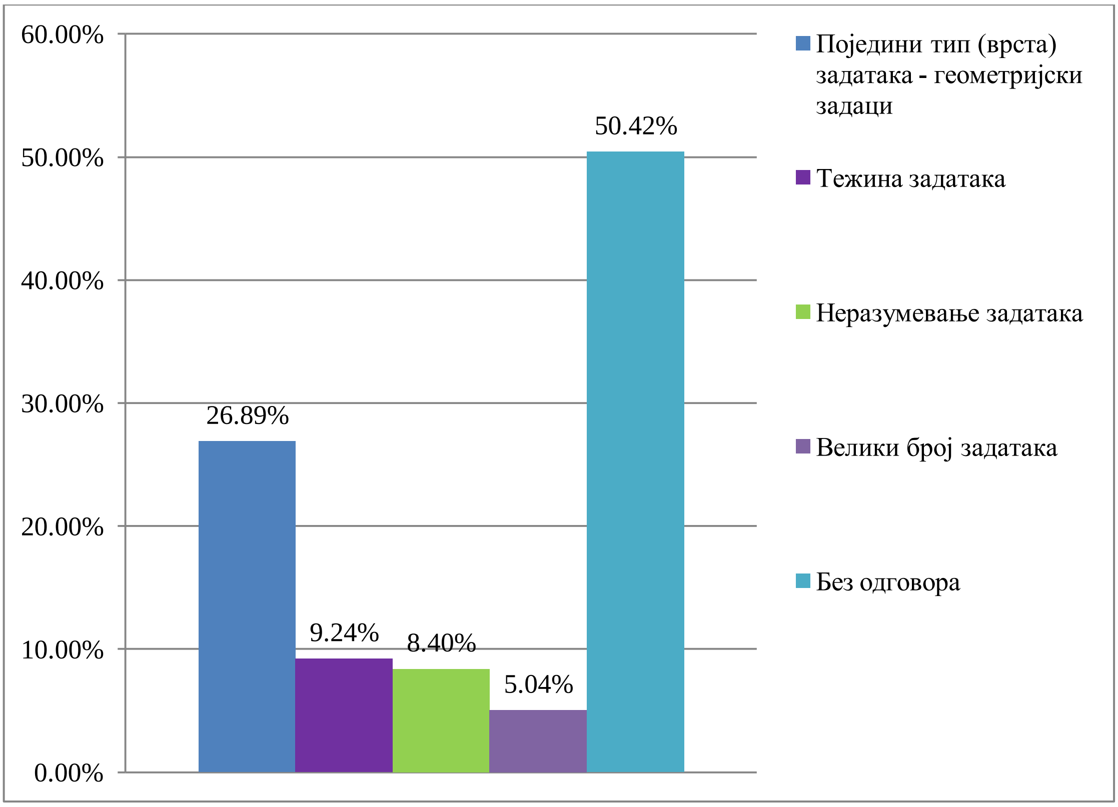
Анализом одговора ученика на треће и шесто питање, где су ученици показали да схватају предности експерименталног програма, да јасно идентификују добре стране примене задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, можемо закључити и потврдити другу претпоставку да *примена задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, према мишљењима ученика, има низ предности*.

Увидом у одговоре, уочавамо да су ученици свесни користи решавања задатака који су усмерени на подстицање и развијање логичког мишљења. Већина ученика сматра да су задаци које су решавали занимљиви, интересантни и изазовни. То је у директној вези и са позитивним утицајем на мотивацију за учење, а раније смо поменули, да код мотивисаних ученика можемо очекивати боље резултате. Са друге стране, ученици су свесни и да је потребно да буду мисаоно активни током решавања задатака усмерених на подстицање и развијање логичког мишљења. Мисаона активност ученика у настави има низ предности. Полазећи од Прврановићевих речи да „од равнице у математичком образовању нема много користи“ (према: Шпијуновић, Маричић, 2015: 355), К. Шпијуновић и С. Маричић истичу да те речи „имплицирају наставу математике у којој ученици увек морају да савладавају одређене тешкоће, и наставу тако организовану да подстиче развој ученика“ (2015: 355).

7. ПИТАЊЕ

Седмим питањем смо желели испитати мишљење ученика о недостацима експерименталног програма. Желели смо открити шта ученици виде као недостатак експерименталног програма, како би те недостатке могли решити и отклонити и на тај начин у будућим истраживањима побољшати експериментални програм. У анкети смо, пред ученике поставили питање отвореног типа да наведу *шта им се није свидело на претходним часовима које је реализовао експериментатор*.

Код овог питања, најчешће смо добили уопштене и веома различите одговоре. Било је и ученика без одговора. Ради јаснијег сагледавања одговора, одговоре смо разврстали у категорије (Графикон 46).



Графикон 46. *Одговори ученика Е групе на седмо питање*

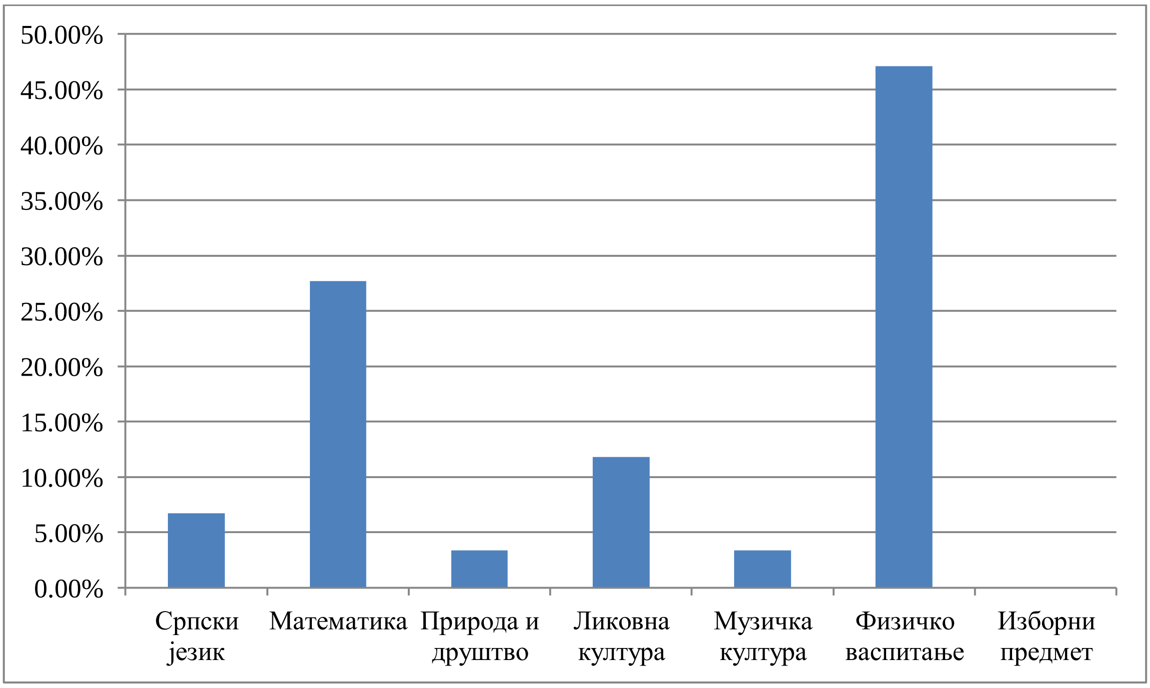
Из формираних категорија одговора и различитих одговора ученика, види се да су ученици веома добро идентификовали факторе који им се нису допали на часовима које је реализовао експериментатор. Ако занемаримо ученике који нису одговорили на ово питање, највећи проценат ученика истиче да им се није допала одређена врста задатака, прецизирајући да је реч о геометријским задацима. Добијени резултати говоре у прилог чињеници да ученици идентификују недостатке експерименталног програма. Њихови одговори могу да послуже за побољшање експерименталног програма и помогну нам да експериментални програм у будућности буде још прихватљивији ученицима.

2.1.3. Заинтересованост ученика за учење математике након решавања задатака који подстичу логичко мишљење

Желели смо испитати мишљење ученика о настави математике након решавања задатака којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика, тј. њихову заинтересованост за учење математике. Другим речима, хтели смо да проверимо да ли су посебно креирани задаци утицали на заинтересованост ученика за учење математике уопште. Како бисмо испитали наведено, поставили смо следећи задатак истраживања: *Испитати заинтересованост ученика за учење математике након часова на којима су решавани задаци који утичу на развијање логичког мишљења*. Пошли смо од претпоставке да *је интересовање за учење математике знатно веће код ученика експерименталне групе након примене експерименталног програма*. Наведену претпоставку смо проверавали петим питањем у анкети за ученике.

Да бисмо проверили постављени задатак и хипотезу истраживања, пре саме реализације експерименталног програма анкетирали смо ученике експерименталне групе (прва анкета која је садржала само једно питање – Прилог 5). Ученици су имали задатак да заокруже омиљени наставни предмет. На овај начин желели смо да видимо место математике на лествици „омиљених“ наставних предмета ученика пре реализације експерименталног програма.

Након првог анкетирања ученика експерименталне групе, пре увођења експерименталног фактора, добијени су резултати који су представљени на графикону 47.



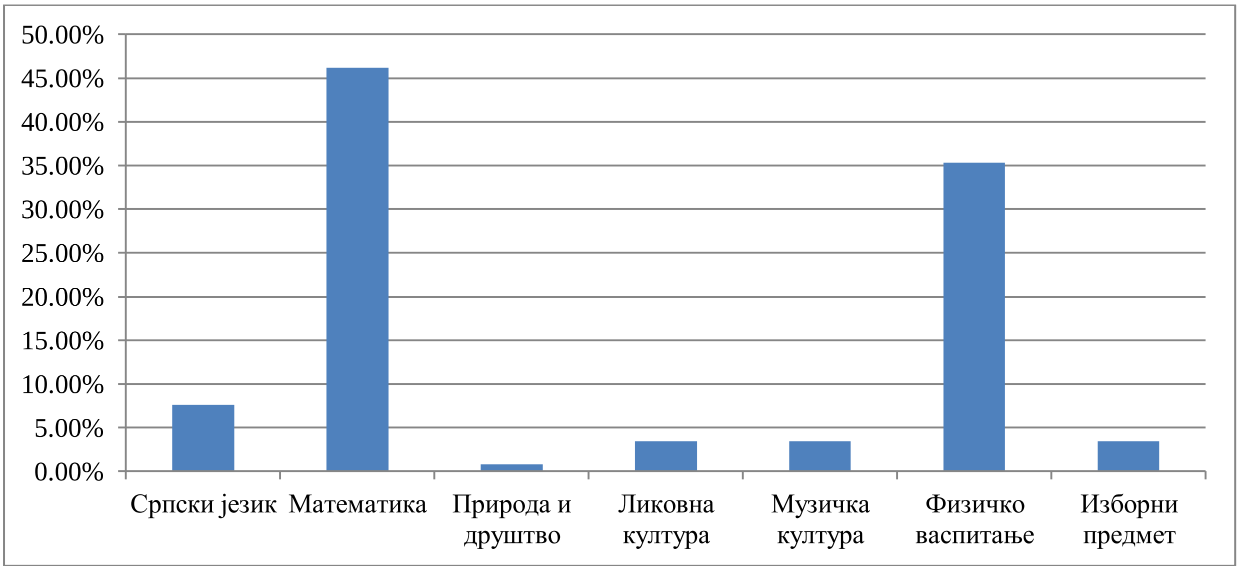
Графикон 47. *Омиљени наставни предмет ученика експерименталне групе пре примене задатака из експерименталног програма*

Највећи проценат ученика као омиљени наставни предмет заокружио је физичко васпитање. Математика се нашла на другом месту. Таква позиција математике пре реализације експерименталног програма охрабрује и говори да ученици према математици немају одбојан став.

5. ПИТАЊЕ

Након реализације експерименталног програма, ученицима експерименталне групе поновили смо питање (5. питање у анкети за ученике), како бисмо установили да ли се место математике променило под утицајем експерименталног програма. Желели смо упоредити резултате анкетирања пре и после реализације експерименталног програма.

Одговори ученика Е групе на пето питање након реализације експерименталног програма представили смо на графикону 48.



Графикон 48. *Омиљени наставни предмет ученика експерименталне групе након реализације експерименталног програма*

Највећи проценат ученика експерименталне групе је, након реализације експерименталног програма, као омиљени наставни предмет наводио математику (46.2%). Након математике следи физичко васпитање за које се определило 35.3% ученика. Ако ове резултате упоредимо са резултатима анкетирања ученика експерименталне групе пре реализације експерименталног програма, видимо да је ипак дошло до померања математике на лествици омиљених наставних предмета (са другог места на место омиљеног наставног предмета - прво место).

***

Како смо желели испитати да ли је експериментални програм утицао на заинтересованост ученика за учење математике, након спроведеног истраживања и анализе резултата, померање математике са другог на прво место у експерименталној групи можемо приписати утицају експерименталног програма и на тај начин потврдити полазну хипотезу истраживања да је *интересовање за учење математике знатно веће код ученика експерименталне групе након примене експерименталног програма*. Након часова на којима су решавани задаци креирани тако да утичу на развијање логичког мишљења, ученици су заинтересованији за математику као предмет и сврставају је у три омиљена наставна предмета.

Говорећи о мотивацији ученика, З. Курник истиче значај забавних задатака. Полазећи од става да се математика сматра „тешком, сувопарном, предметом који замара ум и предметом који многима неће требати у животу“ (2005: 7), аутор даље истиче да није тако и да је то погрешна претпоставка о математици. Насупрот томе, „многи математички садржаји могу се лепо повезати с проблемима из свакодневног живота и предочити на забавнији начин... На тај начин и забавни задаци постају и изврсна мотивација за развијање интереса за учење математике“ (Kurnik, 2005: 7). Резултати до којих смо дошли говоре у прилог чињеници да ученици сматрају да су задаци које су решавали интересантни, занимљиви и изазовни и то је утицало на њихову већу заинтересованост за математику као наставни предмет.

***

Приликом анкетирања ученика пошли смо од следећег задатка: *Испитати мишљења ученика о експерименталном програму и изазивању интересовања ученика за учење математике*. Анализирањем резултата истраживања дошли смо до следећих резултата:

- Ученици имају изразито позитиван став према часовима на којима се примењују задаци којима је циљ развијање логичког мишљења (експерименталном програму).

- Ученици су заинтересовани за решавање задатака којима је циљ развијање логичког мишљења.

- Ученици су заинтересовани за часове математике на којима се примењују одговарајући задаци креирани тако да утичу на развијање логичког мишљења.

- Примена задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, према мишљењима ученика, има низ предности.

- Након часова на којима су решавани задаци креирани тако да утичу на развијање логичког мишљења, ученици су заинтересованији за математику као предмет и сврставају је у три омиљена наставна предмета.

Одговори ученика говоре о њиховој заинтересованости за математичке садржаје после примене задатака креираних тако да утичу на развој логичког мишљења. Ученици су исказали став да су им часови на којима је реализован експериментални програм интересантни, да воле да решавају задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења, да би желели још часова на којима се решавају такви задаци. Рангирали су по важности добре стране решавања задатака који имају за циљ развијање логичког мишљења ученика. После примене експерименталног фактора, ученици експерименталне групе су нешто заинтересованији за учење математике. Такође, ученици су јасно наводили и шта је то што им се свидело на часовима које је реализовао експериментатор, као и шта им се на овим часовима није допало. На основу добијених резултата, можемо потврдити и полазну хипотезу истраживања (анкетирања ученика): *Одговарајућа организација наставе математике (експериментални програм - одређени математички задаци који утичу на развијање логичког мишљења) у великој мери изазива интересовање ученика за учење математике.*

3. ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И МОГУЋНОСТИ РАЗВИЈАЊА ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА УЧЕНИКА - РЕЗУЛТАТИ АНКЕТИРАЊА УЧИТЕЉА

3.1. Мишљење учитеља о утицају почетне наставе математике на подстицање и развијање логичког мишљења ученика

У развијању логичког мишљења ученика важна је улога учитеља. Ставови учитеља према проблему подстицања и развијања логичког мишљења су битни за развој мишљења ученика. Од тога какав је став учитеља зависи и колико ће он бити посвећен остваривању тог задатка. Стога, желели смо испитати мишљења и ставове учитеља о могућностима развијања логичког мишљења у почетној настави математике.

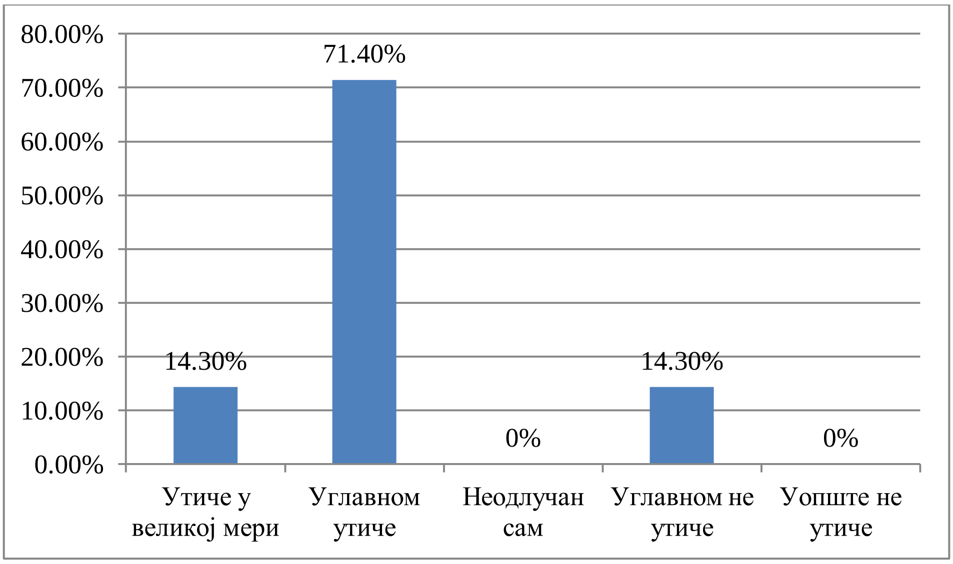
Како смо истраживањем желели испитати утицај одговарајућих математичких задатака (експерименталног програма) на развој логичког мишљења ученика млађег школског узраста и, полазећи од задатка, *испитати мишљења учитеља о утицају почетне наставе математике на подстицање и развијање логичког мишљења ученика*, анкетирали смо 112 учитеља. Поред анкете, учитељи су попуњавали и скалу процене о заступљености различитих типова задатака који утичу на поједине компоненте логичког мишљења.

3.1.1. Погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика

Мишљење учитеља о погодностима уџбеника математике за подстицање и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда испитивали смо првим и другим питањем у анкети за учитеље.

1. ПИТАЊЕ

Како нас је занимало мишљење учитеља о погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика, пред учитеље је постављено следеће питање: *У којој мери, према Вашем мишљењу, уџбеник математике својим садржајима и концепцијом утиче на развијање логичког мишљења ученика?* Добијени резултати су представљени на графикону 49.



Графикон 49. *Мишљења учитеља о погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика*

Анализом одговора учитеља увиђамо да већина испитаника, њих 96 (85.7%), сматра да уџбеници математике погодују развијању логичког мишљења у почетној настави математике. То говори у прилог чињеници да *уџбеници математике својом концепцијом погодују развијању логичког мишљења ученика*. То је разумљиво када се сагледају савремени токови и настојања да се уџбеници стално мењају и допуњују садржајима и задацима који теже да одговоре на потребе савременог друштва. Уџбеници математике континуирано трпе измене и допуне како би се обогатили и прилагодили теденцијама које намеће друштвени и технолошки развој. Све више се у први план истиче значај подстицања математичког мишљења ученика, као и применљиво функционално знање, па и уџбеници трпе измене у том правцу. Отуда су разумљиви и очекивани овакви одговори учитеља. У уџбеницима су одабрани математички садржаји које ученици треба да усвоје. Уџбеници су све више усмерени на развој мишљења ученика и помажу ученицима не само у усвајању математичких знања, него и у подстицању математичких способности и способности математичког мишљења, а тиме и способности логичког мишљења.

Посебно нас је интересовало да ли су средина у којој учитељи раде, разред којем предају и године радног искуства значајно утицале на мишљења учитеља о погодности уџбеника математике за подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Због малог броја фреквенција одговора учитеља у појединим пољима, формирали смо две подгрупе испитаника с обзиром на разред којем предају. Прву подгрупу чине учитељи који предају првом или другом разреду, док другу подгрупу чине учитељи који предају трећем или четвртом разреду. Како не бисмо прекршили једну од претпоставки хи-квадрат теста у погледу најмање очекиване ћелијске учесталости, учитеље смо, с обзиром на радни стаж, поделили у две подгрупе: до 20 година радног искуства и више од двадесет година радног искуства (Табела 92).

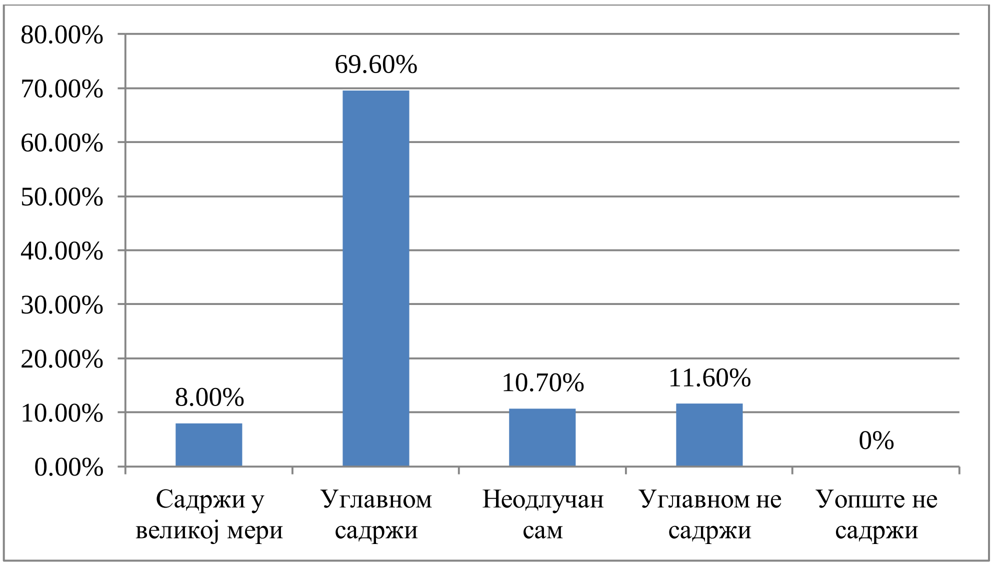
Табела 92. *Мишљења учитеља о погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 1. питање			
		Утиче у великој мери	Углавном утиче	Углавном не утиче	Укупно
Средина	сеоска	7 (17.1%)	27 (65.9%)	7 (17.1%)	41 (100.0%)
	градска	9 (12.7%)	53 (74.6%)	9 (12.7%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	8 (17.8%)	31 (68.9%)	6 (13.3%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	8 (11.9%)	49 (73.1%)	10 (14.9%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	7 (14.0%)	37 (74.0%)	6 (12.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	9 (14.5%)	43 (69.4%)	10 (16.1%)	62 (100.0%)
	Укупно	16 (14.3%)	80 (71.4%)	16 (14.3%)	112 (100.0%)

Одговори учитеља на прво питање нису статистички значајно условљени средином у којој раде (χ^2 (2, n = 112) = 0.985, p = 0.611), као ни разредом којем предају (χ^2 (2, n = 112) = 0.758, p = 0.685), а ни годинама радног искуства (χ^2 (2, n = 112) = 0.419, p = 0.811).

2. ПИТАЊЕ

Нема сумње да уџбеник математике представља један од важних елемената значајних у остваривању задатка наставе математике који се односи на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Занимало нас је мишљење учитеља о заступљености задатака којима се може позитивно деловати на логичко мишљење. Због тога смо пред учитеље поставили питање: *У којој мери, према Вашем мишљењу, уџбеник математике садржи задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика?* Добијене резултате приказали смо графички (Графикон 50).



Графикон 50. *Мишљења учитеља о погодности уџбеника математике са аспекта садржајности задатака који утичу на развијање логичког мишљења*

Добијени резултати истраживања говоре да у уџбеницима математике који се користе у почетној настави математике, према мишљењима учитеља, има задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика. Највећи проценат учитеља сматра да уџбеници математике садрже задатке који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења. То је разумљиво јер су учитељи мишљења да уџбеници математике у великој мери погодују развијању логичког мишљења ученика, што је доказано анализом одговора учитеља на прво питање. Како су уџбеник математике учитељи оценили као погодан за подстицање и развијање логичког мишљења ученика, било је очекивано да ће на питање о томе колико уџбеник садржи задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика дати сличан одговор, тј. да уџбеник математике који користе има довољно оваквих задатака. То се може оправдати чињеницом да уџбеник настоји одговорити савременим условима и тенденцијама савременог друштва у погледу потребе развијања мишљења ученика, па, стога, стално трпи измене у том правцу и континуирано бива усавршаван. То охрабрује јер указује на чињеницу да у уџбеницима има задатака којима се већ од првих дана школовања може почети са планским и систематским подстицањем и разијањем логичког мишљења.

У погледу средине у којој учитељи раде, разреда којем предају и радног стажа нису установљене статистички значајне разлике у одговорима на друго питање. Како не бисмо прекршили претпоставку хи-квадрат теста у погледу најмање очекиване ћелијске учесталости, спојили смо степене слагања у једну категорију одговора, а неслагање у другу. Резултати су представљени у табели 93.

Табела 93. *Мишљења учитеља о погодности уџбеника математике са аспекта садржајности задатака који утичу на развијање логичког мишљења с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 2. питање			
		Садржи у великој мери и углавном садржи	Неодлучан сам	Углавном не садржи	Укупно
Средина	сеоска	31 (75.6%)	4 (9.8%)	6 (14.6%)	41 (100.0%)
	градска	56 (78.9%)	8 (11.3%)	7 (9.9%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	37 (82.2%)	3 (6.7%)	5 (11.1%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	50 (74.6%)	9 (13.4%)	8 (11.9%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	39 (78.0%)	6 (12.0%)	5 (10.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	48 (77.4%)	6 (9.7%)	8 (12.9%)	62 (100.0%)
	Укупно	87 (77.7%)	12 (10.7%)	13 (11.6%)	112 (100.0%)

На основу резултата χ^2 (2, n = 112) = 0.602, p = 0.740, можемо закључити да мишљења учитеља о томе колико уџбеници математике које користе у раду садрже задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика не зависе од средине у којој учитељи раде.

Као што се из табеле види, нешто већи проценат учитеља који предају првом или другом разреду сматра да уџбеници математике садрже (*садрже у великој мери* или *углавном садрже*) задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика, док је проценат учитеља који предају трећем или четвртом разреду и имају овакав став нешто мањи. Приближно је исти проценат учитеља који предају првом или другом разреду и оних који предају трећем или четвртом разреду који сматрају да уџбеници математике *углавном не садрже* задатке који утичу на развијање логичког мишљења. Мала разлика је уочена у изражавању *неодлучности*. Нешто је већи проценат неодлучних учитеља у групи учитеља који предају трећем или четвртом разреду у односу на проценат неодлучних учитеља који предају првом или другом разреду. На основу добијених резултата χ^2 (2, n=112) = 1.366, p = 0.505, можемо закључити да у свим разредима, према мишљењу учитеља, уџбеници математике у великој мери садрже задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика.

Нема статистички значајних разлика у одговорима учитеља о томе колико уџбеници математике садрже задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика с обзиром на радни стаж учитеља χ^2 (2, n=112) = 0.342, p = 0.843.

***

У раду смо поставили задатак истраживања: *Испитати мишљења учитеља о погодности уџбеника математике за развијање логичког мишљења ученика*. Како је највећи проценат учитеља изнео мишљење да уџбеник математике својим садржајима и концепцијом утиче на развијање логичког мишљења ученика, да у уџбеницима математике у довољној мери има задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика и како њихови одговори нису условљени средином у којој раде, разредом којем предају, ни годинама њиховог радног стажа, можемо потврдити хипотезу да учитељи сматрају да *уџбеник математике погодује развијању логичког мишљења ученика*.

До сличних резултата су дошли и М. Пикула и О. Марковић (1997) испитујући ставове учитеља о уџбеницима математике за први разред основне школе са аспекта садржајно-логичких вредности. Аутори су утврдили да је уџбеник у погледу садржајно-логичких вредности, од стране учитеља, оцењен као врло добар. „Садржај овог уџбеника великим делом чине задаци помоћу којих се код ученика развија способност мишљења и логичког закључивања, способност комбиновања, процењивања и осећај за простор“ (1997: 200–201). Испитујући заступљеност основних логичких операција у уџбенику математике за трећи разред основне школе, К. Шпијуновић истиче да је уџбеник „конципиран на начин који омогућава учитељу да у појединим етапама рада уводи садржаје о основним логичким операцијама (конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција, негација)“ (1999: 361).

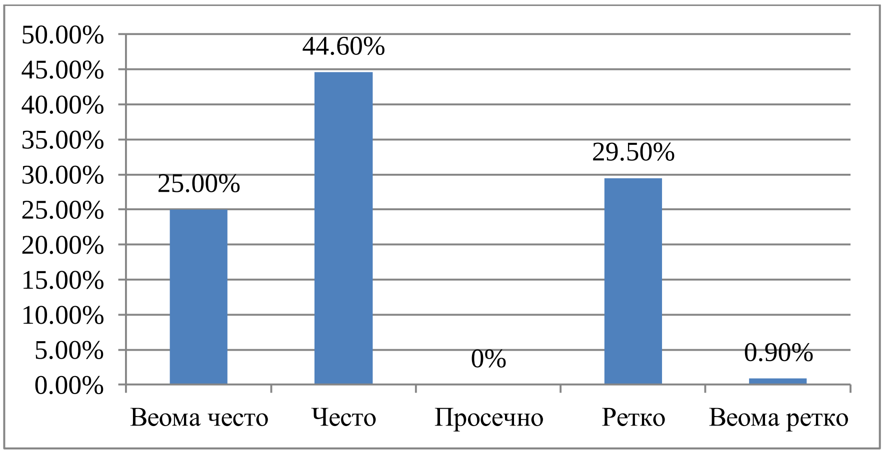
Резултати поменутих аутора и наши резултати показују да учитељи позитивно процењују уџбеник математике са аспекта погодности подстицања и развијања логичког мишљења ученика.

3.1.2. Примена задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика

Колико често и када учитељи најчешће примењују задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика и тиме подстичу логичко мишљење (на ком типу часа и ком делу часа) испитивали смо трећим, четвртим и петим питањем у анкети за учитеље.

3. ПИТАЊЕ

Значај примене задатака којима је циљ развијање логичког мишљења не треба доводити у питање ако се узме у обзир, што смо више пута у раду истицали, значај развијања логичког мишљења ученика као важан задатак наставе математике. Како бисмо испитали колико често учитељи примењују овакве задатке у пракси, тј. почетној настави математике, пред њих смо поставили питање: *Колико често Ви постављате задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика?* Добијене резултате смо представили на графикону 51.



Графикон 51. *Примена задатака којима је циљ развијање логичког мишљења*

Добијени резултати истраживања говоре да учитељи често примењују задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Како се од школе све више очекује развијање мишљења ученика, тај резултат је био и очекиван. Настојећи да остваре задатак наставе који се односи на развијање мишљења ученика, учитељи примењују задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Овакав резултат је био очекиван јер се пред учитеље поставља задатак да развијају логичко мишљење ученика и очекује да тај задатак буде остварен у почетној настави математике. С друге стране, учитељи су често „препуштени сами себи“ у остваривању тог задатка и само применом различитих задатака (логичких, проблемских, нестандардних и сл.) настоје остварити задатак почетне наставе математике - *развој логичког мишљења ученика*. То оправдава њихову самопроцену да *често*, па чак и *веома често* примењују задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика, јер су обавезни да то и чине у пракси. Још један од разлога за овакву процену учитеља је чињеница да се преко математичких задатака остварују сви исходи наставе, па, ако желе развијати логичко мишљење својих ученика, они ће у настави користити задатке за које сматрају да подстичу и развијају логичко мишљење и да могу довести до жељеног циља. Посебно морамо указати на забрињавајуће велики проценат учитеља који су се изјаснили да ретко примењују задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Тај податак је веома забрињавајући у времену када је мишљење ученика императив савременог образовања, образовања које мора бити усмерено на развијање мишљења.

У погледу средине у којој раде, разреда којем предају и радног стажа, уочене разлике у одговорима учитеља на треће питање нису статистички значајне. Резултати су представљени у табели 94.

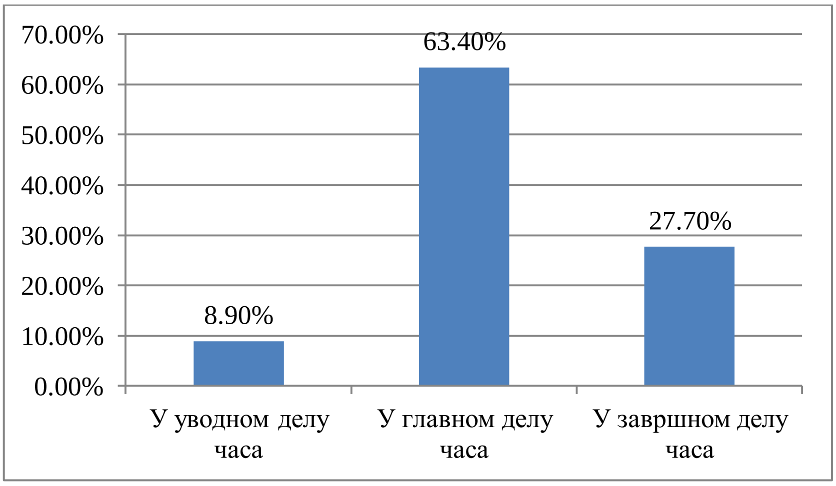
Табела 94. *Учесталост примене задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на треће питање			
		Веома често	Често	Ретко и веома ретко	Укупно
Средина	сеоска	10 (24.4%)	16 (39.0%)	15 (36.6%)	41 (100.0%)
	градска	18 (25.4%)	34 (47.9%)	19 (26.8%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	13 (28.9%)	21 (46.7%)	11 (24.4%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	15 (22.4%)	29 (43.3%)	23 (34.3%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	12 (24.0%)	23 (46.0%)	15 (30.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	16 (25.8%)	27 (43.5%)	19 (30.6%)	62 (100.0%)
	Укупно	28 (25.0%)	50 (44.6%)	34 (30.4%)	112 (100.0%)

Резултати показују да не постоје разлике по овом питању које би настале као последица различите средине у којој учитељи раде (χ^2 (2, n=112) = 1.293, p = 0.524), разреда којем предају (χ^2 (2, n=112) = 1.390, p = 0.499) и година радног искуства у настави (χ^2 (2, n=112) = 0.077, p = 0.962).

4. ПИТАЊЕ

На часу математике највећим делом се остварују задаци наставе математике. Стога смо желели испитати који део часа учитељи сматрају најпогоднијим за развијање логичког мишљења ученика. Како бисмо испитали наведено, пред учитеље смо поставили питање: *У ком делу часа најчешће примењујете задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика?* Добијени резултати су представљени на графикону 52.



Графикон 52. *Погодност делова часа за развијање логичког мишљења ученика*

Разлог добијања оваквих резултата, може се оправдати чињеницом да главни део часа најдуже траје и да правилном артикулацијом времена у главном делу часа, има простора за задатке који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. То не оспорава чињеницу да је и уводни део погодан за примену поменутих задатака и да је добро час започети задатком који ће активирати способности логичког мишљења, а такође применити их и у завршном делу часа.

У погледу средине у којој раде и радног стажа нема значајне разлике у одговорима учитеља на четврто питање. Разлике су уочене у погледу разреда којем предају (Табела 95).

Табела 95. *Погодност делова часа за развијање логичког мишљења ученика с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 4. питање			
		У уводном делу часа	У главном делу часа	У завршном делу часа	Укупно
Средина	сеоска	4 (9.8%)	28 (68.3%)	9 (22.0%)	41 (100.0%)
	градска	6 (8.5%)	43 (60.6%)	22 (31.0%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	2 (4.4%)	24 (53.3%)	19 (42.2%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	8 (11.9%)	47 (70.1%)	12 (17.9%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	2 (4.0%)	37 (74.0%)	11 (22.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	8 (12.9%)	34 (54.8%)	20 (32.3%)	62 (100.0%)
	Укупно	10 (8.9%)	71 (63.4%)	31 (27.7%)	112 (100.0%)

На основу добијених резултата χ^2 (2, n = 112) = 1.061, p = 0.588, можемо закључити да средина у којој учитељи раде није утицала на то који део часа им је најпогоднији за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика.

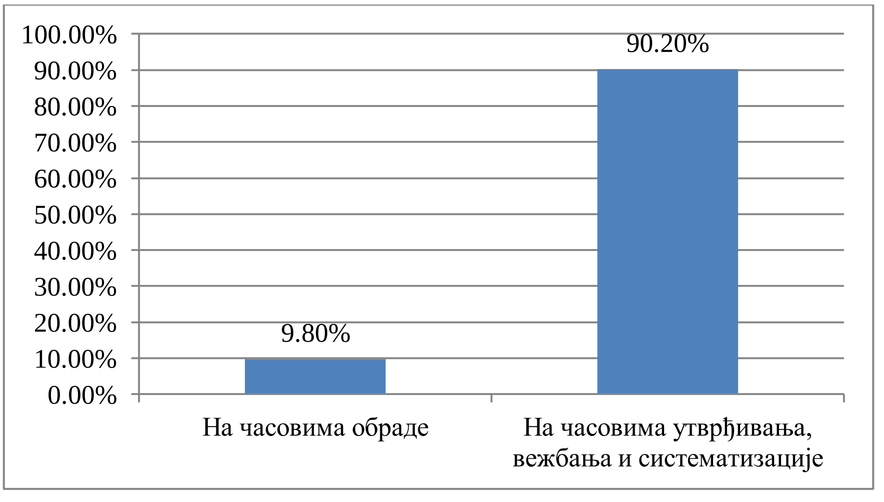
Проценат учитеља који сматрају да је *уводни део часа* најпогоднији за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика је најмањи у обе групе учитеља формиране с обзиром на разред којем предају. Нешто је већи проценат учитеља који предају трећем или четвртом разреду, а који имају такво мишљење. Разлике постоје када су у питању остала два понуђена дела часа. Највећи проценат учитеља у обе групе формиране на основу разреда којем предају определио се за *главни део часа* као најпогоднији за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика. Више од половине учитеља (53.3%) који предају првом или другом разреду определило се за *главни део часа* као најпогоднији за примену оваквих задатака, као и 70.1% учитеља који предају трећем или четвртом разреду. За *завршни део часа* као најпогоднији за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика определио се нешто већи проценат учитеља који предају првом или другом разреду. Добијена вредност хи-квадрат теста χ^2 (2, n=112) = 8.643, p = 0.013 указује да су разлике у одговорима учитеља (о погодности делова часа за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика), с обзиром на разред којем учитељи предају, статистички значајне. То говори да постоје разлике у одговорима учитеља о погодности делова часа за примену задатака који имају за циљ развијање логичког мишљења ученика између учитеља који предају првом или другом разреду и учитеља који предају трећем или четвртом разреду. Из резултата можемо закључити да учитељи који предају првом или другом разреду задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика нешто чешће примењују у завршном делу часа, у односу на учитеље који предају трећем или четвртом разреду.

Резултат χ^2 (2, N = 112) = 5.113, p = 0.078 показује да разлика у одговорима учитеља о погодности делова часа за примену задатака који утичу на развијање логичког мишљења с обзиром на радни стаж учитеља није значајна.

Развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике представља важан задатак, али је у остваривању овог задатка учитељима дата слобода, како у погледу начина на који ће то постизати, тако и у погледу делова часа на којем ће то остваривати. Добијени резултати истраживања говоре да учитељи најчешће примењују задатке којима је циљ развијање логичког мишљења у главном делу часа (или неком његовом делу). Одговори учитеља нису статистички значајно условљени средином у којој учитељи раде, као ни радним стажом учитеља. Занимљиво је да је примећена разлика у одговорима на ово питање с обзиром на разред којем учитељи предају статистички значајна. Такав резултат је оправдан чињеницом да смо учитеље с обзиром на разред којем предају поделили у две групе: учитеље који предају првом или другом разреду и учитеље који предају трећем или четвртом разреду. Разлике у одговорима учитеља које су се појавиле с обзиром на разред највероватније су последица узраста ученика са којим учитељи раде, као и садржаја планираних за одређени разред. Код ученика трећег и четвртог разреда долази до развијања мисаоних функција које у првом и другом разреду још нису довољно развијене. То је утицало да учитељи који предају првом или другом разреду нешто чешће у завршном делу часа примењују задатке усмерене на развој логичког мишљења ученика.

5. ПИТАЊЕ

Учитељи у настави математике остварују задатке наставе на часовима, као и ван часова. Нас је занимало када учитељи најчешће подстичу логичко мишљење својих ученика. Стога смо пред учитеље поставили питање: *Када најчешће примењујете задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика?* Резултати су представљени на графикону 53.



Графикон 53. *Погодност различитих типова часа за развијање логичког мишљења ученика*

Учитељи најчешће на *часовима вежбања, утврђивања и систематизације* примењују задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика. Мали проценат учитеља то чини на часовима обраде. Другим речима, часови утврђивања, вежбања и систематизације су најпогоднији за позитивно деловање на логичко мишљење у почетној настави математике. Овакав став је јасан јер на тим часовима учитељ има највише слободе у погледу примене различитих типова задатака, као и највише времена које може распоредити тако да бар једним делом утиче на развијање способности логичког мишљења ученика. Ако у свом раду учитељ постави задатак да подстиче и развија логичко мишљење ученика и ако жели тај задатак остварити у настави, то ће чинити преко задатака. Учитељи ће за часове утврђивања, вежбања и систематизације бирати задатке којима ће подстицати логичко мишљење ученика (поједине способности логичког мишљења) водећи рачуна о узрасту ученика.

Нема значајних разлика у одговорима учитеља на пето питање у погледу средине у којој раде, разреда којем предају и радног стажа (Табела 96).

Табела 96. *Погодност различитих типова часа за развијање логичког мишљења ученика с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 5. питање		
		На часовима обраде	На часовима утврђивања, вежбања и систематизације	Укупно
Средина	сеоска	4 (9.8%)	37 (90.2%)	41 (100.0%)
	градска	7 (9.9%)	64 (90.1%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	4 (8.9%)	41 (91.1%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	7 (10.4%)	60 (89.6%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	6 (12.0%)	44 (88.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	5 (8.1%)	57 (91.9%)	62 (100.0%)
	Укупно	11 (9.8%)	101 (90.2%)	112 (100.0%)

Резултати истраживања показују да су за развијање логичког мишљења ученика најпогоднији *часови утврђивања, вежбања и систематизације*. Одговори учитеља нису статистички значајно условљени средином у којој учитељи раде (χ^2 (1, N = 112) = 0.000, p = 1.000, Фишеров показатељ вероватноће p = 1.000), као ни разредом којем тренутно предају (χ^2 (1, N = 112) = 0.000, p = 1.000, Фишеров показатељ вероватноће p = 1.000), а ни годинама радног искуства учитеља (χ^2 (1, N = 112) = 0.142, p = 0.707, Фишеров показатељ вероватноће p = 0.536).

***

У раду смо поставили задатак истраживања: *Испитати колико често и када учитељи најчешће примењују задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика и тиме подстичу логичко мишљење (у ком делу часа и на ком типу часа)*. На основу добијених резултата: да највећи број учитеља често примењује задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, да највећи проценат учитеља то најчешће чини у главном делу часа (или неком његовом делу), као и да највећи проценат учитеља ове задатке примењује на часовима утврђивања, вежбања или систематизације, можемо потврдити хипотезу да *учитељи често примењују задатаке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике*.

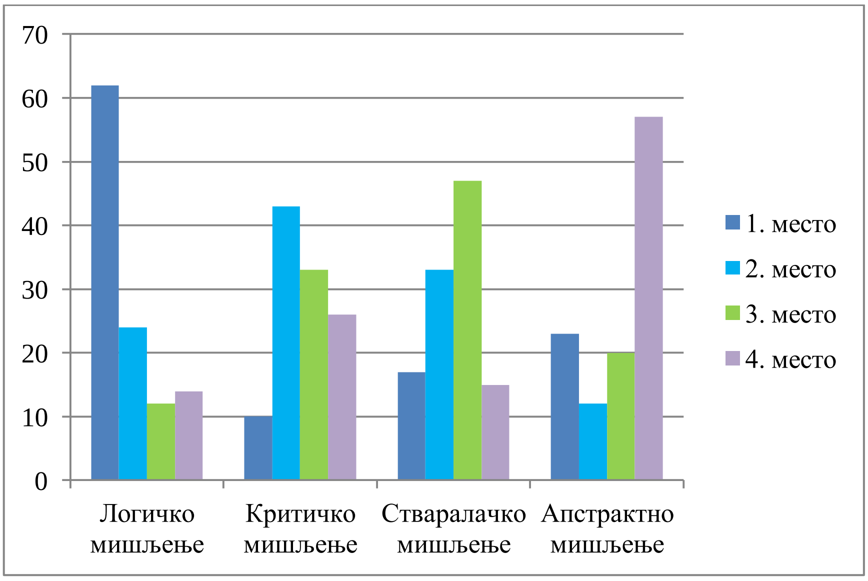
3.1.3. Почетна настава математике и подстицање и развијање логичког мишљења ученика

Формулисали смо задатак: *Испитати у којој мери, према мишљењу учитеља, почетна настава математике утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.* Наведени задатак истраживања испитивали смо шестим, седмим и осмим питањем у анкети за учитеље.

6. ПИТАЊЕ

Бавећи се логичким мишљењем ученика у почетној настави математике, пошли смо од важног задатка наставе математике који истиче значај развијања математичког мишљења ученика и то: ставаралачког, критичког, логичког и апстрактног мишљења. С тим у вези, желели смо испитати мишљења учитеља о важности појединих врста математичког мишљења, као и колика је важност логичког мишљења (где је његово место у математичком мишљењу).

Пред учитеље смо поставили задатак да понуђене врсте математичког мишљења рангирају (означе по важности) бројевима од један до четири и то тако што ће врсту мишљења коју према сопственом мишљењу најчешће и највише подстичу у раду ставити на прво место. У анкети за учитеље смо у оквиру упутства за попуњавање дали и кратак преглед наведених врста математичког мишљења са кратким дефиницијама помоћу којих је учитељима објашњено шта свако од ових врста мишљења представља, у складу са операционализацијом коју смо извршили за потребе рада. Резултати су представљени на графикону 54.



Графикон 54. *Резултати рангирања различитих врста математичког мишљења*

Највише учитеља сматра да је у математичком мишљењу најважније логичко, затим следе стваралачко, потом критичко и на крају апстрактно мишљење. Добијени резултати говоре у прилог томе да су све врсте математичког мишљења подједнако важне, односно да *почетна настава математике, њена организација, према мишљењима учитеља, у значајној мери утиче на све врсте математичког мишљења.* Посебно морамо указати на чињеницу да се логичко мишљење ипак више истакло од осталих и да је то, вероватно, последица упутства које су учитељи добили приликом попуњавања анкете. Анкета се односила на мишљења учитеља о логичком мишљењу ученика у почетној настави математике, па су смернице и додатна упутства, као и дефинисање основних појмова везаних за логичко мишљење, вероватно, у одређеној мери утицали на мишљења учитеља приликом одговарања на ово питање и уопште на одговоре у анкети. Према добијеним резултатима, учитељи највише подстичу *логичко мишљење* ученика. Важно је нагласити и да већина испитаних учитеља ову врсту математичког мишљења ставља на прво или друго место по важности. Велики проценат учитеља *стваралачко мишљење* ставља на прва три места. Критичко мишљење је највећи број учитеља ставио на друго (38.4%) и треће место (29.5%). Апстрактно мишљење је највећи проценат учитеља ставио на четврто место. Апстрактно мишљење је веома важно за наставу математике и овакво рангирање не умањује његову важност, али, вероватно, проистиче из чињенице да се у литератури најмање изоловано помиње, а више „подразумева" као саставни део математичког мишљења. Често се апстрактно мишљење и изједначава са математичким мишљењем. Одговори учитеља се могу разумети и оправдати чињеницом да је настава математике сама по себи апстрактна, оперише апстрактним појмовима и без апстрактног мишљења настава математике је неизводљива, па се оно само по себи „подразумева" у настави математике и учитељи се више окрећу подстицању и развијању преосталих врста математичког мишљења. Са друге стране, математичко мишљење, схваћено као сложена активност коју чине логичко, критичко, стваралачко и апстрактно, мора се подстицати и разијати у наставном процесу, ако желимо стварати свестране и самосталне појединце који ће умети да се сналазе у новим проблемским ситуацијама. „Развијање математичког мишљења ученика у почетној настави математике треба да буде засновано на избору одговарајућих математичких садржаја, метода и облика рада, стварању услова који ће да подстичу мисаону активност ученика, негују његову самосталност у учењу у стицању математичких знања" (Шпијуновић, Маричић, 2016: 451). Добијени резултати говоре о томе да су учитељи свесни важности подстицања математичког мишљења да то и чине на описани начин у настави подстичући и развијајући све његове компоненте (Табела 97).

Табела 97. *Мишљења учитеља о месту логичког мишљења у математичком мишљењу*

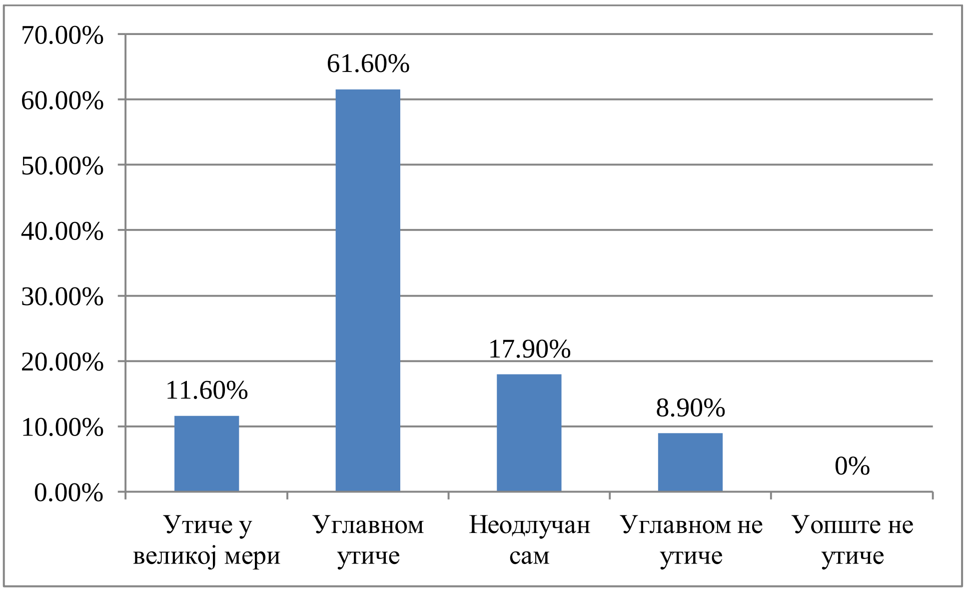
Врста математичког мишљења	1. место	2. место	3. место	4. место	**Mean Rank**	**Rank**
Логичко мишљење	62 (55.4%)	24 (21.4%)	12 (10.7%)	14 (12.5%)	1.80	I
Критичко мишљење	10 (8.9%)	43 (38.4%)	33 (29.5%)	26 (23.2%)	2.67	III
Стваралачко мишљење	17 (15.2%)	33 (29,5%)	47 (42.0%)	15 (13.4%)	2.54	II
Апстрактно мишљење	23 (20.5%)	12 (10.7%)	20 (17.9%)	57 (50.9%)	2.99	IV

Можемо приметити да се средње вредности крећу од 1.80 до 2.99 и говоре о томе да постоје разлике у мишљењима учитеља о важности појединих врста математичког мишљења. Резултати Фридмановог теста показују да постоје значајне разлике у рангирању различитих врста математичког мишљења. То показују добијене вредности c2 (3, n = 112) = 50.818, p = 0.000. Врсте мишљења су рангиране након поређења средњих вредности рангова.

Како бисмо уочили између којих врста математичког мишљења су запажене разлике у рангирању статистички значајне, радили смо накнадне тестове (post hoc test). Накнадни тестови су показали да су разлике у рангирању логичког и стваралачког мишљења (p = 0.000), ЛМ и КМ (p = 0.000), ЛМ и АМ (p = 0.000) статистички значајне. Такође, разлике постоје и у рангирању стваралачког и апстрактног мишљења (p = 0.050). Разлика у средњој вредности између *стваралачког* и *критичког мишљења* је мала (износи 0,13) и указује на малу разлику у одлучности учитеља о важности ове две врсте математичког мишљења.

7. ПИТАЊЕ

Желели смо испитати у којој мери, према мишљењу учитеља, почетна настава математике утиче на развијање логичког мишљења ученика. Пред учитеље је постављено питање: *У којој мери, према Вашем мишљењу, почетна настава математике и математички задаци утичу на развијање логичког мишљења ученика?* Свој степен слагања са изнетим тврђењем учитељи су износили заокруживањем једног од пет понуђених одговора: *утиче у великој мери, углавном утиче, неодлучан сам, углавном не утиче, уопште не утиче*. Резултати су приказани на графикону 55.



Графикон 55. *Утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика*

Резултати које смо добили охрабрују, јер 73.2% учитеља сматра да почетна настава математике утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. То говори у прилог чињеници да већина учитеља настоји остварити овај задатак у почетној настави математике.

Одговори учитеља на седмо питање према локацији школе и радном стажу представљени су у табели 98. У табели су представљени и одговори учитеља на седмо питање с обзиром на разред, само што смо те одговоре учитеља сврстали у три категорије како не бисмо нарушили претпоставку за хи-квадрат тест.

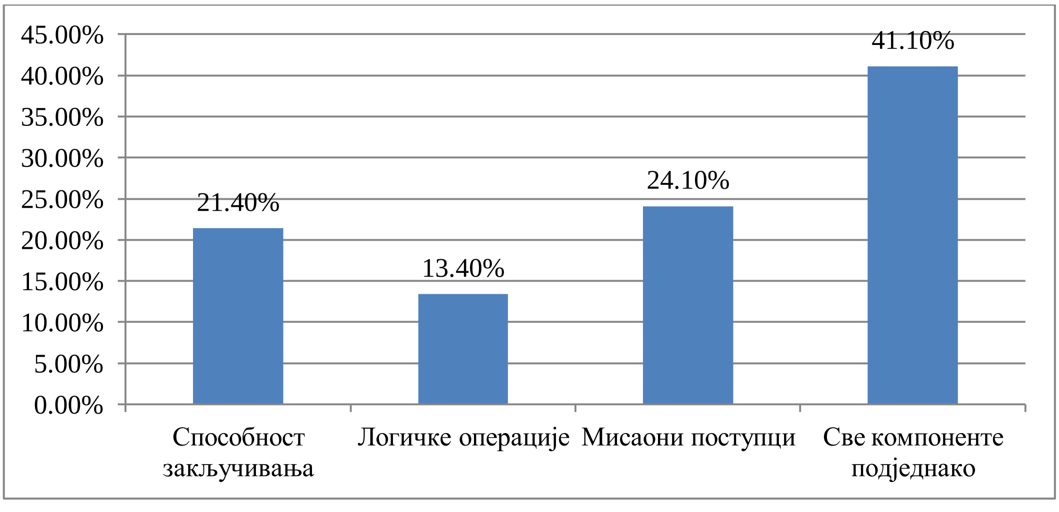
Табела 98. *Утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори на седмо питање				
		Утиче у великој мери	Углавном утиче	Неодлучан сам	Углавном не утиче	Укупно
Средина	сеоска	6 (14.6%)	24 (58.5%)	7 (17.1%)	4 (9.8%)	41 (100.0%)
	градска	7 (9.9%)	45 (63.4%)	13 (18.3%)	6 (8.5%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	32 (71,1%)		9 (20,0%)	4 (8,9%)	45 (100,0%)
	трећи или четврти	50 (74,6%)		11 (16,4%)	6 (9,0%)	67 (100,0%)
Радни стаж	до 20 година	7 (14.0%)	32 (64.0%)	9 (18.0%)	2 (4.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	6 (9.7%)	37 (59.7%)	11 (17.7%)	8 (12.9%)	62 (100.0%)
	Укупно	13 (11.6%)	69 (61.6%)	20 (17.9%)	10 (8.9%)	112 (100.0%)

На основу резултата χ^2 (3, N = 112) = 0.681, p = 0.878, закључује се да мишљење учитеља о ефектима почетне наставе математике на подстицање логичког мишљења није статистички значајно условљено средином у којој учитељи раде. Радни стаж није статистички значајно утицао на мишљења учитеља о овом питању χ^2 (2, N = 112)= 0.239 и p =0.887. Такође, ни радно искуство није утицало на одговоре учитеља у седмом питању χ^2 (3, N = 112) = 2.988, p = 0.394.

8. ПИТАЊЕ

Желели смо испитати коју компоненту логичког мишљења учитељи највише подстичу задацима у почетној настави математике. Бавећи се логичким мишљењем ученика у почетној настави математике, учитељима смо понудили следеће компоненте логичког мишљења: *способности закључивања, логичке операције и мисаоне поступке.* Такође, учитељима смо понудили и одговор да у настави математике задацима подстичу *све компоненте* логичког мишљења подједнако. Резултати су представљени на графикону 56.



Графикон 56. *Компоненте логичког мишљења које учитељи подстичу у почетној настави математике*

Анализом одговора, увиђамо да већина испитаних учитеља, њих 41.1%, подједнако утичу на подстицање и развијање свих компоненти логичког мишљења ученика и тиме истичу подједнаку важност свих компоненти логичког мишљења. Овакав резултат је оправдан чињеницом да смо учитељима понудили могућност *све компоненте подједнако*. Такође, уколико учитељи настоје да у почетној настави математике остваре задатак *развијање логичког мишљења ученика*, то ће чинити плански и систематски, што подразумева сагледавање логичког мишљења ученика као сложеног феномена и једнако подстицање свих његових компоненти. У настави математике се преко различитих математичких задатака остарују сви задаци наставе, а, са друге стране, различитим задацима се утиче на различите компоненте логичког мишљења. У настојању да развију логичко мишљење ученика, учитељи ће примењивати различите задатке којима ће утицати на развијање различитих способности логичког мишљења ученика.

Разлике у одговорима учитеља на осмо питање у погледу средине у којој учитељи раде, разреда и радног стажа нису статистички значајне (Табела 99).

Табела 99. *Компоненте логичког мишљења које учитељи подстичу у почетној настави математике с обзиром на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 8. питање				
		Способности закључивања	Логичке операције	Мисаони поступци	Све компоненте	Укупно
Средина	сеоска	12 (29.3%)	7 (17.1%)	7 (17.1%)	15 (36.6%)	41 (100.0%)
	градска	12 (16.9%)	8 (11.3%)	20 (28.2%)	31 (43.7%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	14 (31.1%)	5 (11.1%)	8 (17.8%)	18 (40.0%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	10 (14.9%)	10 (14.9%)	19 (28.4%)	28 (41.8%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	10 (20.0%)	10 (20.0%)	8 (16.0%)	22 (44.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	14 (22.6%)	5 (8.1%)	19 (30.6%)	24 (38.7%)	62 (100.0%)
	Укупно	24 (21.4%)	15 (13.4%)	27 (24.1%)	46 (41.1%)	112 (100.0%)

На основу добијених резултата χ^2 (3, N = 112) = 4.153, p = 0.245, закључујемо да не постоје разлике у одговорима учитеља на осмо питање с обзиром на локацију школе. Разлике у одговорима на осмо питање нису статистички значајне ни у погледу разреда (χ^2 (3, N = 112) = 4.855, p = 0.183), као ни у погледу радног стажа (χ^2 (3, N = 112) = 5.681, p = 0.128).

***

У раду смо поставили задатак истраживања: *Испитати у којој мери, према мишљењу учитеља, почетна настава математике утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.* На основу добијених резултата: да су све врсте математичког мишљења подједнако важне, односно да почетна настава математике, њена организација, према мишљењима учитеља, у значајној мери утиче на све врсте математичког мишљења, при чему малу предност дају логичком мишљењу, да почетна настава углавном утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика и да учитељи настоје једнако утицати на све компоненте логичког мишљења, можемо потврдити хипотезу да *почетна настава математике, њена организација, према мишљењима учитеља, у значајној мери утиче на развијање логичког мишљења ученика*.

3.1.4. Врста математичког образовања и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда

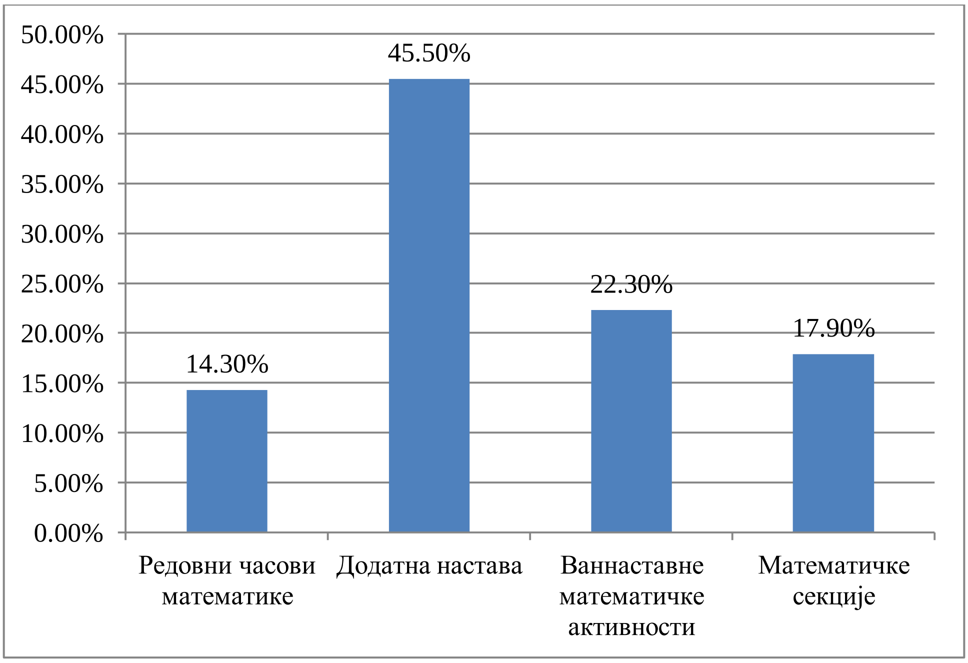
У почетној настави математике задаци наставе се највећим делом остварују на редовним часовима, али не треба занемарити додатну наставу, ваннаставне математичке активности и математичке секције. Како се у раду бавимо логичким мишљењем ученика, сматрамо да је од пресудног значаја за његово развијање једно планско деловање у свим сферама математичког образовања. Стога, желели смо испитати какво је мишљење учитеља о овом питању.

У истраживању смо пошли од задатка: *Испитати која врста математичког образовања је, према мишљењима учитеља, најпогоднија за подстицање и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда.*

Мишљење учитеља о наведеном задатку испитивали смо деветим питањем у анкети за учитеље.

9. ПИТАЊЕ

Од учитеља се тражило да се међу понуђеним врстама математичког образовања, заокруживањем, определе за једну, која је према њиховом мишљењу најпогоднија за развијање логичког мишљења ученика. Резултати су представљени на графикону 57.



Графикон 57. *Врста математичког образовања и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда*

Највећи проценат учитеља сматра да је за подстицање и развијање логичког мишљења ученика најпогоднија *додатна настава*. Одговори су очекивани с обзиром на то да су задаци који су усмерени на подстицање и развијање појединих компоненти логичког мишљења другачији од оних на које су ученици навикли. Неки од тих задатака захтевају сложене мисаоне напоре у процесу решавања, па је било очекивано да их учитељи најчешће примењују на часовима додатне наставе. Најмањи проценат учитеља ове задатке примењује на редовним часовима математике. Један од разлога за такве одговоре је, вероватно, недовољно времена на редовним часовима. Једна од могућности превазилажења ове тешкоће је могућност да се задаци усмерени на подстицање и развијање логичког мишљења могу у сваком делу часа применити. Учитељи неке од тих задатака могу применити у уводном делу часа како би пробудили радозналост ученика и изазвали мисаоне активности. Са друге стране, у главном делу часа ови задаци могу бити усмерени на то да „освеже“ стандардне активности и задатке. Учитељи неке од задатака који су усмерени на развијање логичког мишљења, а који укључују и примере попут мозгалица, загонетки, логичких загонетки, могу поставити у циљу буђења дечје радозналости и у завршном делу часа.

Разлике у одговорима учитеља које су утврђене у погледу средине у којој учитељи раде су статистички значајне. Разлике у погледу разреда и радног стажа нису статистички значајне (Табела 100).

Табела 100. *Погодност различитих врста математичког образовања за развијање логичког мишљења ученика млађих разреда с обзирм на средину, разред и радни стаж*

		Одговори учитеља на 9. питање				
		Редовни часови математике	Додатна настава	Ваннаставне математичке активности	Математичке секције	Укупно
Средина	сеоска	9 (22.0%)	13 (31.7%)	14 (34.1%)	5 (12.2%)	41 (100.0%)
	градска	7 (9.9%)	38 (53.5%)	11 (15.5%)	15 (21.1%)	71 (100.0%)
Разред	први или други	6 (13.3%)	21 (46.7%)	8 (17.8%)	10 (22.2%)	45 (100.0%)
	трећи или четврти	10 (14.9%)	30 (44.8%)	17 (25.4%)	10 (14.9%)	67 (100.0%)
Радни стаж	до 20 година	10 (20.0%)	23 (46.0%)	10 (20.0%)	7 (14.0%)	50 (100.0%)
	преко 20 година	6 (9.7%)	28 (45.2%)	15 (24.2%)	13 (21.0%)	62 (100.0%)
	Укупно	16 (14.3%)	51 (45.5%)	25 (22.3%)	20 (17.9%)	112 (100.0%)

Највећи проценат учитеља који раде у градској средини се изјаснио да је *додатна настава* најпогоднија за подстицање и развијање логичког мишљења, док највећи проценат учитеља који раде у сеоској средини сматра да су за подстицање логичког мишљења ученика најпогодније *ваннаставне математичке активности*. Занимљиво је да је међу учитељима који раде у сеоској средини висок проценат оних (22.0%) који сматрају да су за развијање логичког мишљења најпогоднији *редовни часови математике*. Резултати (χ^2 (3, N = 112) = 10.589, p = 0.014) потврђују да су примећене разлике у одговорима на девето питање учитеља с обзиром на локацију школе статистички значајне. Из резултата које смо добили можемо закључити да учитељи који раде у градској средини сматрају да је за развијање логичког мишљења ученика најпогоднија *додатна настава*, док су одговори учитеља који раде у сеоској средини разноврснији. Они предност дају *ваннаставним математичким ативностима*. Разнолики одговори учитеља који раде у сеоској средини су разумљиви јер они раде у другачијим условима, пре свега мислимо на мали број ученика, непосреднији контакт са ученицима и специфичнију организацију која је условљена тиме што они најчешће раде у комбинованим одељењима. Разлике у одговорима на девето питање с обзиром на разред нису статистички значајне (χ^2 (3, N = 112) = 1.567, p = 0.667), као ни у погледу радног искуства учитеља (χ^2 (3, N = 112) = 3.039, p = 0.386).

***

Добијени резултати истраживања потврђују полазну хипотезу истраживања: *Додатна настава математике је, према мишљењима учитеља, најпогоднија за примену задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика*. Другим речима, додатна настава математике је најпогоднија за подстицање и развијање логичког мишљења ученика. За потврду наше полазне хипотезе је значајно да велики број анкетираних учитеља (51 или 45.5%) сматра да је додатна настава најпогоднија за примену задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика, а тиме и најпогоднија за позитивно деловање на логичко мишљење ученика. Занимљиво је да су разлике у мишљењима учитеља о врстама математичког образовања с обзиром на средину у којој учитељи раде статистички значајне, а да не постоје с обзиром на разред којем предају и године искуства у настави.

Резултати су били очекивани, ако се има на уму значај додатне наставе и њен утицај на развијање математичких способности. К. Шпијуновић и С. Маричић говоре о значају додатног рада, истичући да је термин уведен да се „ова активност ни по садржају, ни по методама и облицима рада, ни по односима између учитеља и ученика и слично не претвара у копију редовне наставе“ (2016: 420). Полазећи од наведене разлике у терминима, аутори истичу значај и предности додатног рада. Он „може значајно допринети остваривању циља и задатака почетне наставе математике, популаризацији и повећању интересовања за математику, чак и код оних ученика који у њега нису укључени“ (Шпијуновић, Маричић, 2016: 420). Свесни наведених предности додатног рада, учитељи истичу да је додатна настава најпогоднија за подстицање и развијање способности логичког мишљења.

3.1.5. Фактори који могу допринети утицају почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика и фактори који ометају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика

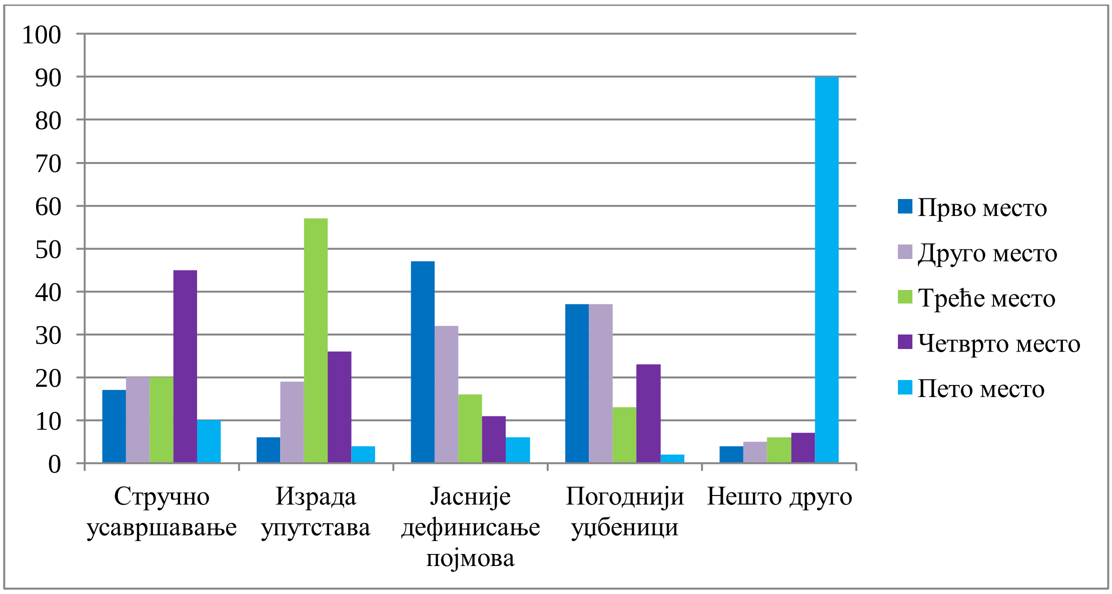
Постоје бројни фактори који доприносе или могу допринети подстицању и развијању логичког мишљења ученика у настави. Поред њих, постоје и фактори који спутавају развој логичког мишљења ученика. Од пресудног значаја за квалитет почетне наставе математике је познавање и једних и других фактора.

У раду смо поставили задатак: *Утврдити факторе који, према мишљењима учитеља, позитивно и факторе који негативно делују у процесу подстицања логичког мишљења ученика у почетној настави математике*. Претпоставку која произилази из наведеног задатка проверавали смо десетим и једанаестим питањем у анкети за учитеље.

10. ПИТАЊЕ

Желели смо испитати мишљења учитеља о факторима који, према њиховом мишљењу, могу допринети утицају математичких задатака на развијање логичког мишљења ученика.

Како бисмо проверили њихово мишљење о наведеном питању, пред учитеље смо поставили неке од фактора који, према нашем мишљењу, а на основу проучене литературе током бављења овом проблематиком, могу допринети подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Пред учитеље смо поставили пет фактора за које претпостављамо да могу имати позитиван утицај на успешније развијање логичког мишљења: *стручно усавршавање, израда упутстава, јасније дефинисање појмова логичко мишљење и задаци који утичу на развијање логичког мишљења, погоднији уџбеници који ће садржати већи број задатака којима је циљ развијање логичког мишљења*. Као пети фактор *нешто друго*, учитељима смо оставили опцију да наведу шта је то што може допринети подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике, те тај фактор укључе у рангирање. Учитељи су редним бројевима од један до пет рангирали наведене факторе, према важности, тј. према томе колико они доприносе подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике (1 – највише; 5 – најмање).



Графикон 58. *Фактори који могу допринети утицају математичких задатака на развијање логичког мишљења*

Према добијеним резултатима (Табела 101), можемо закључити да би јасније дефинисање појмова логичко мишљење и задаци који утичу на развијање логичког мишљења учитељима у великој мери олакшало утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика. То говори у прилог чињеници да ове појмове треба операционализовати како би учитељи имали јаснију слику о томе шта се под логичким мишљењем подразумева и шта они треба да подстичу, тј. конкретно које способности. Такође, можемо закључити да поред јаснијег дефинисања наведених појмова, погоднији уџбеници би веома допринели, према мишљењима учитеља, подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Овај резултат није био очекиван, јер су учитељи проценили да у уџбеницима математике има задатака који утичу на подстицање и развијање логичког мишљења ученика и да уџбеник као такав погодује развијању логичког мишљења ученика. Овакво мишљење учитељи су изнели при одговарању на прво и друго питање у анкети, а сада сматрају да уџбеник треба да буде погоднији. Вероватно, при изношењу оваквог става, учитељи мисле на концепцију уџбеника, обимно градиво, велики број задатака, као и на велики број сличних задатака, па у том погледу он може бити погоднији и усмеренији на подстицање логичког мишљења. Како су учитељи имали и могућност навођења фактора који ми нисмо предвидели, а они сматрају значајним фактором који би могао допринети развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике, међу њиховим одговорима су се нашли следећи фактори: мање ученика у разреду, секције, афинитети и таленти наставника, другачија организација основног образовања, учитељ (питањима, наставом), план и програм, припрема за школу, лична мотивација учитеља, коришћење додатне литературе (математички листови, задаци са претходних такмичења), измена наставног плана и програма и сл.

Помоћу Фридмановог теста одредили смо средњу вредност рангова и ранг за сваки фактор (Табела 101).

Табела 101. *Фактори који могу допринети утицају математичких задатака на развијање логичког мишљења*

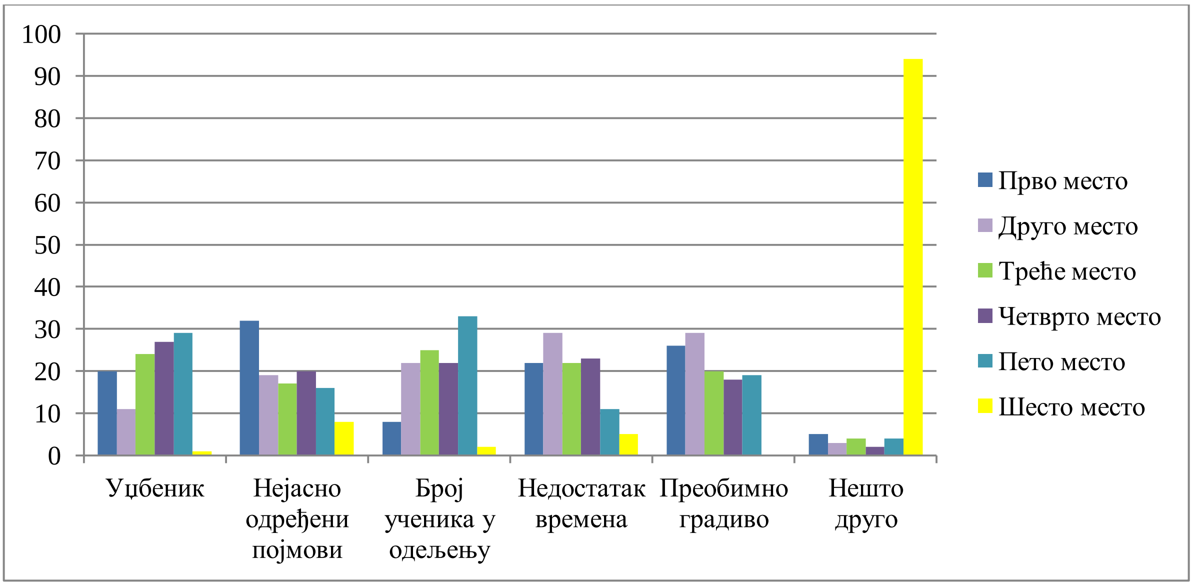
	Прво место	Друго место	Треће место	Четврто место	Пето место	**Mean Rank**	**Rank**
Стручно усавршавање (Ф1)	17 (15.2%)	20 (17.9%)	20 (17.9%)	45 (40.2%)	10 (8.9%)	3.09	IV
Израда упутства (Ф2)	6 (5.4%)	19 (17.0%)	57 (50.9%)	26 (23.3%)	4 (3.6%)	3.03	III
Јасније дефинисање појмова... (Ф3)	47 (42.0%)	32 (28.6%)	16 (14.3%)	11 (9.8%)	6 (5.4%)	2.08	I
Погоднији уџбеници (Ф4)	37 (33.0%)	37 (33.0%)	13 (11.6%)	23 (20.5%)	2 (1.8%)	2.25	II
Нешто друго (Ф5)	4 (3.6%)	5 (4.5%)	6 (5.4%)	7 (6.3%)	90 (80.4%)	4.55	V

Резултати Фридмановог теста показују да постоје значајне разлике у рангирању различитих фактора. То показују добијене вредности c2 (4, n = 112) = 172.021, p = 0.000. Фактори су рангирани након поређења средњих вредности рангова. С циљем утврђивања у рангирању којих фактора су разлике статистички значајне, радили смо накнадне тестове (post hoc test). Додатним анализама утврдили смо да постоје разлике у рангирању следећих фактора: Ф3 и Ф2 (p = 0.000), Ф3 и Ф1 (p = 0.000), Ф3 и Ф5 (p = 0.000), Ф4 и Ф2 (p = 0.002), Ф4 и Ф1 (p = 0.001), Ф4 и Ф5 (p = 0.000), Ф2 и Ф5 (p = 0.000), Ф1 и Ф5 (p = 0.000).

11. ПИТАЊЕ

Након анализа фактора који, по мишљењу учитеља, могу допринети развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике желели смо испитати и постојање фактора који ометају развој логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

У анкети за учитеље издвојили смо пет фактора за које сматрамо, на основу бављења наведеном проблематиком и проучавања литературе која се бави том проблематиком, да могу ометати утицај учитеља на развијање логичког мишљења ученика и представљати сметњу у његовом развијању: *уџбеник, нејасно одређени појмови логичко мишљење и задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика, број ученика у одељењу, недостатак времена, преобимно градиво*. Поред наведених фактора, учитељима смо дали и могућност додавања фактора (нешто друго) који омета развијање логичког мишљења ученика. У анкетном упитнику, учитељи су редним бројевима од 1 до 6 рангирали (означавали по важности) шта представља највећи проблем у развијању логичког мишљења у почетној настави математике (1 – највећа сметња; 6 – најмања сметња).



Графикон 59. *Фактори који ометају утицај математичких задатака на подстицање логичког мишљења*

Према добијеним резултатима (Табела 102), можемо закључити да је *преобимно градиво* највећа сметња учитељима у подстицању и развијању логичког мишљења ученика и да би смањење или другачија организација градива учитељима у великој мери олакшала утицај почетне наставе математике, одговарајућих задатака, на развијање логичког мишљења ученика. Преобимно градиво, фактор који отежава рад учитеља и представља сметњу у развијању логичког мишљења ученика, директно је повезано и са недостатком времена. Према добијеним резултатима, *недостатак времена* је следећи фактор који учитељи виде као сметњу у развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Учитељи, бавећи се садржајима, немају довољно времена за један од важних задатака наставе – развијање математичког, а тиме и логичког мишљења ученика. Стога, сматрамо да би другачија организација садржаја и артикулација времена учитељима биле од велике помоћи. Како су учитељи имали и могућност навођења фактора који ми нисмо предвидели, а они сматрају сметњом у развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике, међу њиховим одговорима су се нашли следећи фактори: приручници за рад (непостојање), план и програм, неподстицање деце у породици за развијањем логичког мишљења, инстант решења од стране родитеља (тако је лакше), деца се не играју (нису у контакту са другом децом, већ са рачунарима), састав одељења - различите способности деце, нова комбинована одељења, средина, мало је часова остављено за вежбање и утврђивање редовног градива и сл. Применом Фридмановог теста израчунали смо средњу вредност рангова за сваки понуђени фактор и одредили ранг (Табела 102).

Табела 102. *Фактори који ометају утицај математичких задатака на подстицање логичког мишљења*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	**Mean Rank**	**Rank**
Уџбеник (Ф1)	20 (17.9%)	11 (9.8%)	24 (21.4%)	27 (24.1%)	29 (25.9%)	1 (0.9%)	3.34	IV
Нејасно одређени појмови (Ф2)	32 (28.6%)	19 (17.0%)	17 (15.2%)	20 (17.9%)	16 (14.3%)	8 (7.1%)	2.96	III
Број ученика у одељењу (Ф3)	8 (7.1%)	22 (19.6%)	25 (22.3%)	22 (19.6%)	33 (29.5%)	2 (1.8%)	3.51	V
Недостатак времена (Ф4)	22 (19.6%)	29 (25.9%)	22 (19.6%)	23 (20.5%)	11 (9.8%)	5 (4.5%)	2.89	II
Преобимно градиво (Ф5)	26 (23.2%)	29 (25.9%)	20 (17.9%)	18 (16.1%)	19 (17.0%)	0 (0.0%)	2.79	I
Нешто друго (Ф6)	5 (4.5%)	3 (2.7%)	4 (3.6%)	2 (1.8%)	4 (3.6%)	94 (83.9%)	5.50	VI

Резултати Фридмановог теста показују да постоје значајне разлике у рангирању различитих фактора. То показују добијене вредности c2 (5, n = 112) = 166.081, p = 0.000. Фактори су рангирани након поређења средњих вредности рангова. Да бисмо уочили у рангирању којих побројаних фактора су разлике значајне, радили смо накнадне анализе (post hoc test). Додатним анализама потврдили смо да су разлике између рангирања фактора *нешто друго и свих осталих фактора* (p = 0.000) статистички значајне.

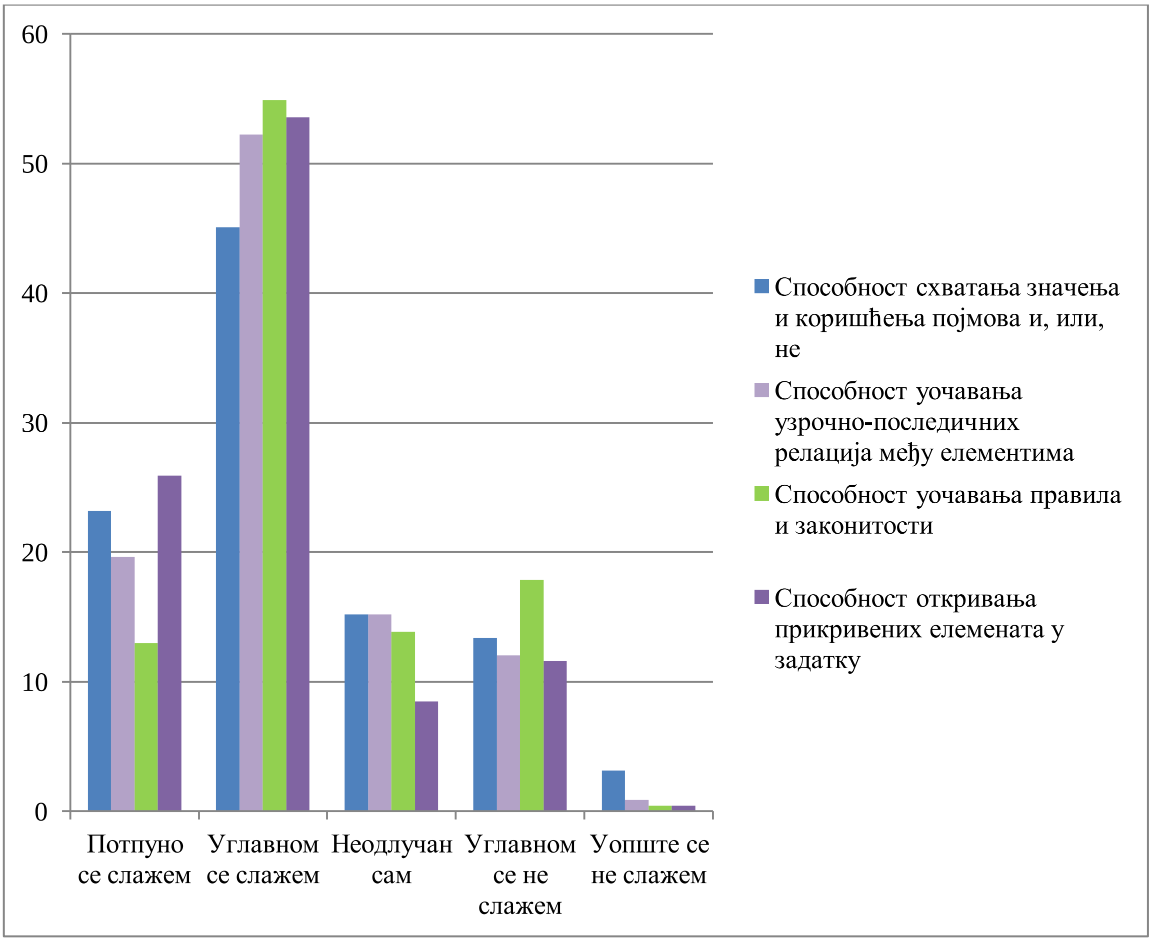
Учитељи су свесни важности подстицања логичког мишљења ученика у почетној настави математике и јасно могу издвојити факторе који ометају остваривање тог задатка наставе математике. Према мишљењима учитеља, *преобимно градиво, недостатак времена* и *нејасно одређени појмови логичко мишљење и задаци којима се може утицати на развијање логичког мишљења ученика* су фактори који највише ометају и спутавају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика.

***

Анализом добијених одговора учитеља на десето и једанаесто питање, видели смо да су учитељи свесни важности подстицања логичког мишљења ученика и да јасно могу издвојити факторе од којих зависи успешност остваривања тог задатка наставе математике. Такође, они јасно уочавају и издвајају факторе који ометају њихов рад у подстицању и развијању логичког мишљења ученика. Дакле, можемо потврдити претпоставку *да је могуће идентификовати факторе који, према мишљењима учитеља, могу допринети утицају почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика, као и факторе који ометају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика*.

3.2. Ставови учитеља о заступљености задатака којима се развија логичко мишљење у почетној настави математике

С намером да утврдимо ставове учитеља о заступљености различитих врста задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике, конструисали смо скалу судова (Прилог 7а). У скали су била изнета тврђења која се односе на заступљеност различитих врста задатака који утичу на различите способности логичког мишљења ученика које смо за потребе рада операционализацијом издвојили. Од учитеља смо тражили да изнесу свој степен слагања са наведеним тврђењем: А (Потпуно се слажем), Б (Углавном се слажем), Ц (Неодлучан сам), Д (Углавном се не слажем) или Е (Уопште се не слажем) (Графикон 60).



Графикон 60. *Заступљеност задатака који утичу на поједине способности логичког мишљења*

Највећи проценат учитеља се слаже са изнетим тврђењима, што говори о њиховом мишљењу да су заступљени различити задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Применом Фридмановог теста израчунали смо средњу вредност рангова за сваку понуђену тврдњу и одредили ранг (Табела 103).

Табела 103. *Одговори на питања у скали судова са скоровима и просецима*

	А	Б	Ц	Д	Е	**Mean Rank**	**Rank**
Прва тврдња (Т1)	30 (26.8%)	56 (50.0%)	13 (11.6%)	11 (9.8%)	2 (1.8%)	4.13	III
Друга тврдња (Т2)	22 (19.6%)	45 (40.2%)	21 (18.8%)	19 (17.0%)	5 (4.5%)	4.96	VI
Трећа тврдња (Т3)	28 (25.0%)	65 (58.0%)	11 (9.8%)	7 (6.3%)	1 (0.9%)	3.88	II
Четврта тврдња (Т4)	16 (14.3%)	52 (46.4%)	23 (20.5%)	20 (17.9%)	1 (0.9%)	5.08	VII
Пета тврдња (Т5)	18 (16.1%)	64 (57.1%)	14 (12.5%)	16 (14.3%)	0 (0.0%)	4.63	V
Шеста тврдња (Т6)	11 (9.8%)	59 (52.7%)	17 (15.2%)	24 (21.4%)	1 (0.9%)	5.30	VIII
Седма тврдња (Т7)	21 (18.8%)	62 (55.4%)	12 (10.7%)	17 (15.2%)	0 (0.0%)	4.40	IV
Осма тврдња (Т8)	37 (33.0%)	58 (51.8%)	7 (6.3%)	9 (8.0%)	1 (0.9%)	3.62	I

Резултати Фридмановог теста показују да постоје значајне разлике у рангирању различитих тврдњи које се односе на заступљеност различитих типова задатака који подстичу различите способности логичког мишљења у почетној настави математике. То показују добијене вредности c2 (7, n = 112) = 72.913, p = 0.000. Тврдње су рангиране након поређења средњих вредности рангова. Средња вредност за тврдње се креће у распону од 3.62 до 5.30. То говори о малим разликама у одговорима учитеља када је реч о појединачним тврдњама. Како бисмо уочили између којих тврдњи у рангирању су разлике значајне, радили смо накнадне тестове (post hoc test). Накнадни тестови (post hoc) су показали да су разлике између рангирања тврдњи: Т8 и Т2 (p = 0.001), Т8 и Т4 (p = 0.000), Т8 и Т6 (p = 0.000) статистички значајне. Разлике су значајне и у рангирању тврдњи: Т3 и Т2 (p = 0.027), Т3 и Т4 (p = 0.007), Т3 и Т6 (p = 0.000). Разлике постоје и између тврдњи Т1 и Т6 (p = 0.009).

Ради јаснијег увида у резултате и сагледавања ставова учитеља о заступљености задатака којима је циљ развијање појединих способности логичког мишљења ученика у почетној настави математике, спојили смо по две тврдње које се односе на исту способност логичког мишљења ученика у почетној настави математике (Табела 104).

Табела 104. *Ранг способности логичког мишљења*

<table>
<tr><th>Способност логичког мишљења</th><th colspan="2">Ставови учитеља о заступљености задатака</th><th>Средња вредност</th><th>Ранг</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не)</td><td>1.</td><td>У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају да разуме значење термина и, или, не како би разумео дате податке у задатку и користио их на прави начин.</td><td rowspan="2">4.54</td><td rowspan="2">III</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>У почетној настави математике има задатака код којих су питања дата у форми негације, па се од ученика захтева да податке сагледа из супротног угла - разумевање негације.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Способност уочавања и успостављања узрочно-последичних релација између елемената и извођење закључака на основу уочених веза</td><td>3.</td><td>У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају способност уочавања узрочно-последичних веза, односа међу елементима и извођење закључака на основу уочених веза и односа.</td><td rowspan="2">4.48</td><td rowspan="2">II</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Задаци у почетној настави математике често од ученика захтевају да сам успоставља релације међу елементима у задатку јер оне нису експлицитно дате.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила</td><td>5.</td><td>У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају да сам открива правила која постоје међу елементима у задатку и да их примењује.</td><td rowspan="2">4.96</td><td rowspan="2">IV</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>У почетној настави математике ученик је често у прилици да сам открива законитости и на основу њих сам долази до закључака.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку</td><td>7.</td><td>У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају откривање скривених елемената у задатку.</td><td rowspan="2">4.01</td><td rowspan="2">I</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају оштроумност и досетљивост.</td></tr>
</table>

Разлика између највеће и најмање средње вредности је мала и сведочи о малим разликама у одговорима учитеља на скали. То показује да су у почетној настави математике приближно исто заступљени различити типови задатака који утичу на различите способности логичког мишљења ученика, на основу чега можемо изнети једну општу тврдњу: *у почетној настави математике има разноврсних задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика делујући на његове способности*.

У раду смо желели да испитамо мишљења учитеља о заступљености задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике и пошли смо од претпоставке *да су, према мишљењима учитеља, задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у довољној мери заступљени у почетној настави математике*. Тврдње у скали су потврдно формулисане, тако да у почетној настави математике имамо задовољавајући број задатака који утичу на развијање појединих способности логичког мишљења ученика, те висок степен слагања учитеља са изнетим тврдњама оправдава нашу полазну претпоставку.

***

Приликом анкетирања учитеља пошли смо од задатка истраживања: *Испитати мишљења учитеља о утицају почетне наставе математике на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.* У вези са постављеним задатком истраживања, након анкетирања учитеља и анализе резултата, дошли смо до следећих резултата:

- Уџбеник математике, према мишљењима учитеља, углавном погодује развијању логичког мишљења ученика.

- У уџбеницима математике који се користе у почетној настави математике, према мишљењу учитеља, има довољно задатака који утичу на развијање логичког мишљења ученика.

- Учитељи, према сопственим мишљењима, често примењују задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

- Учитељи најчешће примењују задатке којима је циљ развијање логичког мишљења у главном делу часа (неком његовом делу).

- Учитељи задатке којима је циљ развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике најчешће примењују на часовима утврђивања, вежбања или систематизације.

- Почетна настава математике и њена организација, према мишљењима учитеља, у значајној мери утичу на све врсте математичког мишљења.

- Према мишљењима учитеља, почетна настава математике и математички задаци имају велики утицај на развијање логичког мишљења ученика.

- Учитељи, према сопственим мишљењима, утичу на развијање свих компоненти логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

- Додатна настава математике, према мишљењима учитеља, је најпогоднија за примену задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика.

- Могуће је идентификовати факторе који, према мишљењима учитеља, могу допринети утицају на развијање логичког мишљења ученика.

- Могуће је, према мишљењима учитеља, идентификовати факторе који ометају утицај почетне наставе математике на развијање логичког мишљења ученика.

- Према мишљењима учитеља, задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика су у довољној мери заступљени у почетној настави математике.

Анализом одговора учитеља, можемо потврдити и полазну хипотезу истраживања (анкетирања учитеља): *Почетна настава математике, према мишљењима учитеља, у великој мери утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика*.

ЗАКЉУЧАК И ИМПЛИКАЦИЈЕ

Развијање мишљења ученика је приоритетан задатак савремене школе. С њим у вези, математичко мишљење добија све већи значај и све више се активности усмеравају ка достизању тог циља. Логичко мишљење ученика је само један део математичког мишљења и његово развијање представља један од важних захтева који се намеће у школи.

Логичко мишљење је сложен феномен, те, као такав, није довољно истражен у контексту почетне наставе математике. Полазећи од чињеница да се у овом периоду постављају темељи математичког образовања, развијању логичког мишљења ученика у том периоду се мора посветити пажња коју заслужује. Са друге стране, бројни су проблеми који прате сам појам логичког мишљења у почетној настави математике. Чини се да је прво ограничење на које се наилази то што не постоји јасна дефиниција појма *логичко мишљење*, па сви актери образовног процеса и процеса васпитања већ ту наилазе на бројне проблеме, као што су: *Шта је то логичко мишљење ученика и како га развијати у пракси? Како операционализовати сам појам логичког мишљења конкретно за почетну наставу математике? Којим се то задацима може утицати на развијање логичког мишљења?*

У раду смо, управо, кренули од наведених питања и желели расветлити бар нека од њих. Полазећи од питања дефинисања појма *логичко мишљење*, увидели смо чињеницу да дефиниције које постоје не могу наћи своје место и примену у почетној настави математике. Пре свега, превише су уопштене или везане за специфично поље на које се односе и са чијег аспекта су извршене. Још један од проблема на који се наилази приликом дефинисања појма логичко мишљење у почетној настави математике јесте узраст ученика у разредној настави и бројне специфичности које га прате. Узимајући све наведено у обзир, у раду смо прихватили одређење да је логичко мишљење веома сложен феномен који обухвата логичке операције, мисаоне поступке и способности закључивања. *Логичко мишљење* као сложен феномен, када се веже за почетну наставу математике, због бројних специфичности, како почетне наставе математике, тако и специфичности које се односе на узраст ученика у овом периоду, добија још више на својој сложености. Отуда смо покушали, пре свега, операционализовати логичко мишљење, посматрајући га у специфичном контексту који има у почетној настави математике.

Тако смо, на основу проучене литературе која се бави логичким мишљењем, а поштујући бројне специфичности математичких садржаја, могућности које почетна настава математике пружа у погледу подстицања и развијања логичког мишљења и специфичности узраста ученика, логичко мишљење дефинисали као *сложену интелектуалну активност* у којој долазе до изражаја следеће способности, које смо за потребе рада издвојили: *способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не), способност успостављања узрочно-последичних релација и закључивање на основу уочених веза, способност уочавања правила, способност откривања прикривених (удаљених) елемената у задатку*. Оно на шта морамо указати, а више пута у раду смо помињали, јесте чињеница да наведене способности логичког мишљења нису изоловане, већ се вишеструко преклапају и међусобно допуњују. Такође, свака наведена, операционализацијом издвојена, способност је сложена и може се даље операционализовати. Полазећи од наведених способности, то јест од наведеног схватања логичког мишљења, претпоставили смо да се логичко мишљење, схваћено као сложен феномен, може подстицати и развијати и то ако се одговарајућим задацима, односно њиховим адекватним избором у почетној настави математике развија свака његова способност.

Истражујући проблеме везане за развијање логичког мишљења ученика и улогу почетне наставе математике у развијању логичког мишљења ученика, дошли смо до резултата који се условно могу разврстати у три категорије, ради јаснијег сагледавања. Прва група закључака се односи на резултате које смо добили испитујући ефекте експерименталног програма (посебно конструисаних математичких задатака) на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Друга група закључака односи се на мишљење ученика експерименталне групе о експерименталном програму и на њихову заинтересованост за решавање математичких задатака којима смо желели подстицати и развијати логичко мишљење. На крају, трећа група закључака се односи на мишљења и ставове учитеља о начинима деловања на подстицање и развијање, те унапређење логичког мишљења ученика у почетној настави математике, тј. о улози и утицају организације почетне наставе математике на подстицање логичког мишљења ученика.

У оквиру прве групе закључака дали смо приказ резултата експерименталног истраживања којим смо желели утврдити ефекте примене одговарајућих задатака на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Анализирањем резултата спроведеног експеримента извели смо закључаке, које у кратким цртама износимо.

Полазна хипотеза да се *одговарајућом организацијом почетне наставе математике у великој мери може утицати на развијање логичког мишљења ученика* је потврђена. На финалном мерењу логичког мишљења ученици експерименталне групе су показали развијеност логичког мишљења у већем степену, што доказује њихов значајно бољи резултат. Они су остварили напредак и када посматрамо поједине групе задатака које су мериле развијеност издвојених способности логичког мишљења. Потврдили смо да су одговарајући задаци изложени у експерименталном програму вишеструко позитивно деловали и значајно допринели развијању *способности откривања елемената који нису одмах уочљиви у задатку*. Ученици који су решавали приложене задатке су значајно напредовали у *способности откривања правила и законитости*, што доказује да су задаци садржани у експерименталном програму извршили вишеструко позитивно деловање на ову способност и развили је у великом степену. Приказани задаци су повољно утицали и довели су до значајног напредовања у *способности уочавања узрочно-последичних веза*, у *способности схватања значења појмова и, или, не и схватања њихове логичке функције*, о чему сведоче значајно бољи резултати ученика експерименталне групе на финалном мерењу. Они су остварили боља постигнућа и ако посматрамо појединачно сваки задатак са финалног теста логичког мишљења. Доказали смо да су посебно конструисани задаци садржани у експерименталном програму значајно утицали на подстицање и развијање свих операционализацијом издвојених способности логичког мишљења.

Добијени статистички показатељи су потврдили да је експериментални програм (решавање задатака који подстичу логичко мишљење ученика) утицао на развијање логичког мишљења ученика у експерименталној групи. Тиме смо потврдили нашу хипотезу истраживања да *постоји статистички значајна разлика у развијености логичког мишљења ученика експерименталне групе и ученика контролне групе, под утицајем експерименталног програма*. Такође, то потврђује и полазну претпоставку да *решавање одређених математичких задатака, односно експериментални програм, у великој мери доприноси развијању логичког мишљења ученика*.

На финалном мерењу подгрупе експерименталне групе формиране према успеху су постигле просечно боље резултате када се упореде са ученицима контролне групе са истим општим успехом. То доказује да је у почетној настави математике код ученика са одличним и врлодобрим општим успехом могуће развијати логичко мишљење. Разлике између подгрупа формираних с обзиром на општи успех су изражене и статистички значајне. Разлика између бодова остварених на финалном тесту логичког мишљења између ученика Е5 и К5 групе је значајна. Статистички значајну разлику у развијености логичког мишљења остварила је и подгрупа ученика Е групе који имају општи успех врлодобар (Е4) у односу на подгрупу К4. Оваквим резултатима смо потврдили хипотезу истраживања да *код ученика са одличним и врлодобрим успехом, под утицајем експерименталног програма, долази до статистички значајног напредовања у развијености логичког мишљења.*

Испитивали смо и повезаност развијања логичког мишљења ученика и оцене коју ученик има из математике. Резултати истраживања су потврдили хипотезу истраживања да *не постоји повезаност између оцене из математике и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма*. Просечан број поена који су оствариле подгрупе формиране с обзиром на оцену из математике на иницијалном мерењу је приближно једнак. Након реализације експерименталног програма, уочене су статистички значајне разлике међу подгрупама формираним с обзиром на оцену ученика у корист подгрупа Е групе. Између ученика Е3 и К3 групе уочена је статистички значајна разлика. Уочена разлика између ученика Е и К групе са оценом врлодобар је изражена и статистички значајна, као и између ученика Е5 и К5 групе.

Резултати су показали да је разлика на финалном мерењу између постигнућа ученика мушког пола Е групе и мушког пола К групе значајна. Такође, разлика постоји и између мушког пола Е групе и женског пола К групе и статистички је значајна. Женски пол Е групе се разликује у односу на мушки пол К групе, као и на женски пол контролне групе. Наведене разлике у развијености логичког мишљења настале су под деловањем експерименталног програма. Између ученика мушког пола Е групе и женског пола Е групе није утврђена статистички значајна разлика у резултатима на финалном тесту логичког мишљења. Резултати су показали да код ученика оба пола решавањем посебно осмишљених задатака (експериментални фактор) долази до значајног напредовања у развијености логичког мишљења. Такви резултати истраживања, потврђују хипотезу истраживања да *не постоји повезаност између пола ученика и развијености логичког мишљења ученика под утицајем експерименталног програма*.

На крају прве групе резултата истраживања потврђено је да су све подгрупе ученика Е групе формиране с обзиром на стручну спрему оца под утицајем експерименталног програма статистички значајно напредовале, што нас наводи на закључак да стручна спрема оца није значајно утицала на резултате ученика Е групе. До истог закључка смо дошли и испитивањем утицаја стручне спреме мајке на резултате ученика Е групе. Таквим резултатима, где смо утврдили да стручна спрема оца, као ни стручна спрема мајке, нису статистички значајно утицале на напредовање ученика под утицајем експерименталног програма, потврдили смо хипотезу истраживања да *степен стручне спреме родитеља нема утицаја на развијање логичког мишљења ученика експерименталне групе.*

Претпоставка која се односи на део резултата анкете за ученике *да одговарајућа организација наставе математике у великој мери изазива интересовање ученика за* *учење математике*, је потврђена. Ученици су показали изразито позитиван став према часовима на којима се примењују задаци креирани тако да утичу на развој логичког мишљења. Ученици су показали да схватају предности експерименталног програма, да јасно идентификују добре и лоше стране примене задатака који утичу на подстицање и развијање њиховог логичког мишљења. Примењивани посебно креирани задаци су у значајној мери утицали на заинтересованост ученика за учење математике. Након реализације експерименталног програма, велики број ученика математику сврстава у омиљени наставни предмет, што није био случај раније.

Трећа група резултата истраживања су резултати анкетирања учитеља о могућностима подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Анализом њихових одговора у анкети и скали, дошли смо до следећих резултата:

- Према мишљењима учитеља, уџбеник математике, својом концепцијом и садржајима, утиче на развијање логичког мишљења ученика.
- Највећи проценат учитеља сматра да уџбеници математике *у великој мери садрже* или *углавном садрже* задатке који утичу на развијање логичког мишљења.
- Највећи број учитеља сматра да *веома често* користе, примењују задатке којима је циљ подстицање и развијање логичког мишљења ученика.
- Већина учитеља се изјашњава да задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика примењују *у главном делу часа*. Има и учитеља (27.7%) који се изјашњавају да ове задатке најчешће примењују *у завршном делу часа*. Најмањи проценат (8.9%) сматра да ове задатке примењују *у уводном делу часа*.
- Када је реч о погодностима различитих типова часа за примену задатака усмерених на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, 90.2% учитеља истичу да су најпогоднији часови утврђивања, вежбања или систематизације.
- Приликом рангирања различитих врста математичког мишљења, према мишљењу учитеља, логичко мишљење има најважније место у математичком мишљењу. Затим следе стваралачко, критичко и апстрактно мишљење.
- Највећи проценат учитеља сматра да почетна настава математике својом концепцијом и организацијом *у великој мери утиче* и *углавном утиче* на подстицање и развијање логичког мишљења ученика.
- Учитељи су различитог мишљења о утицају почетне наставе математике на компоненте логичког мишљења. Највећи проценат учитеља сматра да подједнако утичу на развијање свих компоненти логичког мишљења (41.1%). 24.1% учитеља сматра да највише утичу на подстицање мисаоних поступака, док 21.4% учитеља сматра да највише подстичу способности закључивања. Најмањи проценат анкетираних учитеља (13.4%) сматра да у почетној настави математике највише подстичу логичке операције.
- Мишљења учитеља су подељена и када је реч о погодности појединих врста математичког образовања за подстицање и развијање логичког мишљења ученика млађих разреда. Подстицању и развијању логичког мишљења ученика највише, према мишљењима учитеља, доприноси додатна настава. То сматра 45.5% анкетираних учитеља. 22.3% учитеља сматра да су за подстицање и развијање логичког мишљења ученика најпогодније ваннаставне математичке активности, а 17.9% учитеља да су то математичке

секције. Најмањи проценат учитеља (14.3%) сматра да је редовна настава најпогоднија за подстицање и развијање логичког мишљења ученика.

- Резултати истраживања су показали да је највећи број учитеља идентификовао фактор *јасније дефинисање појмова логичко мишљење и задаци који утичу на развијање логичког мишљења* као фактор који би, према њиховим мишљењима, могао допринети подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Од осталих фактора, редом следе: *погоднији уџбеници који ће садржати већи број задатака којима је циљ развијање логичког мишљења*, *израда упутстава*, *стручно усавршавање* и *нешто друго*.
- Када су у питању фактори који ограничавају рад учитеља у деловању на логичко мишљење ученика у почетној настави математике, учитељи сматрају да је то *преобимно градиво*. Следећи проблем у подстицању и развијању логичког мишљења ученика у почетној настави математике учитељи идентификују у фактору *недостатак времена*. Затим, редом следе фактори: *нејасно одређени појмови логичко мишљење и задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика*, *уџбеник*, *број ученика у одељењу* и *нешто друго*.
- Према мишљењима учитеља, у почетној настави математике има највише задатака који утичу на *способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку*. Затим следе задаци који подстичу и развијају *способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима у задатку и извођења закључака на основу уочених веза*, задаци који утичу на *способност схватања значења и коришћења појмова (и, или, не)* и на крају, према мишљењима учитеља, у почетној настави математике има најмање задатака који утичу на *способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила*.

Наведени резултати анкетирања учитеља су потврдили свих шест хипотеза које смо поставили на почетку, везано за испитивање мишљења учитеља. Самим тим, полазна хипотеза *да почетна настава математике, према мишљењима учитеља, у великој мери утиче на подстицање и развијање логичког мишљења ученика* је потврђена.

Узимајући у обзир резултате из све три групе, можемо потврдити општу (нулту) хипотезу да *одговарајућа организација почетне наставе математике у великој мери утиче на развој логичког мишљења ученика.*

Сумирајући резултате нашег истраживања о ефектима експерименталног програма на подстицање и развијање логичког мишљења ученика, као и о могућностима његовог подстицања и развијања, закључили смо да су могућности велике. Правилном организацијом почетне наставе математике, одговарајућим садржајима и адекватним математичким задацима, могуће је утицати на подстицање и развијање логичког мишљења ученика. Са друге стране, постоје фактори који у пракси ометају подстицање и развијање ове врсте математичког мишљења, што, свакако, отежава остваривање важног задатка почетне наставе математике. Њихово идентификовање и отклањање може у будућности допринети ефикасности наставе са аспекта подстицања и развијања логичког мишљења ученика.

Наш циљ је био да експерименталном провером докажемо да се логичко мишљење ученика може подстицати и развијати у почетној настави математике и да, бар на неки начин, скренемо пажњу свих оних који желе да остваре тај задатак у пракси на могуће начине његовог остваривања.

Показали смо да је на логичко мишљење у почетној настави математике могуће деловати и да је могуће развијати га. То се може чинити одговарајућим задацима. У раду смо операционализацијом издвојили способности логичког мишљења, а у експерименталном програму смо задатке поделили према утицају на те способности. Такав начин је само један модел како се на одређене способности логичког мишљења може деловати одговарајућим задацима усмереним на подстицање и развијање издвојених способности логичког мишљења.

Сматрамо да је рад значајан са више аспеката. Посебно ћемо указати на теоријски, практични и научни значај.

Теоријски значај рада огледа се у теоријском расветљавању логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Теоријска основа рада направљена је критичким сагледавањем досадашњих радова и истраживања везаних за појам логичког мишљења и за логичко мишљење ученика млађег школског узраста. Расветљена су бројна питања и проблеми везани за могућности подстицања и развијања логичког мишљења и његових способности у почетној настави математике. Указано је на бројне факторе који могу допринети ефикасности почетне наставе математике и развијању логичког мишљења ученика.

Практични значај рада огледа се у изради експерименталног програма, односно задатака који позитивно делују на развијање различитих способности логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Експериментални програм развијен за потребе истраживања може користити учитељима у остваривању важног задатка наставе математике који се односи на развијање логичког мишљења ученика. Задаци у оквиру експерименталног програма разврстани су према способностима логичког мишљења, које су за потребе рада издвојене, и могу послужити као полазиште за израду сличних задатака којима би се у пракси подстицала и развијала жељена способност логичког мишљења. Такође, у теоријском делу рада направили смо осврт на заступљеност различитих врста задатака који позитивно делују на развијање логичког мишљења ученика у уџбеницима математике.

Научни значај рада огледа се у резултатима којима је потврђено да се одговарајућим задацима успешно може утицати на развијање различитих способности логичког мишљења, а тиме и на развијање логичког мишљења ученика као сложеног феномена. Научни значај рада огледа се у отварању нових питања у сфери развијања логичког мишљења ученика и његових способности у почетној настави математике на која ми нисмо дали одговоре, а која могу послужити као подстрек и полазиште за друге истраживаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонијевић, Р. (2014). Развој математичког мишљења код ученика са аспекта процеса интелектуалног васпитања. *Настава и васпитање*, бр. 2, Београд, стр. 215–227.
2. Aszalos, L. (2002). Automated Puzzle Solving. In *Journal of Applied Non-Classical Logics*, https://www.researchgate.net/publication/220202644_Automated_Puzzle_Solving
3. Аћимовић, М. (2012). Логика Бранислава Петронијевића. *Годишњак Филозофског факултета у Новом Саду*, XXXVII, 2012, Нови Сад, стр. 339–357.
4. Ball, D. L., Lubienski, S., Mewborn, D.(2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433–456). New York, NY: Macmillan.
5. Bako, M. (n. d.). *Why we need to teach logic and how can we teach it?* https://www.cimt.org.uk/journal/bakom.pdf
6. Борчић, Б. (1998). О методу аналогије. *Настава математике,* XLIII, 4, 1998, стр. 1–6.
7. Breen, S., O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. Irish Math. *Soc. Bulletin* 66, 39–49. https://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull66/ME6601.pdf
8. Брковић, А. (1995). *Речник психологије*. Чачак: Технички факултет.
9. Брковић, А. (1996). *Развојна психологија 1*. Ужице: Учитељски факултет у Ужицу.
10. Bruner, J. (1971). *The Relevance of Education*. New York: Norton.
11. Виготски, Л. С. (1977). *Мишљење и говор.* Београд: Нолит.
12. Виноградов, С. Н., Кузмин, А. Ф. (1954). *Логика*. Москва.
13. Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика*. Београд: Учитељски факултет.
14. Вилотијевић, М. (1999). *Дидактика*. *Дидактичке теорије и теорије учења*. Београд: Учитељски факултет.
15. Воркапић, М., Минић, С. (2016). Смисао употребе Power Point у интерактивној настави математике. *Зборник радова Учитељског факултета*, књига 10, Призрен – Лепосавић, стр. 131–144.
16. Вуковић, В. (2008). *Неки методички, психолошки и методолошки аспекти учења и истраживања математике*. Јагодина: Педагошки факултет.
17. Gallistel, C. R., Gelman, R. (2005). Mathematical Cognition. In K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 559–588). Cambridge University Press.
18. Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences*. The theory in practice. New York: Basic Books.
19. Грандић, Р., Гајић, О. (1998). *Теорије интелектуалног васпитања*. Нови Сад: Савез педагошких друштава Војводине.
20. Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In *PME CONFERENCE* (Vol. 2, pp. 72–79). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE.

21. Grbić, S. (1984). Kritički prikaz vodećih teorija o logičkom mišljenju adolescenata. *Psihologija*, God. 17, br. 4 (1984), str. 35–53.
22. Grbić, S. (1985). Ispitivanje logičkog mišljenja adolescenata (I): Logička igra „Debeli i Mršavi" („Bač i slim"). *Psihologija*, God. XVIII, br. 1/2 (1985), str. 25–52.
23. Grbić, S. (1986). Ispitivanje logičkog mišljenja adolescenata (II): metoda Saharova-Vigotskog. *Psihologija*, God. 19, br. 1/2 (1986), str. 143–156.
24. Група аутора (1967). *Педагошки речник*. Београд: Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије.
25. Група аутора (1989). *Педагошка енциклопедија*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
26. Група аутора (2007). *Енциклопедија психологија „Човек".* Београд: Софос.
27. Grupa autora (2014). *Pedagoško-psihološki aspekti nastave*. Podgorica: Zavod za školstvo.
28. Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: Mc Graw-Hill Book Company.
29. Davies, R. T., Russell, J. S. (1987). A Logical Approach to Reasoning by Analogy. In John P. McDermott (ed.), *Proceedings of the 10th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers. pp. 264–270. https://philpapers.org/rec/DAVALA-5
30. Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. USA: Keith Devlin.
31. Дејић, М., Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.
32. Дејић, М. (2009). Анализа циљева наставе математике. *Образовање и усавршавање наставника - циљеви и задаци васпитно-образовног рада, Зборник*, Учитељски факултет у Ужицу, Ужице, стр. 445–458.
33. Дејић, М., Егерић, М. (2010). *Методика наставе математике*. Београд: Учитељски факултет.
34. Дејић, М., Шпијуновић, К., Ђебић, С. (2013). Нестандардни задаци у функцији идентификације математичких способности. *Зборник*, Висока школа за образовање васпитача, Вршац,18, стр. 96–111.
35. Дејић, М., Михајловић, А. (2014). *Математичка даровитост*. Београд: Учитељски факултет.
36. Дејић, М., Михајловић, А. (2015). Улога и значај историје математике у настави. *Годишњак Учитељског факултета у Врању*, књига VI, стр. 68–82.
37. Dejić, M., Jovanović, I. (2015). Teorijske osnove rešavanja problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike. *Četvrta Matematička konferencija Republike Srpske – Zbornik radova*. Fakultet za proizvodnju i menadžment, Trebinje, str. 155–170.
38. Дошен, К. (2013). *Основна логика.* Београд.www.mi.sanu.ac.rs/~kosta/publications.htm
39. Dreser, K. (2015). *Logika u svakodnevnom životu*. Beograd: Laguna.
40. Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education (21st, Cuernavaca,Morelos, Mexico, October 23–26, 1999). https://eric.ed.gov/?id=ED466379

41. Durand-Guerrier, V. (no data). Logic And Mathematical Reasoning from A Didactical Point of View, A Model – Theoretic Approach. *Europen Researsh in Mathematics Education III,* Thematic Group 4, 1–11. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/TG-Guerrier.pdf
42. Ђорђевић, Б. (1999). Уџбеник и подстицање развоја мишљења ученика. *Вредности савременог уџбеника 3, Зборник радова*, бр. 3, Ужице, стр. 31–41.
43. Зубац, М., Милинковић, Д., Пикула, М. (2017). Како повећати мотивацију ученика за учење у настави математике. *Нова школа*, XII (1), Педагошки факултет, Бијељина, 24–37.
44. Ибро, В., Пикула, М. (2007). Стање учења математике у основној школи. *Настава математике*, 2007, LII, 1, стр. 1–11.
45. Inhelder, B., Piaget, J. (1972). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescene: An Essay on the Construction of Formal Operational Structures*. London and New York: Routledge.
46. Јовановић, И., Вуловић, Н. (2021). Уочавање законитости и правила у почетној настави математике. *Часопис „Узданица“*. Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина, стр. 325−338.
47. Jonson-Laird, P. N. (2009). Thinking and Learning Skills: Volume 2: Research and Open Questions, *Logical Thinking: Does it Occur in Daily Life? Can it Be Taught?*, volume 2, 293–294.
48. Kadum, V. (2006a). Matematička intuicija i intuicija u nastavi matematike. *Metodički ogledi*, 13, 1, 83–93.
49. Kadum, V. (2006b). O problemu sposobnosti i nesposobnosti za matematiku. *Metodički obzori*, 1 (2006) 2, str. 95–101.
50. Kadum, V. i sar. (2007). Nastavni sadržaji, jezik i vještine, te kognitivni razvoj učenika kao činitelj matematičkog odgajanja i obrazovanja. *Metodicki obzori*, 2 (2007) 1, 25–41.
51. Квашчев, Р. (1969). *Развијање критичког мишљења код ученика*. Београд: Завод за издавање уџбеника.
52. Kvaščev, R. (1974). *Razvijanje stvaralačkih sposobnosti kod učenika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
53. Kvaščev, R. (1975). *Podsticanje i sputavanje stvaralačkog ponašanja ličnosti*. Beograd: Zavod za udžbenike.
54. Квашчев, Р. (1976). *Психологија стваралаштва*. Београд: Издавачко информативни центар студената.
55. Kennth, G. T., William, C. (1981). *The Development and Validation of a Group Test of Logical Thinking*. http://epm.sagepub.com/cgi/content/abstract/41/2/413
56. Клајн, И., Шипка, М. (2007). *Велики речник страних речи и израза*. Нови Сад: Прометеј.
57. *** Клуб младих математичара (2005). *Математика за млађе разреде (IV део).* Београд: Архимедес.

58. Коен, М., Нејгел, Е. (2006). *Увод у логику и научни метод.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

59. Kovijanić Vukićević, Ž., Vujošević, S. (2009). *Uvod u logiku*. Podgorica: Pobjeda.

60. Коларић, И. (2003). *Логика*. Златибор: НАЈ.

61. Koray, O., Koksal, M. S. (2009). *The effect of creative and critical thinking based laboratory applications on creative and logical thinking abilities of prospective teachers*. Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching, Volume 10. https://www.eduhk.hk/apfslt/download/v10_issue1_files/koksal.pdf

62. Крутецкий, В. А. (1964). *Вопросы психологии способностей школьников*. Москва: Педагогика.

63. Крутецкий, В. А. (1968). *Психология математических способностей школьников*. Москва: Педагогика.

64. *** *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* (2019). Ministarstvo znanosti i obrazovanja u Republici Hrvatskoj, Narodne novine, 10/2019.

65. Kurnik, Z. (1999). Analiza. *Matematika i škola*, 2, 54–64.

66. Kurnik, Z. (2000a). Analogija. *Matematika i škola*, 3, 101–109.

67. Kurnik, Z. (2000b). Generalizacija. *Matematika i škola*, 4, 147–154.

68. Kurnik, Z. (2000c). Indukcija. *Matematika i škola*, 5, 197–203.

69. Kurnik, Z. (2000d). Apstrakcija. *Matematika i škola*, 6, 11–15.

70. Kurnik, Z. (2001a). Matematičke sposobnosti. *Matematika i škola*, 10, 195–199.

71. Kurnik, Z. (2001b). Matematički pojam. *Matematika i škola*, 11, 8–16.

72. Kurnik, Z. (2001c). Metodika uvodjenja novih pojmova. *Matematika i škola*, 12, 55–59.

73. Kurnik, Z. (2001d). Poučak ili teorem. *Matematika i škola*, 8, 101–105.

74. Kurnik, Z. (2001e). Dokaz. *Matematika i škola*, 9, 149–155.

75. Kurnik, Z. (2004). Specijalizacija. *Matematika i škola*, 27, 53–58.

76. Kurnik, Z. (2005). Motivacija. *Matematika i škola*, 31, 4–10.

77. Kurnik, Z. (2007). Konkretizacija. *Matematika i škola*, VIII, 148–154.

78. Kurnik, Z. (2008). Znanstvenost u nastavi matematike. *Metodika 17,* Vol. 9, br. 2, 2008, str. 318–327.

79. Kurnik, Z. (2009a). *Znanstveni okviri nastave matematike: (analiza, analogija, apstrakcija, dedukcija, generalizacija, indukcija, konkretizacija, sinteza, specijalizacija)*. Zagreb: Element.

80. Kurnik, Z. (2009b). Dedukcija. *Matematika i škola*, 51, godina 11, 5–11.

81. Leron, U. (2010). Porijeklo matematičkog mišljenja. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, Vol. II (2010), Broj 2, 21–25.

82. Lierde, V., Kalpakian, J., Jarid, N. (2013). Students, Logical Thinking And Teaching Efficiency: A Moroccan Case. *The African Symposium: An online journal of the African Educational Research Network*, Volume 13, No. 2, 52–60.

83. *** (2013). *Logic, and How it Should Influence Our Teaching*. Article by NRICH team, University of Cambridge, Faculty of Mathematics. https://nrich.maths.org/2588

84. Malinović, T., Malinović-Jovanović, N. (2002). *Metodika nastave matematike*. Vranje: Učiteljski fakultet.

85. Малиновић, Т., Цветковић, Д., Димитријевић, Д. (1999). *Збирка проблемских задатака из математике за основну школу.* Врање: Учитељски факултет.

86. Milanović, N. (2007). Blumova taksonomija kognitivnog područja u funkciji usvajanja elementarnih matematičkih pojmova. *Nastava i vaspitanje*, vol. 56, br. 1, str. 15–29.

87. *** *Математички лист, бр. 2* (2011). Београд: ДМС.

88. Маричић, С. (2005). *Стваралачки рад у почетној настави математике*. Ужице: Учитељски факултет.

89. Маричић, С. (2006). Сложеност и комплексност математичког мишљења. *Зборник радова*, бр. 7 (2006), Ужице, стр.191–200.

90. Маричић, С., Шпијуновић, К. (2009). Развијање критичког мишљења код ученика – стратегије, методе и фазе развоја. *Зборник радова 11*, Ужице, стр. 61–72.

91. Маричић, С. (2011). *Почетна настава математике и развијање критичког мишљења ученика* (докторска дисертација). Учитељски факултет у Ужицу.

92. Maričić, S., Špijunović, K., Cotič, M., Felda, D. (2017). *Matematičko mišljenje u početnoj nastavi matematike*. Koper: Založba Univerze na Primorskem.

93. Марјановић, М. (1996). *Методика математике (први део)*. Београд: Учитељски факултет.

94. Mattheis, Floyd E. And Others (1986, 1992). *A Study of theLogical Thinking Skills, IntegratedProcess Skills, and Attitudes of Junior High SchoolStudentsin North Carolina*, presented at the United States-Japan Seminar on ScienceEducation (Honolulu, HI, September 14–20, 1986). https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/sce.3730760208.

95. Macun, I. (2014). *Uvod u tradicionalnu logiku*. Zagreb.

96. *** (1996). *Наставни програм математике за основну школу у Републици Србији*. Београд: Архимедес.

97. *** Непознати аутор (2015). *Кратка историја филозофије. Појам логике.* http://kif.filozofijainfo.com/pojam-logike/, Приступљено: 25. 7. 2017.

98. *** Nepoznati autor (2017). *5 Fascinating Brain Teasers for All the Geniuses of The World (5 Pics)*. http://www.24hviralphotos.com/5-fascinating-brain-teasers-for-all-the-geniuses-of-the-world-5-pics/

99. Pallant, J. (2017). *SPSS priručnik za preživljavanje: postupni vodič kroz analizu podataka pomoću programa IBM SPSS*. Prevod 6. izdanja. Beograd: Mikro knjiga.

100. Пауновић, Љ., Гајтановић, З. (2020). Повећање мотивације ученика у настави математике применом занимљивих задатака у нижим разредима основне школе. *Зборник радова Учитељског факултета Призрен – Лепосавић*, 14, 327–336. https://doi.org/10.5937/zrufpl2014327P

101. Petrović, G. (1987). *Logika.* Zagreb: Školska knjiga.

102. Petrović, G. (2013). Pregled povjesti logike, Etimologija i upotreba reči logika. *Metodički ogledi*, 20 (2013) 2, 129–182.

103. Петровић, З. (2015). О математици и настави математике. *Бијељински методички часопис*, 2, 2015, Бијељина, стр. 45–55.

104. Petrović, N. (2002). Razvijanje matematičkog zaključivanja. *Norma*, vol. 8, br. 1–2, str. 41–51.

105. Petrović, N., Mrđa, M. (2001). *Diferencirano poučavanje učenika u rešavanju matematičkih problema.* Sombor: Učiteljski fakultet.

106. Пешић, Д. (2013). Импликација као инструмент за проверу способности из математике. *Настава математике*, 2013, LVIII, 3–4, стр. 23–26.

107. Pijaže, Ž. (1977). *Psihologija inteligencije*. Beograd: Nolit.

108. Pijaže, Ž., Inhelder, B. (1978). *Intelektualni razvoj deteta*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

109. Пијаже, Ж. (1994). *Увод у генетичку епистемологију. (Том 1) Математичко мишљење*. Нови Сад: Издавачка књижарница Зорана Стојановића.

110. Пикула, М., Марковић, О. (1997). Неки резултати истраживања ставова учитеља о садржајно-логичким вредностима уџбеника математике за I разред основне школе. *Вредност савременог уџбеника I, Зборник радова*, Ужице, стр. 197–202.

111. Пикула, М., Марковић, О. (1999). Уџбеник математике за III разред основне школе у служби развијања ученикових способности. *Врдност савременог уџбеника III, Зборник радова*, бр. 3, Ужице, стр. 321–330.

112. Пикула, М., Милинковић, Д. (2015). *Методика почетне наставе математике.* Пале: Филозофски факултет.

113. Pinter, J. J., Sotirović, V., Petrović, N. S., Lipovac, D. (1996). *Opšta metodika nastave matematike*. Sombor: Učiteljski fakultet.

114. Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak.* Zagreb: Školska knjiga.

115. *** *Правилник о наставном плану и програму за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања*. Сл. гласник РС – Просветни гласник, бр. 10/2004, 20/2004, 1/2005, 3/2006, 15/2006, 2/2008, 2/2010, 7/2010, 3/2011.

116. *** *Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 10/2017 и 12/2018.

117. *** *Правилник о плану и програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања* (2018). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 16/2018.

118. *** *Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 5/2019.

119. *** *Правилник о плану и програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 11/2019.

120. *** *Правилник о стандардима квалитета уџбеника и упутства о њиховој употреби* (2016). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 42/2016.

121. *Правилник о стандардима квалитета уџбеника и упутства о њиховој употреби* (2018). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије бр. 45/2018.

122. Prvanović, S. (1970). *Metodika nastave matematike*. Beograd.

123. Prešić, S. (1983). *Elementi matematičke logike*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

124. Радојевић, П., Радојевић, В. (1984). *Методика наставе математике за студенте IV године педагошке академије*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

125. Rakić, D., Lazić, B., Marić, M. (2021). The influence of differentiated mathematical tasks on students' logical-combinatorial thinking in elementary mathematics teaching. *Slavanic Pedagogical Studies Journal,* No 1, vol. 10, p. 78–92.

126. Roadrangka, V. (1991): The Construction of A Group Assessment of Logical Thincing GALT. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, 148–154. https://so04.tci-thaijo.org/index.php/kjss/article/view/244006

127. Романо, Д. (2008). О мотивима изучавања математичког мишљења, *Настава математике,* 2008, LIII, 3–4, стр. 1–11.

128. Sadi, O., Karipglu, J. (2015). The Effect of Logical Thinking Ability and Gender on Science Achievements and Attitudes towards Science. *Croatian Journal of Education,* Vol.17, Sp.Ed.No.3/2015, pages: 97–115. https://doi.org/10.15516/cje.v17i0.881

129. Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 3–21.

130. Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, Plenary Lecture. *Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics*, Recife, Brazil, July 1995, (Vol I, pp. 161–175). https://digilander.libero.it/leo723/materiali/algebra/dot1995b-pme-plenary.pdf

131. Tarski, A. (1973). *Uvod u matematičku logiku i metodologiju matematike*. Beograd: Rad.

132. Tobin, K., Capie, W. (1981). The Development and Validation of a Group Test of Logical Thinking. *Educational and Psychological Measurement,* 41 (2), 413–423. https://eric.ed.gov/?id=EJ249419.

133. Tularam, G., Hulsman, K. (2016). *A Study of Students' Conceptual, Procedural Knowledge, Logical Thinking and Creativity During the First Year of Tertiary Mathematics*. https://www.cimt.org.uk/journal/tularam.pdf

134. Tuna, A., Biber, A. C., İncikapı, L. (2013). An analysis of mathematics teacher candidates' lofical thinking levels: case of Turkey. *Journal of Educational and Instructional Studies In The World*, 3, 83–91.

135. Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., Thagard, P. R. (1989). *Induction: Processes of inference, learning, and discovery*. MIT press.

136. Hoyles, C., Küchemann, D. (2002). Students' Understandings of Logical Implication. In *Educational Studies in Mathematics*, (2002) 51, 3, 193–223. https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1515594/1/Hoyles2002students193(text).pdf

137. Šešić, B. (1983). *Osnovi logike*. Beograd: Naučna knjiga.

138. Шпијуновић, К. (1994). *Такмичење из математике и развијање стваралачког мишљења ученика*. Београд: Филозофски факултет.

139. Шпијуновић, К. (1999). Основне логичке операције у уџбенику математике за 3. разред основне школе. *Вредности савременог уџбеника*, *Зборник радова са научног скупа*, Ужице: Учитељски факултет, стр. 347–366.

140. Шпијуновић, К., Маричић, С. (2015). Оцењивање у почетној настави математике усмерено на развој и напредовање ученика. *Настава и учење – евалуација васпитно-образовног рада,* Учитељски факултет, Ужице, 347–356.

141. Шпијуновић, К., Маричић, С. (2016). *Методика почетне наставе математике.* Ужице: Учитељски факултет.

142. Wilson, J. (1963). *Thinking with concepts*. Cambridge: University Press.

143. Wood, E. L. (1980). An „intelligent" program to teach logical thinking skills. *Behavior Research Methods & Instrumentation,* volume 12, 256–258. https://link.springer.com/article/10.3758/BF03201608

ИЗВОРИ

144. Дејић, М., Дејић, Б. (2017). *Математичке авантуре*. Београд: Креативни центар.

145. Јовановић, Б., Русић, Ј., Николић Гајић, Н. (2020а). *Математика 3,* уџбеник за трећи разред основне школе, први део. Београд: Бигз.

146. Јовановић, Б., Русић, Ј., Николић Гајић, Н. (2020б). *Математика 3*, уџбеник за трећи разред основне школе, други део. Београд: Бигз.

147. Јовановић, Б., Русић, Ј., Николић Гајић, Н. (2020в). *Математика 3*, радна свеска за трећи разред основне школе. Београд: Бигз.

148. Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019а). *Математика*, уџбеник за трећи разред основне школе. Београд: Вулкан.

149. Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019б). *Математика*, радна свеска за трећи разред основне школе. Београд: Вулкан.

150. Маричић, С. (2018а). *Математика 1,* уџбеник за први разред основне школе. Београд: БИГЗ.

151. Маричић, С. (2018б). *Математика 1,* радна свеска за први разред основне школе, 1. део. Београд: БИГЗ.

152. Маричић, С. (2018в). *Математика 1,* радна свеска за први разред основне школе, 2. део. Београд: БИГЗ.

153. Маричић, С., Ђуровић, Д. (2019а). *Математика 2,* уџбеник за други разред основне школе. Београд: БИГЗ.

154. Маричић, С., Ђуровић, Д. (2019б). *Математика 2,* радна свеска за други разред основне школе, 1. део. Београд: БИГЗ.

155. Маричић, С., Ђуровић, Д. (2019в). *Математика 2,* радна свеска за други разред основне школе, 2. део. Београд: БИГЗ.

156. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2016а). *Маша и Раша, Математика 2*, уџбеник за други разред основне школе. Београд: Klett.

157. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2016б). *Маша и Раша, Математика 2*, радна свеска за други разред основне школе, 1. део. Београд: Klett.

158. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2016в). *Маша и Раша, Математика 2*, радна свеска за други разред основне школе. 2. део, Београд: Klett.

159. Поповић, Б., Вуловић, Н., Јовановић, М., Николић, А. (2016г): *Маша и Раша, Математика 4*, уџбеник за четврти разред основне школе. Београд: Klett.

160. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2017а). *Маша и Раша, Математика 3*, радна свеска за трећи разред основне школе, 1. део. Београд: Klett.

161. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2017б). *Маша и Раша, Математика 3*, радна свеска за трећи разред основне школе, 2. део. Београд: Klett.

162. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018а). *Маша и Раша, Математика*, уџбеник за први разред основне школе, 1. део. Београд: Klett.

163. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018б). *Маша и Раша, Математика*, уџбеник за први разред основне школе, 2. део. Београд: Klett.

164. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018в). *Маша и Раша, Математика*, уџбеник за први разред основне школе, 3. део. Београд: Klett.

165. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018г). *Маша и Раша, Математика*, уџбеник за први разред основне школе, 4. део. Београд: Klett.

166. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019а). *Математика,* уџбеник за 3. разред основне школе, 1. део. Београд: Klett.

167. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019б). *Математика,* уџбеник за 3. разред основне школе, 2. део. Београд: Klett.

168. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019в). *Математика,* уџбеник за 3. разред основне школе, 3. део. Београд: Klett.

169. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019в). *Математика,* уџбеник за 3. разред основне школе, 4. део. Београд: Klett.

170. Тахировић Раковић, С., Иванчевић Илић, И. (2019). *Математика,* уџбеник за трећи разред, 1. део. Београд: Нови Логос.

171. Тахировић Раковић, С., Иванчевић Илић, И. (2019). *Математика,* уџбеник за трећи разред, 2. део. Београд: Нови Логос.

172. Тахировић Раковић, С., Иванчевић Илић, И. (2019). *Математика,* уџбеник за трећи разред, 3. део. Београд: Нови Логос.

173. Тахировић Раковић, С., Иванчевић Илић, И. (2019). *Математика,* уџбеник за трећи разред, 4. део. Београд: Нови Логос.

174. Тахировић Раковић, С., Иванчевић Илић, И. (2019). *Математика,* наставни листови за трећи разред. Београд: Нови Логос.

ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1. *Евиденциони лист (досије ученика)*

Име и презиме:	
Назив школе:	
Разред и одељење:	
Пол:	1. мушки 2. женски
Општи успех на крају претходног разреда:	1. одличан 2. врлодобар 3. добар 4. довољан 5. недовољан
Оцена из математике на крају претходног разреда:	1. пет 2. четири 3. три 4. два 5. један
Стручна спрема оца:	1. основна 2. средња 3. виша, висока 4. факултет
Стручна спрема мајке:	1. основна 2. средња 3. виша, висока 4. факултет

ПРИЛОГ 2. *Иницијални тест логичког мишљења*

ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА

Име и презиме: ____

Школа: ____

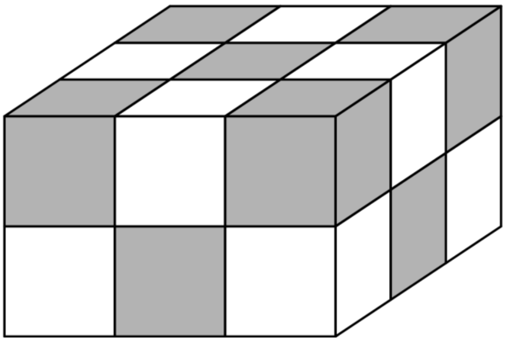
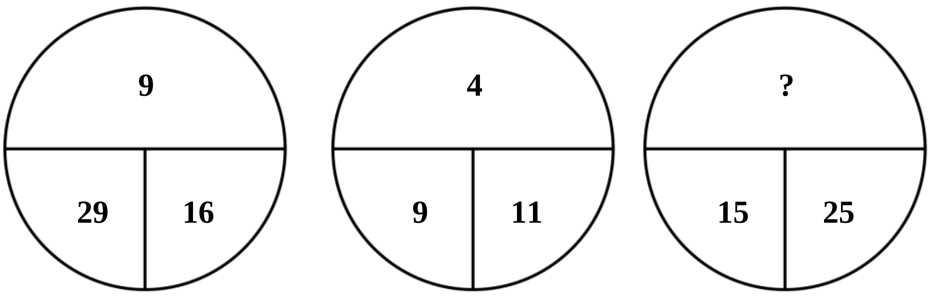
Разред: ___________________________ Одељење: __________________

Упутство за рад

Данас ћеш самостално решавати задатке из математике. Најпре пажљиво прочитај сваки задатак, затим почни са решавањем. Решавај један по један задатак. Ако неки задатак не можеш одмах решити, немој губити време, већ пређи на следећи задатак. Уколико ти преостане времена, врати се на нерешене задатке и покушај да их решиш. Задатке решавај на месту предвиђеном за рад и на крају сваког задатка напиши тражени одговор.

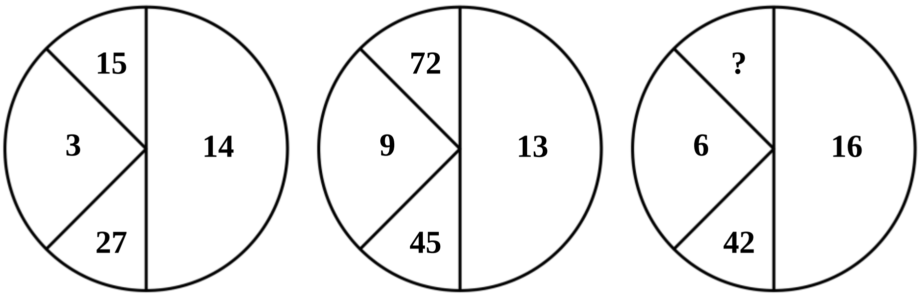
За време рада не сме бити разговора, договарања или преписивања. Време за решавање задатака је 90 минута.

Хвала на сарадњи!

<table>
<tr><th>Редни бр.</th><th>ЗАДАТАК</th><th>Број поена</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Из колико сивих и колико белих коцки је састављен квадар на слици?

Одговор: Сивих је ____, а белих је ____.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Сара је овако записала неке бројеве.
<table><tr><td>24</td><td>☺ ☺♥♥♥♥♥♥♥♥</td></tr><tr><td>62</td><td>☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺♥♥♥♥</td></tr><tr><td>43</td><td>☺ ☺ ☺ ☺♥♥♥♥♥♥</td></tr></table>
Како ће Сара записати број 51?
Рад:</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Уочи правило по коме су уписани бројеви у прва два круга, па у трећи круг упиши број који недостаје.


Одговор: На месту ? треба да стоји број ____.</td><td>5</td></tr>
</table>

4.	Свеска и оловка коштају 74 динара, а две такве оловке и свеска 100 динара. Колико кошта свеска, а колико оловка? Рад: Одговор: Свеска кошта ____ динара, а оловка ____ динара.	5
5.	Мира, Лена и Тина имају укупно 96 сличица. Мира и Лена укупно имају 59 сличица, а Мира и Тина 56 сличица. Колико сличица има свака од њих? Рад: Одговор: Мира има ___ сличица, Лена ___ сличица, а Тина ___ сличица.	5
6.	Броју који је из четврте десетице и који није непаран додај највећи број пете десетице који није паран. Одреди сва решења. Рад:	5
7.	Жика бележи само сабирања у којима резултати нису парни бројеви. Обој поља у којима су изрази које Жика није могао записати. **67 + 32** **56 + 35** **67 + 25** **45 + 47** **32 + 59** **67 + 27** **34 + 58**	5

8.	Ната је из свог букета дала мами половину својих цветова, а баки четвртину својих цветова и њој су остала 4 цвета. Колико цветова је Ната имала у свом букету? Рад: Одговор: Ната је у букету имала ____ цветова.	5
9.	Уочи правило по коме су уписани бројеви у прва два круга, па у трећи круг упиши број који недостаје.  Одговор: На месту ? треба да стоји број ____.	5
10.	На три тацне су укупно 72 колача. На првој тацни је два пута више колача него на другој, а на трећој тацни је дупло више колача него на прве две тацне укупно. Колико колача је на свакој тацни? Рад: Одговор: На првој тацни је ____ колача, на другој ____, а на трећој ____ колача.	5
11.	Маша је записала број који има седам десетица и који је паран. Од тог броја је одузела број који има две или четири десетице и који није паран. Које изразе од датих Маша није могла записати? Заокружи их. **78 – 44** **75 – 45** **79 – 27** **76 – 43** **73 – 43** **74 – 23** **71 – 27** **78 – 27** **78 – 25** **76 – 45** **72 – 48** **78 – 42**	

ПРИЛОГ 2а. *Спецификација иницијалног теста*

Редни број задатка	**Способност логичког мишљења**
1.	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатка уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу
2.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
3.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
4.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
5.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
6.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)
7.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)
8.	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатка уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу
9.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
10.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
11.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)

ПРИЛОГ 3. *Финални тест логичког мишљења*

ФИНАЛНИ ТЕСТ ЛОГИЧКОГ МИШЉЕЊА

Име и презиме: ____

Школа: ____

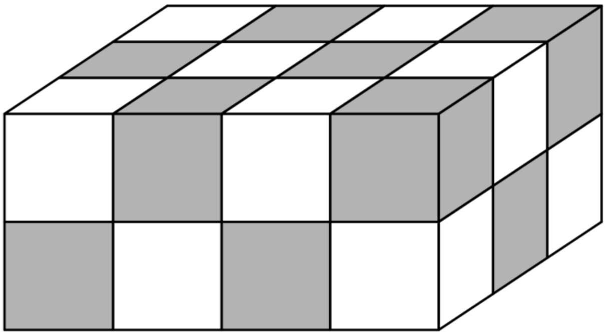
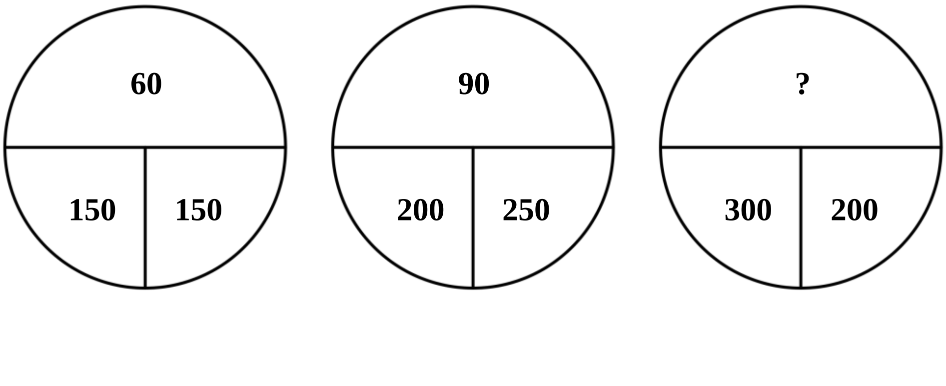
Разред: ______________________________ Одељење: ___________________

Упутство за рад

Данас ћеш самостално решавати задатке из математике. Најпре пажљиво прочитај сваки задатак, затим почни са решавањем. Решавај један по један задатак. Ако неки задатак не можеш одмах решити, немој губити време, већ пређи на следећи задатак. Уколико ти преостане времена, врати се на нерешене задатке и покушај да их решиш. Задатке решавај на месту предвиђеном за рад и на крају сваког задатка напиши тражени одговор.

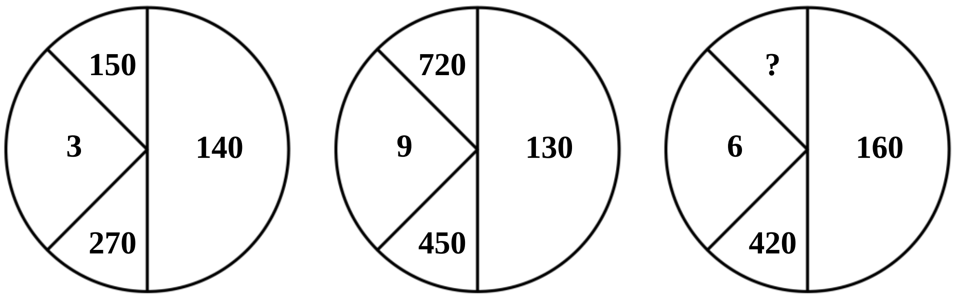
За време рада не сме бити разговора, договарања или преписивања. Време за решавање задатака је 90 минута.

Хвала на сарадњи!

<table>
<tr><th>Редни бр.</th><th>ЗАДАТАК</th><th>Број поена</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Из колико сивих и колико белих коцки је састављен квадар на слици?

Одговор: Сивих је ____, а белих је ____.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Дара је овако записала неке бројеве.
<table>
<tr><td>125</td><td>♥♥♥☺☺☺☺▲▲▲▲▲</td></tr>
<tr><td>321</td><td>♥♥♥♥♥♥♥♥♥☺☺☺☺▲</td></tr>
<tr><td>456</td><td>♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺▲▲▲▲▲▲</td></tr>
</table>
Како ће Дара записати број 581?
Рад:</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Уочи правило по коме су уписани бројеви у прва два круга, па у трећи круг упиши број који недостаје.


Одговор: На месту ? треба да стоји број ____.</td><td>5</td></tr>
</table>

4.	Књига и свеска коштају 740 динара, а две такве свеске и књига 906 динара. Колико кошта свеска, а колико књига? Рад: Одговор: Свеска кошта ____ динара, а књига ____ динара.	5
5.	У библиотеци на три полице има укупно 963 књиге. На првој и трећој полици је укупно 695 књига, а на трећој и другој је 630 књига. Колико књига је на свакој полици? Рад: Одговор: На првој полици __________________, на другој полици ________________________, а на трећој __________________________.	5
6.	Броју треће стотине којем је цифра десетице четири и који није непаран, додај највећи број пете стотине који није паран. Одреди сва решења. Рад:	5
7.	Маша бележи само сабирања у којима резултати нису парни бројеви. Прецртај поља у којима су сабирања која Маша није могла записати. **324 + 523** **765 + 149** **342 + 325** **675 + 212** **734 + 142** **568 + 342** **341 + 376** **168 + 753**	5

8.	Мира је половину својих сличица залепила у албум, четвртину својих сличица је дала сестри и њој су остале 242 сличице. Колико сличица је имала на почетку? Рад: Одговор: Мира је на почетку имала _____ сличица.	5
9.	Уочи правило по коме су уписани бројеви у прва два круга, па у трећи круг упиши број који недостаје.  Одговор: На месту ? треба да стоји број _____.	5
10.	Марко има три албума са сличицама фудбалера. Укупно је залепио 981 сличицу. У први албум је залепио два пута више сличица него у други, а у трећи дупло више сличица него у први и други укупно. Колико сличица је у сваком од албума? Рад: Одговор: У први албум је залепио ______ сличица, у други албум је залепио ______ сличица, а у трећи ______ сличице.	5

11.	Сара је записала број из пете стотине којем је цифра десетице два и који је паран. Од тог броја одузела је број из треће стотине који има две или четири десетице и који није паран. Које изразе од датих Сара није могла записати? Заокружи их. 428 – 223 429 – 229 422 – 325 435 – 245 424 – 249 528 – 221 426 – 247 426 – 248 422 – 249	5

ПРИЛОГ 3а. *Спецификација финалног теста*

Редни број задатка	Способност логичког мишљења
1.	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатка уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу
2.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
3.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
4.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
5.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
6.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)
7.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)
8.	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, способност решавања задатка уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу
9.	Способност уочавања правила и законитости и способност закључивања на основу уочених правила
10.	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација
11.	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не)

ПРИЛОГ 4. *Експериментални програм*

Вежба број 1	
Наставна јединица:	Задаци за вежбање
Тип часа:	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима; Извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Мара, Сара и Лара су пре три године имале укупно 21 годину. Колико ће година њих три имати укупно за 5 година?

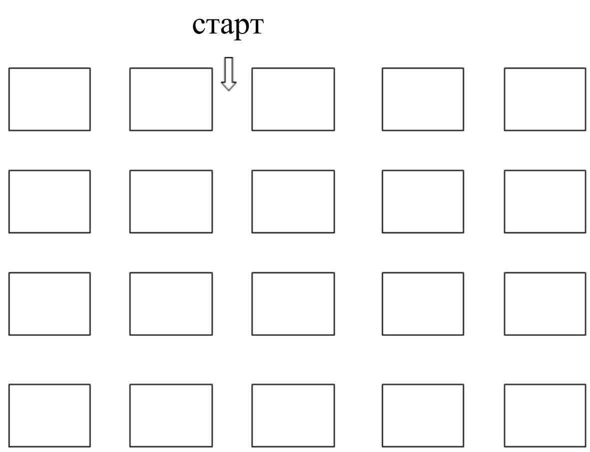
2. Отац и син су пре 5 година имали укупно 30 година. Колико ће година имати укупно отац и син за пет година?

3. На колико начина може да се обуче тенисер ако има пет различитих мајица и 4 различита шортса?

4. Фигуре ♥ ♥ ♥ ♦ ♦ ♦ ☺ ☺ ☺ распореди у празна поља доњег правоугаоника, али тако да ни у једном реду и ни у једној колони не буду исте фигуре.

5. Анђа, Гина и Јасна су се такмичиле у трчању и стигле у различито време. Анђа није ни прва, ни трећа. Гина није победила. Које место је заузела Јасна?

6. Нацртај Ивину путању која је дата симболима ♥♦♦♥♦♦♥♥♦, ако знаш да ♥ представља скретање удесно на раскрсници, а ♦ скретање улево на раскрсници и ако знаш да је Ива на свакој раскрсници извршила скретање које је дато симболима.



7. Бора, Влада и Урош су из различитих градова: Београда, Ваљева и Ужица. Никоме од њих име града и име не почињу истим словом. Бора није из Ваљева. Који дечак је из ког града?

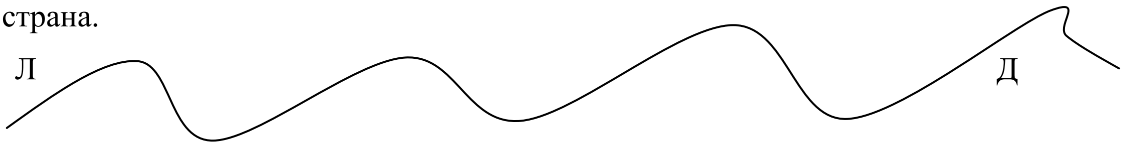
8. Треба сложити (распоредити једну поред друге) три плаве коцке и две црвене коцке. На колико начина се може извршити слагање, ако се зна да црвене коцке не смеју стајати једна поред друге?

Задаци за додатни рад

9. Лена, Мара, Ната и Тина живе на различитим спратовима једне зграде. Све девојчице живе од првог до четвртог спрата. Лена живи изнад Тине, али испод Маре. Натин стан је испод Тининог стана. Која девојчица живи на ком спрату?

10. Анђелија има по једну перлу за огрлицу следећих боја: љубичасту, црвену, плаву, зелену и жуту. Жута је десно од плаве, плава није са леве стране црвене перле. Црвена је између плаве и зелене, а љубичаста није са десне стране зелене.

Помози Анђелији да наниже огрлицу према датом упутству. Означене су ти лева и десна страна.



11. У правоугаоник распореди ☺, ♦, ♥, али тако да се не понављају исте фигуре ни у реду, ни у колони.

☺	♥	
♦		

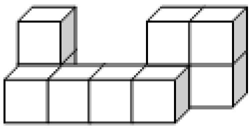
12. Колико модних комбинација можеш направити ако имаш 4 различита доња дела гардеробе и 6 различитих горњих делова гардеробе?

13. Црвенкапа је понела баки разно цвеће: љубичице, нарцисе и беле раде.

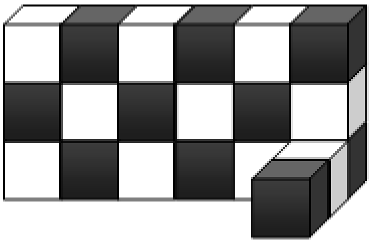
Белих рада је више него нарциса, а мање од љубичица. Којег цвећа је највише понела, а којег најмање?

Вежба број 2	
Наставна јединица:	Задаци за вежбање
Тип часа:	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост; Способност коришћења података који нису јасно дати у задатку;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

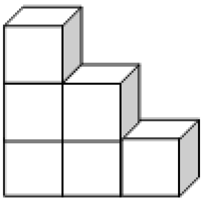
1. Колико је коцки на слици?



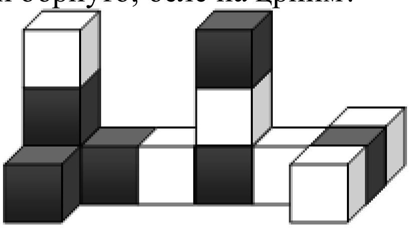
2. Колико има белих, а колико црних коцки, ако се зна да су црне коцке увек поред белих и да су црне на белим и обрнуто, беле на црним?



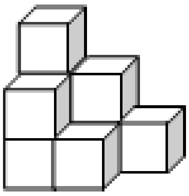
3. Марко је плавом бојом фарбао тело са слике са свих страна. Колико је страна коцке офарбао?



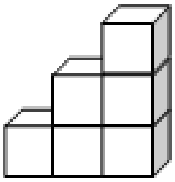
4. Колико има белих, а колико црних коцки, ако се зна да су црне коцке увек поред белих и да су црне на белим и обрнуто, беле на црним?



5. У којој групи је више коцки?



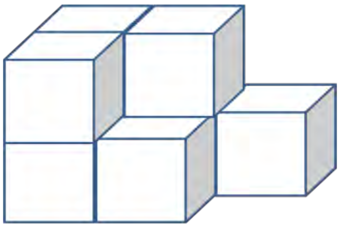
а)



б)

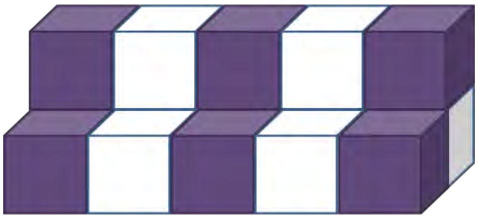
Задаци за додатни рад

6. Влада је црвеном бојом фарбао тело са слике са свих страна. Колико је страна коцке офарбао?



7. Колико је коцки на слици?

8. Колико је љубичастих, а колико белих коцки на слици? Обрати пажњу, љубичасте коцке су увек на белим, а беле на љубичастим!



Вежба број 3	
Наставна јединица:	Задаци за вежбање
Тип часа:	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост; Способност решавања проблема на основу откривања нелогичности у задатку; Способност уочавања непотребних (сувишних) елемената у задатку;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Како да две другарице поделе 16 крушака, а да, при томе, прва добије једну крушку више од друге?

2. Чобанин има 25 оваца. У тор су ушле све осим 5 оваца. Колико оваца није ушло у тор?

3. У породици су 4 сина. Сваки од њих има сестру. Колико је деце у тој породици?

4. Могу ли у породици од три члана бити два оца и два сина?

5. Три штапића имају 6 крајева. Колико крајева имају 3 и по таква штапа?

6. На мердевинама је 15 летвица. На коју летвицу треба да станеш да би био/била на средини мердевина?

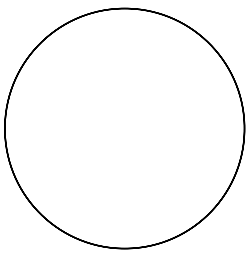
7. Штапић дужине 15 cm треба поделити на 5 делова по 3 cm. На колико места ћеш пресећи тај штапић?

Задаци за додатни рад

8. Влада је купио оловку од 15 динара и свеску која кошта 65 динара. Платио је новчаницом од 100 динара. Колико највише папирних новчаница може да добије као кусур?

а) 4 б) 1 в) 3 г) 2

9. Без подизања оловке са папира подели дати круг на осам делова.



Вежба број 4	
Наставна јединица:	Бројеви прве хиљаде
Тип часа:	Обрада
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима; Извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Напиши све троцифрене бројеве помоћу цифара 0 и 2. Цифре се могу понављати.

2. Колико има троцифрених бројева који се могу записати само цифрама 5, 4, 2? Цифре се могу понављати.

3. Колико има троцифрених бројева који се спреда и отпозади читају исто?

4. Дате су картице са бројевима. Сложи их тако да добијеш најмањи могући број користећи дате картице, а затим и највећи.

$\boxed{7}$ $\boxed{0}$ $\boxed{9}$

5. Дати су бројеви 4, 3 и 8. Сложи их тако да добијеш највећи паран троцифрени број. Цифре се не могу понављати.

6. Напиши све троцифрене бројеве који се пишу помоћу цифара 9, 4 и 2. Цифре се не могу понављати.

Задаци за додатни рад

7. Напиши све троцифрене бројеве који се пишу помоћу цифара 6, 4 и 5 и код којих је цифра десетице парна. Цифре се не могу понављати.

8. Запиши све троцифрене бројеве који се пишу цифрама 4, 5 и 7 и који су парни. Цифре се могу понављати.

9. Запиши све троцифрене бројеве који се пишу цифрама 3, 5 и 7 и који се спреда и отпозади исто читају. Цифре се могу понављати.

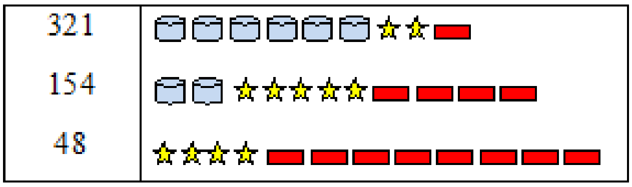
10. Запиши све троцифрене бројеве који се пишу цифрама 6, 7 и 8 и који су непарни. Цифре се могу понављати.

11. Напиши све троцифрене бројеве који се спреда и отпозади читају исто и који на месту десетице имају цифру 3 и који су парни.

Вежба број 5	
Наставна јединица:	Бројеви прве хиљаде
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања правила; Способност уочавања (откривања) законитости; Способност закључивања на основу уочених правила и законитости; Способност примене правила;

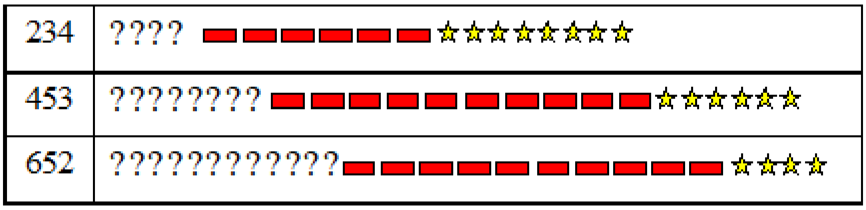
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Ива је овако записала неке бројеве:



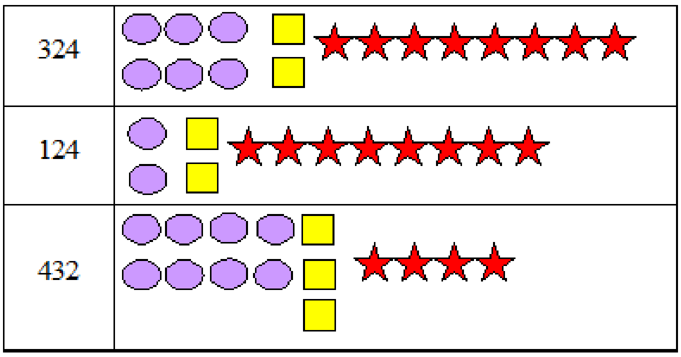
Како ће Ива записати број 263?

2. Мирко је овако записао неке бројеве.



Како ће Мирко записати број 159?

3. Мара је овако записала неке бројеве.

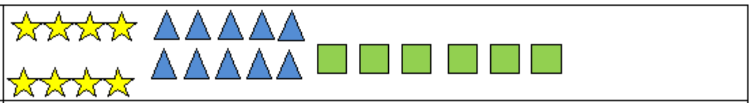
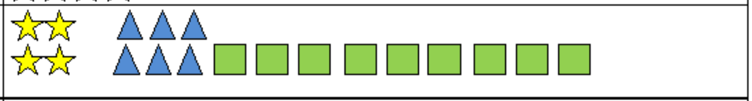
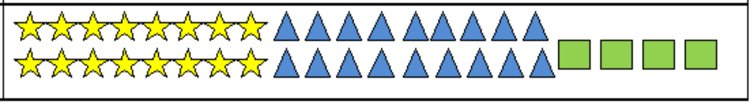


Како ће Мара записати број 563?

4. Осмисли правило по којем ћеш симболима представити бројеве: 457, 321, 932, тако да одређени симбол или симболи представљају стотине, одређени десетице, а одређени јединице. Симболима и правилом које си осмислио/ла напиши дате бројеве.

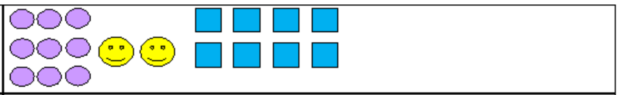
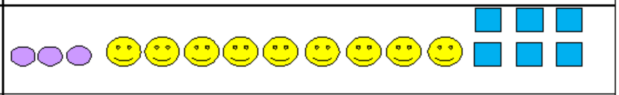
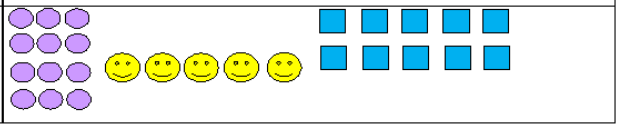
Задаци за додатни рад

5. Уна је овако записала неке бројеве.

456	
239	
894	

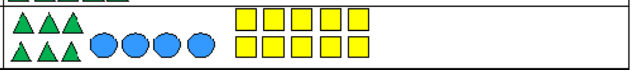
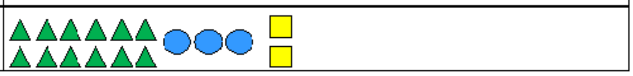
Како ће Уна записати број 678?

6. Влада је овако записао неке бројеве.

324	
193	
455	

Како ће Влада записати број 295?

7. Марко је овако записао неке бројеве.

579	
345	
631	

Како ће Марко записати број 952?

8. Осмисли правило по којем ћеш симболима представити стотине, десетице и јединице, а затим запиши дате бројеве помоћу симбола и правила које си осмислио/ла.

Бројеви: 767, 454, 123.

Вежба број 6	
Наставна јединица:	Римске цифре
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Напиши све бројеве помоћу знакова I и X.

2. Дате бројеве напиши римским цифрама:

985

459

699

3. Може ли се од 9 узети 1 па да остане 10?

4. Може ли се од 40 узети 10 па да остане 50?

5. Може ли се од 90 узети 10 па да остане 100?

6. Помери само једно палидрвце па да једнакост буде тачна.

V – V = II

Задаци за додатни рад

7. Исправи погрешно написане бројеве:

66 = LXVI	88 = LXXVIII	99 = XCIX
888 = DCCCLXXXVIII	999 = CDXCIX	555 = DLV
444 = CDVLIV	777 = DXXLXXVII	333 = CCCXXXIII

8. Помери само једно палидрвце па да једнакости буду тачне.

VI – V = XII

VII – III = IX

X – II = X

9. Може ли се на 10 додати 1, па да се добије 9?

10. Може ли се на 1000 додати 100, па да се добије 900?

Вежба број 7	
Наставна јединица:	Сабирање и одузимање стотина прве хиљаде
Тип часа:	Обрада
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима; Извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Напиши број који има 2 С и још 20 Д.

2. Напиши број који има 600 Ј, још 20 Д и још 2 С.

3. Израчунај збир броја који има 300 Ј, још 20 Д и још 2 С и броја који има 1 С, још 10 Д и још 100 Ј.

4. Израчунај разлику ако је умањилац број који има 200 Ј, још 10 Д и још 2 С, а умањеник број који има 20 Д, још 400 Ј и још 4 С.

5. Разлици броја који има 5 С, још 20 Д и још 100 Ј и броја који има 100 Ј, још 30 Д и још 1 С, додај број који има 20 Д, још 2 С и још 200 Ј.

6. Чоколада и кесица бомбона коштају укупно 400 динара, а две такве чоколаде и кесица бомбона коштају укупно 700 динара. Колико кошта чоколада, а колико кесица бомбона?

7. У три џака има укупно 900 kg брашна. У првом и трећем џаку има укупно 600 kg брашна. У другом и трећем џаку је укупно 500 kg брашна. Колико kg брашна је у сваком џаку?

Задаци за додатни рад

8. Од броја који има 3 С, још 30 Д и још 200 Ј одузми број који има 300 Ј, још 20 Д и још 1 С.

9. Који број је за 2 С, још 100 Ј и још 20 Д већи од разлике броја који има 400 Ј, још 20 Д и још 3 С и броја који има 2 С, још 20 Д и још 200 Ј?

10. Влада има три кутије у којима су кликери. Укупно има 800 кликера. У другој и трећој кутији има укупно 600 кликера, а у првој и другој 500 кликера. Колико кликера је у свакој од кутија?

Вежба број 8	
Наставна јединица:	Сабирање и одузимање стотина прве хиљаде
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања правила и законитости; Способност закључивања на основу уочених правила и законитости; Способност примене правила на конкретне примере;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Попуни празна поља магичног квадрата бројевима 100, 100, 100, 200, 200, 200, 300, 300 и 300.

		200
	200	
200		

2. Упиши следећих осам чланова низа.

900, 100, 800, 100, ____

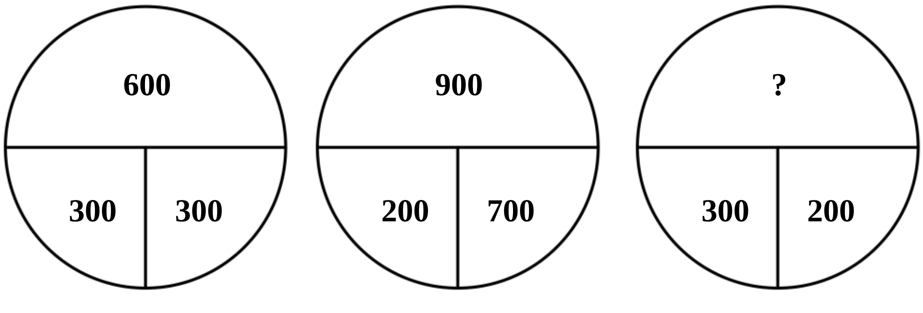
3. Упиши следећи члан низа.

100, 300, 500, 700, ______.

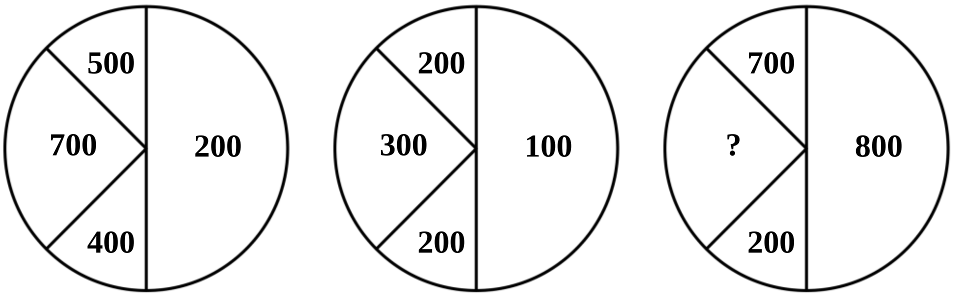
4. Попуни празна поља.

+	**300**	**500**		
		800		
		600		700
	400		500	

5. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје у трећи круг.

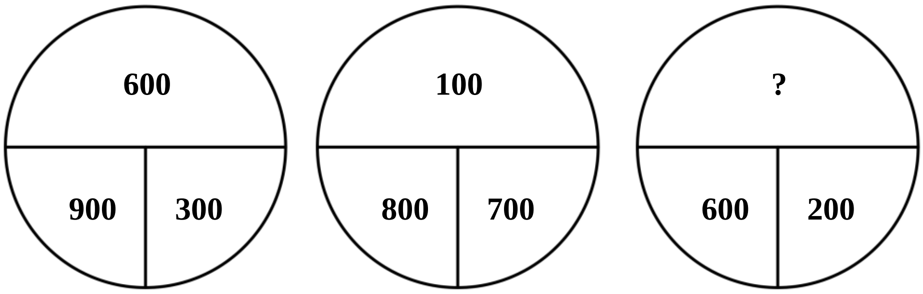


6. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје у трећи круг.



Задаци за додатни рад

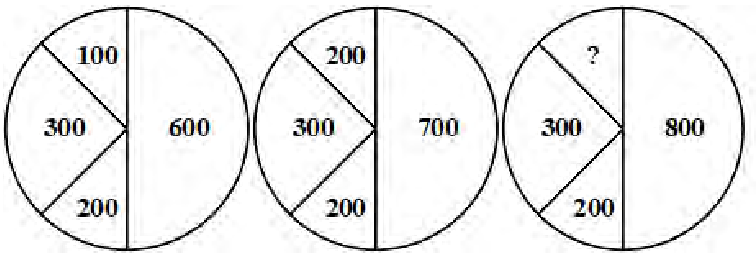
7. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје у трећи круг.



8. Упиши следећи члан низа.

1000, 800, 600, 400, ______.

9. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје у трећи круг.



Вежба број 9	
Наставна јединица:	Сабирање троцифреног и једноцифреног броја
Тип часа:	Обрада
Способност логичког мишљења	Способност уочавања правила и законитости; Способност закључивања на основу уочених правила; Способност примене правила;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Упиши следећа четири члана низа.

376, 381, 386, 391, 396, _____________.

2. Упиши следећи члан низа.

256, 258, 262, 268, ____.

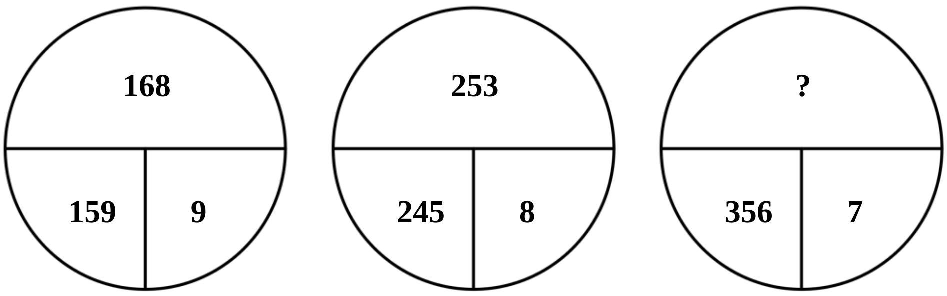
3. Упиши следећи члан низа.

452, 454, 459, 461, 466, 468, 473, _____.

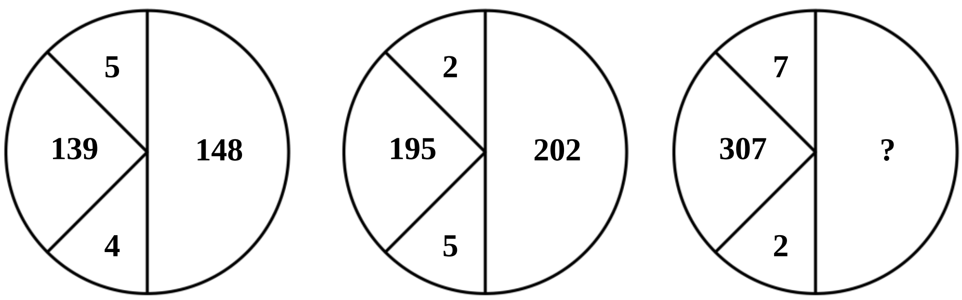
4. Упиши следећи члан низа.

856, 862, 866, 872, 876, 882, 886, 892, _____.

5. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје.



6. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје.



Задаци за додатни рад

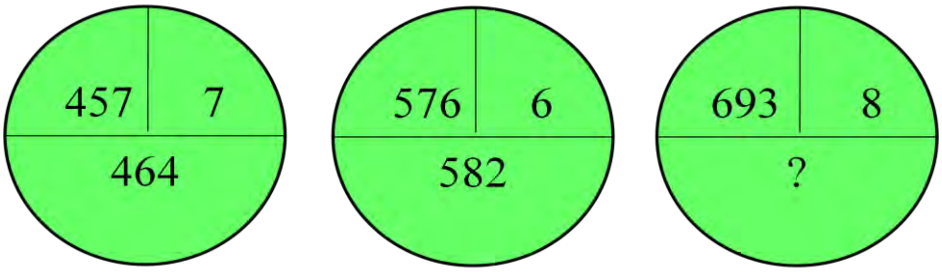
7. Упиши следећа три члана низа.

451, 460, 469, 478, 487, _____________.

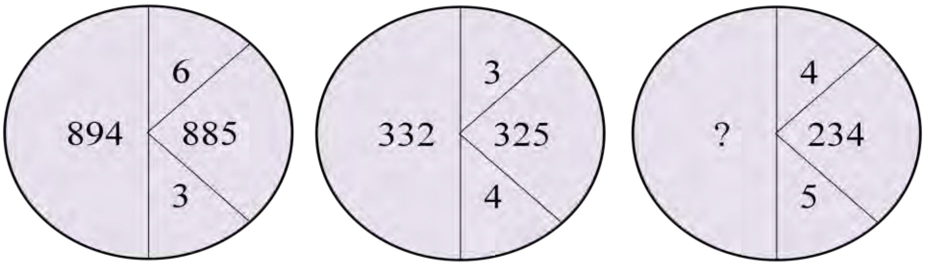
8. Упиши следећи члан низа.

456, 457, 460, 465, 472, ____.

9. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје.



10. Уочи правило (законитост) бројева у прва два случаја, па упиши број који недостаје.



Вежба број 10	
Наставна јединица:	Сабирање троцифреног и једноцифреног броја
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима; Извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Решавање задатка на основу уочених, успостављених релација између елемената; Способност стављања елемената датих у задатку у потребне везе и релације;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$AAB + B = AAA$$

2. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$ABA + B = ABA$$

3. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$ABC + C = AAB$$

4. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$AAB + A = AAA$$

Задаци за додатни рад

5. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$ABA + A = ABB$$

6. Дешифруј сабирање.

$$ABA + A = AAB$$

7. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$6{*}\,3 + {*} = 64{*}$$

8. Дешифруј сабирање. Одреди сва решења.

$$4{*}5 + {*} = 40{*}$$

Вежба број 11	
Наставна јединица:	Одузимање једноцифреног броја од троцифреног
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Напиши све бројеве који припадају трећој стотини и на месту цифре десетице имају цифру 4 или цифру 5 и који су парни.

2. На столу су поређане картице на којима су написани изрази. Треба склонити картице у којима резултати нису непарни бројеви. Те картице прецртај.

345 – 7   625 – 6   935 – 9   294 – 8

931 – 8   834 – 9   745 – 3   456 – 7   527 – 9

3. Маријана је добила задатак да запише број из седме стотине који на месту десетице има цифру четири и који је паран и да га умањи за највећи једноцифрени број који није паран. Одреди све резултате које је Маријана могла добити.

4. Умањеник је троцифрени паран број којем цифра десетица није парна. Умањилац је број који није непаран. Обој поља у којима су изрази који не могу бити записани.

548 – 9   623 – 8   536 – 8   318 – 6   753 – 8

492 – 4   232 – 8   794 – 9   155 – 8   894 – 6

Задаци за додатни рад

5. Заокружи изразе чија вредност није већа од 465 и није мања од 459.

459 + 9   469 – 9   467 – 9   469 – 7   465 – 4

465 – 6   465 + 5   467 – 8   469 – 8

6. Нена је од бројева који нису већи од 785 и који нису мањи од 782 одузимала редом једноцифрене бројеве који нису парни. Запиши сва одузимања која је Нена извршила и израчунај њихову вредност.

7. Миша је од броја 345 или од броја 347 одузео број 9 или број 8. Које разлике је Миша могао добити?

Вежба број 12	
Наставна јединица:	Сабирање троцифреног и двоцифреног броја
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Гоца је броју 765 или броју 564 додала двоцифрени број који се пише помоћу цифара 5 и 6. Која све сабирања је Гоца могла извршити? Запиши их и израчунај њихову вредност.

2. Рачунар исписује само сабирања у којима резултати нису парни бројеви. Обој поља у којима су збирови који нису могли бити исписани.

391 + 34 563 + 25 391 + 34 825 + 67 254 + 47

789 + 45 478 + 82 653 + 28 198 + 46

3. Ивана је броју седме стотине који на месту десетице има цифру пет и који је паран додала најмањи број треће десетице који није паран. Која сабирања је Ивана могла записати? Запиши их и израчунај њихову вредност.

4. Једна машина за сабирање се покварила и стално као први сабирак избацује број пете стотине којем је цифра десетице парна и мања од 4, а већа од 1 и који није непаран, а као други сабирак најмањи број четврте десетице који није паран. Запиши сва сабирања која може избацити та машина и израчунај њихову вредност.

5. На основу датог разговора првог и другог сабирка забележи сабирање и израчунај збир.

Први сабирак: „Ја нисам непаран број“.
Други сабирак: „Ја нисам паран број“.
Први сабирак: „Ја немам непарну цифру десетица“.
Други сабирак: „Цифра на месту мојих десетица није већа од 4 и није мања од 2“.
Први сабирак: „Цифра на месту мојих десетица није већа од 3 и није мања од 1“.
Други сабирак: „Цифра на месту мојих јединица није већа од 6 и није мања од 4“.
Први сабирак: „Цифра на месту мојих јединица није већа од 9 и није мања од 7“.
Други сабирак: „Цифра на месту мојих десетица није парна“.
Први сабирак: „Ја сам број из треће стотине“.
Други сабирак: „Ја сам двоцифрени број“.

6. Урош не бележи сабирања у којима резултати нису непарни бројеви. Прецртај поља у којима су изрази које је Урош могао забележити.

254 + 47　　391 + 34　　789 + 45

198 + 46　　825 + 67

478 + 82

563 + 25　　653 + 28

Задаци за додатни рад

7. Прецртај поља у којима резултати нису парни бројеви.

789 + 45　　398 + 91　　789 + 37

653 + 78　　278 + 39　　358 + 27

343 + 65　　225 + 65　　456 + 99

8. Жутом бојом обој поља у којима резултати нису већи од 675 и нису мањи од 596.

653 + 28　　567 + 39　　537 + 56　　574 + 57

587 + 98　　569 + 26　　609 + 76　　589 + 91

9. Петар је из шешира извукао паран број пете стотине којем је цифра десетице 4 и који на месту цифре јединице има цифру која није већа од 3 и није мања од 1. Затим је извукао најмањи број треће десетице који није непаран. Те бројеве је сабрао. Који збир је Петар добио?

10. Ако је Мара платила свеску не више од 70 динара и не 70 динара, колика цена свеске није могла да буде?

а) 56　　б) 48　　в) 71　　г) 67　　д) 69

Вежба број 13	
Наставна јединица:	Одузимање двоцифреног од троцифреног броја
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Плавом бојом обој поља у којима резултати нису већи од 625 и нису мањи од 622.

653 – 28 667 – 39 717 – 96 674 – 53

709 – 85 669 – 49 689 – 76 719 – 91

2. Ученици су имали за домаћи задатак да забележе одузимања у којима резултати нису парни бројеви. Прецртај погрешно урађене домаће задатке.

391 – 34 563 – 25 391 – 34 825 – 67 254 – 47

789 – 45 478 – 82 653 – 28 198 – 46

3. Умањеник је број пете стотине којем је цифра десетице пет и који је паран, а умањилац највећи број седме десетице који није непаран. Израчунај разлику. Одреди сва решења.

4. Мица је од броја 897 или броја 675 одузела двоцифрени број који се пише помоћу цифара 5 и 6. Која све одузимања је Мица могла извршити? Запиши те изразе и израчунај њихову вредност.

5. Умањеник је троцифрени паран број којем цифра десетице није парна. Умањилац је број који није непаран. Прецртај поља, међу датим, у којима су изрази који не задовољавају дати услов.

789 – 45 398 – 92 788 – 37

654 – 78 278 – 39 358 – 28

338 – 65 252 – 64 456 – 99

Задаци за додатни рад

6. Међу датим одузимањима треба да остану само одузимања код којих резултати нису парни бројеви. Прецртај картице које треба склонити.

254 – 47	391 – 34	789 – 45
198 – 46	478 – 82	825 – 67
563 – 25		653 – 28

7. Умањеник је број осме стотине којем је цифра десетице пет и који није паран, а умањилац је најмањи број пете десетице који није паран. Израчунај разлику. Одреди сва решења.

8. Прецртај поља у којима резултати нису непарни бројеви.

789 – 45	398 – 91	789 – 37
653 – 78	278 – 39	358 – 27
343 – 65	225 – 65	456 – 99

Вежба број 14	
Наставна јединица:	Сабирање троцифрених бројева облика 359 + 217
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Дечак скаче само по пољима на којима збир није већи од 549. Обој поља по којима дечак неће скакати.

234 + 339 437 + 159 218 + 322 259 + 309 456 + 128

129 + 425 476 + 117 429 + 129 315 + 228

345 + 203 406 + 136 345 + 202 324 + 218

2. Митар посматра два аутомобила на паркингу. Први аутомобил на таблици има паран број пете стотине којем је цифра десетице 4 и који на месту цифре јединице има цифру која није већа од 3 и није мања од 1. Други аутомобил на таблици има највећи број двадесет треће десетице који није паран. Митар је сабрао та два броја. Који збир је Митар добио?

3. Прецртај поља у којима су изрази чија вредност није већа од 865 и није мања од 863.

627 + 235 527 + 337

435 + 428 538 + 326

629 + 235 148 + 718

744 + 118 557 + 309

4. Други сабирак је број 219, а први сабирак је број седме стотине којем је цифра десетице 5 и који није паран. Израчунај збир. Одреди сва решења.

5. У једној игри, девојчице скачу само на поља на којима су сабирања у којима резултати нису парни бројеви. Прецртај поља на која нису могле скочити.

254 + 137

319 + 534

749 + 145

148 + 346

825 + 167

458 + 228

568 + 325

653 + 328

6. Миљана је на табли записала бројеве који имају седам стотина и још 4 десетице и који су парни, а затим је сваком од њих додала број 109. Које збирове је Миљана добила? Одреди сва решења.

Задаци за додатни рад

7. Први сабирак је највећи број двадесет пете десетице који није паран, а други сабирак је најмањи број пете стотине који није непаран. Израчунај збир.

8. Међу датим, прецртај поља у којима су изрази чије вредности нису веће од 752 и нису мање од 735.

527 + 227	428 + 304	625 + 118
438 + 313	605 + 127	
319 + 429	518 + 218	525 + 228
627 + 128	438 + 319	

9. Прецртај поља у којима су изрази чије вредности нису непарни бројеви.

624 + 329	725 + 138	129 + 459
328 + 535	247 + 325	526 + 256
358 + 237	342 + 349	629 + 228
326 + 625	427 + 349	248 + 238

Вежба број 15	
Наставна јединица:	Одузимање троцифрених бројева 562 – 236
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима; Способност извођења закључака на основу уочених веза и односа у задатку; Способност решавања задатка на основу уочених и успостављених релација;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

1. Ако следећи симболи представљају цифре:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
♥	♦	☼	♠	♣	#	*	○	☺	▼

реши следеће одузимање и резултат представи симболима:

#○☼ – ☼♥♠

2. Одреди вредност ☺ ако је ☺ + ☺ + 562 = ☺ + ☺ + ☺ + 236

3. Сок и чоколада коштају укупно 265 динара, а сок и две такве чоколаде коштају 384 динара. Колико кошта сок?

4. У плавој, жутој и црвеној кутији има укупно 562 балона. У жутој и црвеној кутији је укупно 346 балона, а у плавој и жутој су укупно 452 балона. Колико балона се налази у којој кутији?

5. Једна паркинг гаража има укупно 983 паркинг места распоређена на три нивоа. На другом и трећем нивоу је укупно 656 места, а на првом и другом је укупно 644 места. Колико места је на сваком од тих нивоа?

Задаци за додатни рад

6. Сендвич и две исте кифле коштају укупно 164 динара, а сендвич и једна таква кифла коштају укупно 138 динара. Колико кошта сендвич?

7. На три палете има укупно 984 килограма шећера. На првој и трећој палети укупно има 648 килограма шећера, а на другој и трећој палети укупно је 555 килограма шећера. Колико килограма шећера је на свакој палети?

<table>
<tr><td colspan="3">Вежба број 16</td></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Сабирање троцифрених бројева облика 378 + 246</td><td>Тип часа: Утврђивање</td></tr>
<tr><td>Способност логичког мишљења</td><td colspan="2">Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);</td></tr>
<tr><td colspan="3">Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.</td></tr>
</table>

1. Заокружи изразе чија вредност није већа од 584.

245 + 275 329 + 387 198 + 298 356 + 168 378 + 298

2. Први сабирак је број који на месту стотине има цифру два и који је паран, а други сабирак је број који је непаран и којем је цифра десетице 2 или 4. Прецртај изразе који не задовољавају дати услов.

245 + 349 368 + 643 288 + 623 294 + 449

268 + 343 459 + 521 386 + 246

3. Исидора је броју пете стотине којем је цифра десетице два и који је паран додала највећи број друге стотине који није паран. Одреди све збирове које је Исидора могла добити.

4. Мирослав је броју 455 желео да дода број којем је цифра десетице 7 и који је паран и припада четвртој стотини. Увидео је да има више решења. Пронађи све збирове које је Мирослав добио.

5. Бојан је рекао Марку да броју из шесте стотине којем је цифра десетице шест и који није непаран дода број из треће стотине који на месту цифре десетице има цифру четири или шест и који је непаран. Прецртај изразе које је Марко погрешно записао.

568 + 263 569 + 249 562 + 345

565 + 245 564 + 249

568 + 221 668 + 247 566 – 248

Задаци за додатни рад

6. Богдан је записо највећи број треће стотине који није паран. Мама му је рекла да том броју дода број пете стотине који на месту десетице има цифру 3 и који је паран. Одреди све збирове које је Богдан добио.

7. Први сабирак је број осме стотине који на месту цифре десетице има цифру пет и који није паран, а други сабирак је највећи број друге стотине који није паран. Израчунај збир. Одреди сва решења.

8. Који збирови се могу добити када броју седме стотине којем је цифра десетице 8 и који није паран додаш број 274? Одреди сва решења.

Вежба број 17	
Наставна јединица:	Одузимање троцифрених бројева 532 – 276
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Међу датим одузимањима, заокружи одузимања код којих је умањеник број из пете или седме стотине, а разлика није већа од 234.

432 – 268 648 – 389 634 – 386 621 – 399 454 – 268 425 – 156

2. Заокружи изразе чија вредност није већа и није мања од 367.

958 – 591 845 – 567 763 – 398 826 – 459 934 – 567

3. Умањеник је број седме стотине којем је цифра десетице 4 и који није паран, а умањилац је број 274. Израчунај разлику. Одреди сва решења.

4. Прецртај одузимања код којих резултат није непаран.

341 – 164 523 – 257 331 – 134 825 – 267 254 – 147

724 – 345 478 – 289 653 – 285 466 – 198

5. Славиша је желео да од броја осме стотине којем је цифра десетице пет и који није паран одузме број 299. Увидео је да може записати више израза. Напиши изразе које је Славиша могао записати и израчунај њихову вредност.

6. Мица је од броја 821 или броја 921 одузела троцифрени број који се пише помоћу цифара 4, 5 и 6, при чему се цифре не могу понављати. Запиши која све одузимања је Мица могла извршити и израчунај њихову вредност.

Задаци за додатни рад

7. Умањилац је број 155, а умањеник број којем је цифра десетице 3 и који је паран и припада четвртој стотини. Израчунај разлику. Одреди сва решења.

8. Умањеник је број пете стотине којем је цифра десетице пет и који је паран, а умањилац највећи број друге стотине који није паран. Израчунај разлику. Одреди сва решења.

9. Прецртај поља у којима резултати нису непарни бројеви.

854 – 477 727 – 458

931 – 349

945 – 468 825 – 677

478 – 189

563 – 287 653 – 288

Вежба број 18	
Наставна јединица:	Зависност збира и разлике
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања правила на конкретним примерима; Способност примене правила при решавању задатака;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Ако је $a + b = 475$, израчунај:

$(a + 123) + (b + 234) =$ ________________________________

$(a + 508) + (b - 354) =$ ________________________________

2. Ако је $a - b = 450$, израчунај:

$(a + 123) - (b + 234) =$ ________________________________

$(a + 273) - (b - 254) =$ ________________________________

3. Ако је $a + b = 359$, упиши шта недостаје:

$(a + 54) + (b -$ ____$) = 254$

$(a - 123) + (b -$ ____$) = 111$

4. Ако је $a - b = 450$, упиши шта недостаје:

$(a - 125) - (b +$ ____$) = 200$

$(a +$ ____$) - (b - 126) = 798$

5. Када се умањеник умањи за 540, а умањилац умањи за 158, како се и за колико промени разлика?

Задаци за додатни рад

6. Ако се умањеник повећа за 652, а умањилац повећа за 352, како се и за колико промени разлика?

7. Ако се умањеник смањи за 432, а умањилац повећа за 324, како се и за колико промени разлика?

8. Ако се умањеник повећа за 326, а умањилац смањи за 326, како се и за колико промени разлика?

Вежба број 19	
Наставна јединица:	Мерење дужине и мерење времена
Тип часа:	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених, успостављених релација;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Упореди:

65 dm 25 cm 37 mm ◯ 65 dm 26 cm 27 mm

2. Израчунај:

1000 mm – ______ cm = 56 cm

1000 mm – _____ dm _____cm = 2 dm 6 cm

30 mm + 27 cm + ____ dm = 1000 mm

130 mm + _____ cm + 3 dm = 1 m

3. Пуж је за три сата прешао пут од 27 m. Током првог сата прешао је 86 dm. Током другог сата је прешао 6 dm дужи пут него током првог сата. Колики је пут прешао трећег сата?

4. Неда посматра две траке. Када их састави, њихова укупна дужина је 6 m 54 cm. Када их упореди, утврди да је друга трака дужа од прве за 54 cm. Колико износе дужине тих трака?

5. Цртани филм који Сташа гледа почео је у 14 часова и 35 минута. Колико је трајао тај цртани филм, ако се завршио у 16 часова и 25 минута и ако знаш да је за време емитовања цртаног филма емитован и један блок реклама у трајању од 7 минута?

6. Одреди дужину пута од куће до школе, ако знаш да се кућа, продавница, пекара и школа налазе редом у истој правој улици и да је растојање од продавнице до школе 600 метара, од куће до пекаре 800 метара, а од продавнице до пекаре 400 метара.

Задаци за додатни рад

7. Аутомобил путује брзином од 80 km на сат. Колико ће растојање прећи за 30 минута?

8. Маша је отишла у кревет увече у 21:45 h. Колико дуго је спавала, ако знаш да је устала у 7:20h?

9. Влада је отишао на тренинг који је почео у 15 часова и 20 минута. Колико је трајао Владин тренинг ако је завршен пре 1 часа и 20 минута и ако знаш да је сада тачно 18 часова и 15 минута?

Вежба број 20	
Наставна јединица:	Мерење масе
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, као и коришћење нових идеја; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност и оригиналност у мишљењу;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

1. На једној страни ваге у равнотежи је тег од једног килограма, а на другој тег од 500 грама и два тега по 100 грама и 1 врећа шећера. Колика је маса вреће шећера?

2. Једна цигла има масу 4 килограма и још пола цигле. Колика је маса 3 такве цигле?

3. Мачка и једно маче су тешки колико 5 таквих мачића. Колико пута је мачка тежа од мачета?

4. Маса 5 јабука и тега од 100 грама је једнака маси два тега од 200 грама и још маси четири јабуке. Колика је маса јабуке?

5. Ананас је тежак колико једна велика јабука и две исте поморанџе. Ананас и таква поморанџа су тешки колико две велике јабуке. Колико пута је ананас тежи од поморанџе?

Задаци за додатни рад

6. Маса бундеве је 6 килограма и још половина бундеве. Колика је маса бундеве?

7. Како ћеш помоћу теразија, једног тега од 250 грама и шећера одмерити из џака 1 kg 500 g шећера? Имаш право на три мерења.

8. На левој страни ваге се налазе 4 тега од 250 грама, а на другој десној један велики тег. Када се са леве стране премести један тег на десну страну ваге, вага ће бити у равнотежи. Одреди масу великог тега.

Вежба број 21	
Наставна јединица:	Мерење запремине течности
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку, као и коришћење нових идеја; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

1. Имате судове од 4 литра и 5 литара. Користећи искључиво њих, донесите са чесме тачно 2 литра воде.

2. Млекарица Мара треба да одмери 7 литара млека, а има канте од 5 литара и 8 литара. Помози јој како да одмери млеко.

3. У једној флаши се налази 700 ml сока, а у другој пола литра. Колико сока треба пресути из прве у другу флашу па да у обе флаше буде иста количина сока?

4. У флашу од 1 l Мирко је сипао 6 dl сока. Колико ће сока бити у флаши ако се доспе још 6 dl сока?

5. Деда Раде има три бурета у којима је вино. У првом бурету је 1 hl 30 l вина, у другом за 20 l више него у првом, а у трећем за 40 l мање него у другом. Колико литара и из ког бурета у које буре треба да преспе да у сваком бурету буде једнака количина вина?

6. У једну велику и три мале чаше стаје иста количина течности као у једну малу и две велике чаше. Колико пута више течности стаје у велику чашу у односу на малу?

Задаци за додатни рад

7. Имате судове од 8 литара и 6 литара. Како, користећи искључиво њих, одмерити тачно 10 литара течности?

8. У једну велику и три мале чаше стаје иста количина течности као у једну малу и две велике чаше. Колико dl течности стаје у велику чашу, ако се зна да у малу стаје 2 dl течности?

Вежба број 22			
Наставна јединица:	Множење и дељење збира и разлике бројем	**Тип часа:**	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака;		

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Допуни користећи правило множења збира бројем.

(100 + 20) · 4 = ______ · ______ + ______ · ______

(_____ + 30) · ______ = 140 · ______ + ______ · 4
(50 + ____) · 3 = ______ · ______ + 27 · _______
(______ + ______) · 4 = 14 · ______ + 120 · _______

2. Одреди без рачунања вредност непознатог броја.

(300 + p) · 2 = 300 · 2 + 100 · 2

(m + 127) · 4 = 127 · 4 + 127 · 4

(126 + 26) · x = 126 · 5 + 26 · 5

3. Допуни користећи правило множења разлике бројем.

(_____– 50) · _____ = 150 · 3 – _____ · 3
(326 – _____) · ______ = ______· 3 – 120 · _____
(_____– _____) · 8 = 109 · _____ – 9 · _____

4. Допуни користећи правило дељења збира бројем.

(68 + ____) : 2 = _____ : _____ + 12 : _____
(____ + ____) : 3 = 27 : _____ + 96 : _____
(100 + _____) : ____ = _____ : 5 + 25 : _____
(_____ + _____) : _____ = 500 : 50 + 100: 50

5. Допуни користећи правило дељења разлике бројем.

(_____– _____) : 4 = 124 : ______ – 24 : _____
(65 – _____) : _____ = _____ : 5 – 25 : ______
(_____– _____) : ______ = 200 : 4 – 100 : _____

Задаци за додатни рад

6. Израчунај на два начина, користећи множење збира и множење разлике бројем.

89 · 6 = (____ + ____) · ____ = ____

89 · 6 = (____– ____) · ____ = ____

71 · 4 = (____ + ____) · ____ = ____

71 · 4 = (____– ____) · ____ = ____

7. Израчунај на два начина, користећи дељење збира и дељење разлике бројем.

126 : 6 = (____ + ____) : ____ = ____

126 : 6 = (____– ____) : ____ = ____

Вежба број 23	
Наставна јединица:	Дељење троцифреног броја једноцифреним
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања правила и законитости; Способност закључивања на основу уочених правила;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Запиши још два члана следећег низа:

720, 360, 120, 30, _____, _____.

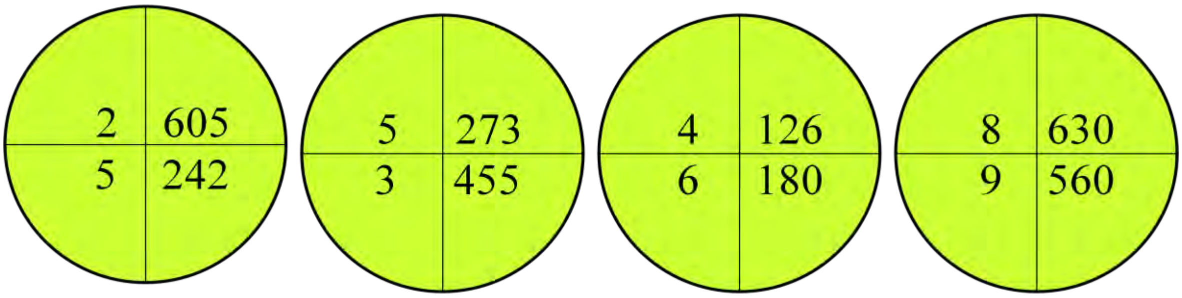
2. Запиши следећи члан низа.

855, 285, 270, 90, 75, 25, _____.

3. Знајући да је ☺ + ☺ + 458 = ☺ + ☺ + ☺ + ☺, одреди колико је ☺.

4. Који круг је сувишан?

На слици су 4 круга са бројевима уписаним унутар њих. Испитај како се мења распоред бројева унутар сваког круга и пронађи и прецртај круг у којем бројеви нису написани по истом правилу као у осталим круговима.



5. Попуни празна поља.

:	2	4	6
			48
		144	
	96		
			64

Задаци за додатни рад

6. Запиши следећи члан низа.

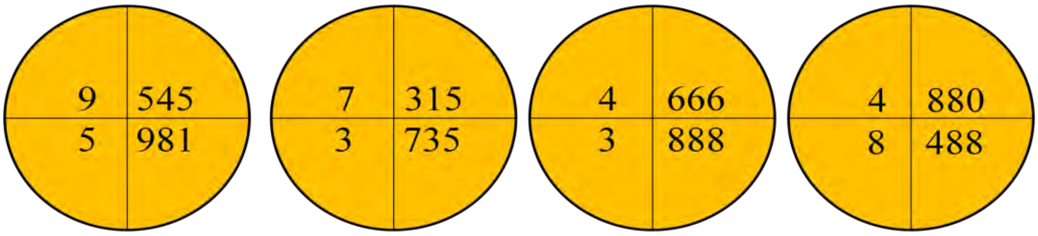
1000, 250, 500, 504, 126, 252, 256, 64, 128, 132, ___.

7. Попуни празна поља.

·	2	8	6	5
	242			
		856		
				525

8. Који круг је сувишан?

На слици су 4 круга са бројевима уписаним унутар њих. Испитај како се мења распоред бројева унутар сваког круга и пронађи и прецртај круг у којем бројеви нису написани по истом правилу као у осталим круговима.



<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 24</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Дељење троцифреног броја једноцифреним</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>Вежбање</td></tr>
<tr><td>Способност логичког мишљења</td><td>Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених, успостављених релација;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Аутобус је из Ваљева кренуо за Херцег Нови. Прешао је 424 километра. Путовао је 8 часова. Којом просечном брзином се аутобус кретао на том путу?

2. Пекар је спремао 997 пецива. Крофни је спремио дупло више него кифли, ђеврека колико кифли и крофни укупно, а паштетица за 25 више од ђеврека. Колико је ког пецива спремио пекар?

3. Веверица за зиму сакупља лешнике, орахе и жирове. Сакупила је два лешника мање од ораха, а два жира више од ораха. Колико је чега сакупила, ако је укупно сакупила 408 лешника, ораха и жирова?

4. Деда Јанко гаји кокошке и козе. Колико он има кокошака, а колико коза, ако његове животиње укупно имају 110 ногу и 40 глава?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задаци за додатни рад</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. На три палете је укупно 784 килограма соје. На првој палети је два пута више килограма соје него на другој, а на трећој два пута више килограма соје него на првој палети. Колико килограма соје је на свакој палети?

6. На путу до баке Црвенкапа је набрала разно цвеће за баку. Убрала је три пута више љубичица него белих рада, а белих рада 2 пута мање него јагорчевина. Укупно има 108 цветова. Колико је којих цветова убрала за баку?</td></tr>
</table>

Вежба број 25	
Наставна јединица:	Зависност производа и количника
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака; Способност закључивања на основу уочених правила;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

1. Ако је $a : b = 268$, чему је једнако $(a \cdot 3) : (b \cdot 3)$?

2. Ако је први чинилац увећан 3 пута, како треба променити други чинилац да би производ остао непромењен?

3. Ако је дељеник повећан 6 пута, како треба променити делилац да би количник остао непромењен?

4. Ако је први чинилац повећан два пута, како треба променити други чинилац да би се производ увећао 6 пута?

5. Ако је дељеник умањен 10 пута, како треба променити делилац да би се количник умањио два пута?

Задаци за додатни рад

6. Ако је $a \cdot b = 146$, израчунај:

$(a \cdot 2) \cdot (b \cdot 2) =$ ______________________________

$(a \cdot 4) \cdot (b : 2) =$ ______________________________

7. Ако је $a : b = 102$, израчунај:

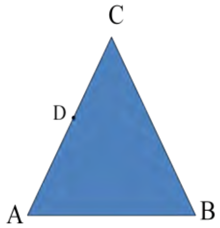
$(a \cdot 2) : (b : 4) =$ ______________________________

$(a \cdot 3) : (b : 3) =$ ______________________________

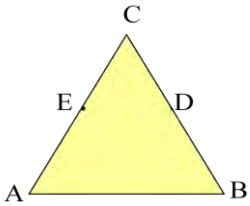
Вежба број 26	
Наставна јединица:	Дуж, квадрат, правоугаоник, троугао
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања скривених (удаљених) елемената у задатку; Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

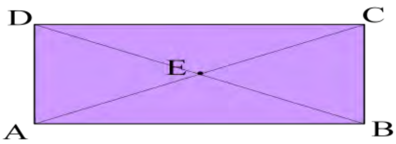
1. Колико дужи је дато на слици? Запиши их.



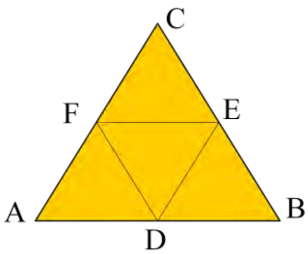
2. Колико дужи је дато на слици? Запиши их.



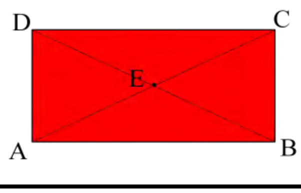
3. Колико дужи је дато на слици? Запиши их.



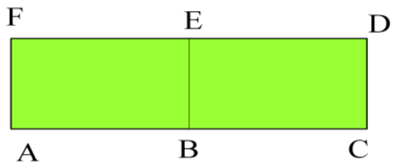
4. Колико троуглова је дато на слици? Запиши их.



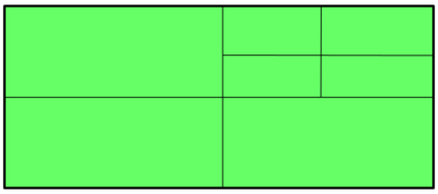
5. Колико троуглова је дато на слици? Запиши их.



6. Колико правоугаоника је дато на слици? Запиши их.

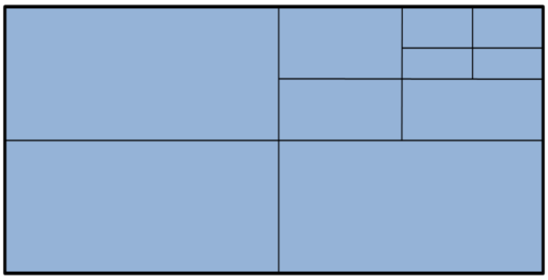


7. Колико правоугаоника је дато на слици?



Задаци за додатни рад

8. Колико четвороуглова је дато на слици?



Вежба број 27	
Наставна јединица:	Неједначине
Тип часа:	Обрада
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Како читамо запис $201 < X < 701$? Заокружи слово испред тачне реченице.

а) X је веће од 201 и X је веће од 701

б) X је веће од 201 и X је мање од 701

в) X је мање од 201 и X је мање од 701

г) X је мање од 201 и X је веће од 701

2. $121 < X \leq 734$

Допуни реченицу:

X је _________ од 121 и X је __________ од 734 __________ једнако __________.

3. Како читамо запис $651 < x \leq 1000$? Доврши реченицу.

X је ____.

4. Петар нема мање од 155 сличица и нема 155 сличица, али нема ни више од 160 сличица, као ни тачно 160. Колико сличица може да има Петар? Запиши неједнакост и допуни одговор.

Неједнакост: ________________________

Петар може да има: ____

5. Ната каже својој другарици: „Ја имам више од 156 сличица у албуму и не више од 200. Шта мислиш колико сличица могу имати?“ Постави неједначину и одреди скуп решења.

6. Одреди решења неједначине ако је $x < 518$ и $x > 500$ и x је паран број.

Задаци за додатни рад

7. Бранка има 198 сличица, а Невена 204 сличице. Јасна нема више сличица од Невене, а нема ни мање од Бранке. Помоћу неједнакости запиши Јаснин број сличица, ако знаш још и да нема ни једнак број сличица као Бранка и Невена. Колико сличица може да има Јасна?

Неједнакост: ____

Одговор: ____

8. Одреди решења неједначине ако је $x \geq 345$ и ≤ 357 и x није паран број.

9. Две веверице Цица и Јеца живе у истој шуми у којој живе и зечеви Раша и Гаша. Цица се дружи са оба зеца. Јеца се дружи само са Рашом, док се са Гашом не слаже и не дружи. Заокружи слово испред тврђења које је нетачно.

а) Обе веверице се друже бар са једним зецом.
б) Постоји зец са којим се не дружи ниједна веверица.
в) Постоји зец са којим се друже обе веверице.
г) Са сваким зецом се дружи бар једна веверица.
д) Постоји веверица која се дружи са оба зеца.

Вежба број 28	
Наставна јединица:	Неједначине
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност разумевања значења и коришћења термина (и, или, не);

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Које цифре могу да стоје уместо звездице да би неједнакост била тачна?

$$*25 > 425$$

Уместо звездице може да стоји цифра ___ или цифра ____ или цифра ___ или цифра ___ или цифра ____.

2. Напиши како читамо неједнакост.

$$300 > x \geq 234$$

3. Марко у џепу нема више од 15 кликера. Колико кликера Марко може имати у џепу?

4. Напиши пет решења неједначине $368 < x < 458$.

5. Напиши неједнакост према датој реченици.

X је веће или једнако од 265 и x је мање од 364.

____

6. Запиши неједнакост према датом тексту, тако што ћеш број Маркових сличица означити са *x*. Након тога реши неједначину.

Марко има више сличица од Владе, а мање од Бојана. Колико сличица може да има Марко, ако знаш да Влада има 194 сличице, а Бојан 205 сличица?

7. Сања каже другарици: „Имам више од 165 сличица, али немам више од 176 сличица.“ Колико сличица има Сања? Напиши неједнакост и допуни одговор.

Неједнакост: ____

Сања може да има:____

Задаци за додатни рад

8. На тезги деда Миле продаје брескве, кајсије, јабуке и крушке. Брескви нема најмање и нема их мање од кајсија. Крушака није више од јабука и није мање од брескви. Чега деда Миле има највише на тезги?

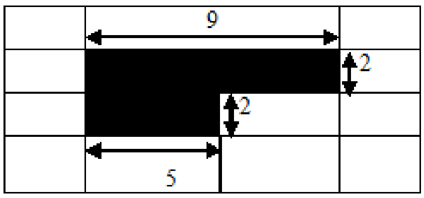
9. Мира има мање од 148 сличица, али нема мање од 140 сличица. Колико сличица може да има Мира? Напиши неједнакост и одреди скуп решења.

10. Мирко каже другу Марку: „У кеси су ми кликери. Када из кесе извадим 12 кликера, остаје ми мање од 45, али не мање од 38.“ Колико кликера се могло налазити у Мирковој кеси пре него што је извадио тих 12 кликера?

Вежба број 29			
Наставна јединица:	Обим правоугаоника и квадрата	**Тип часа:**	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима, извођење закључака на основу уочених веза и односа у задатку и решавање задатка на основу уочених и успостављених релација;		

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

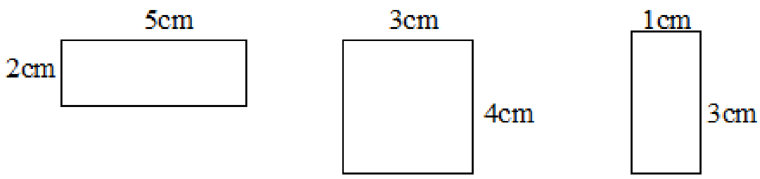
1. Израчунај обим црне фигуре са слике. Подаци су дати у cm.



2. Мирко је направио модел квадрата од жице. Ако је имао 33 cm жице, да ли му је остало жице? Образложи свој одговор.

3. Башту облика правоугаоника треба оградити жицом у три реда. Колико је жице потребно, ако је дужина баште 9 метара, а за ограђивање ширине баште у три реда потроши се 18 метара жице?

4. Да ли се од правоугаоника са слике може саставити квадрат?

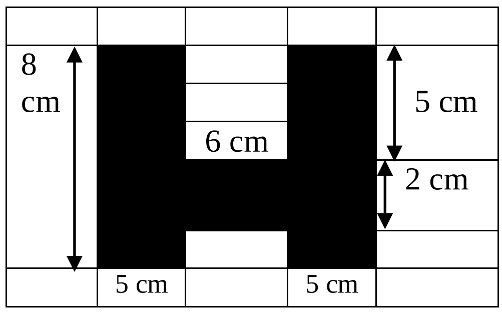


5. Израчунај дужину странице квадрата који има исти обим као правоугаоник чије су странице a = 12 cm, b = 1 dm.

6. Обим правоугаоника је 100 dm. Колико износе дужине страница тог правоугаоника, ако је страница a четири пута дужа од странице b?

Задаци за додатни рад

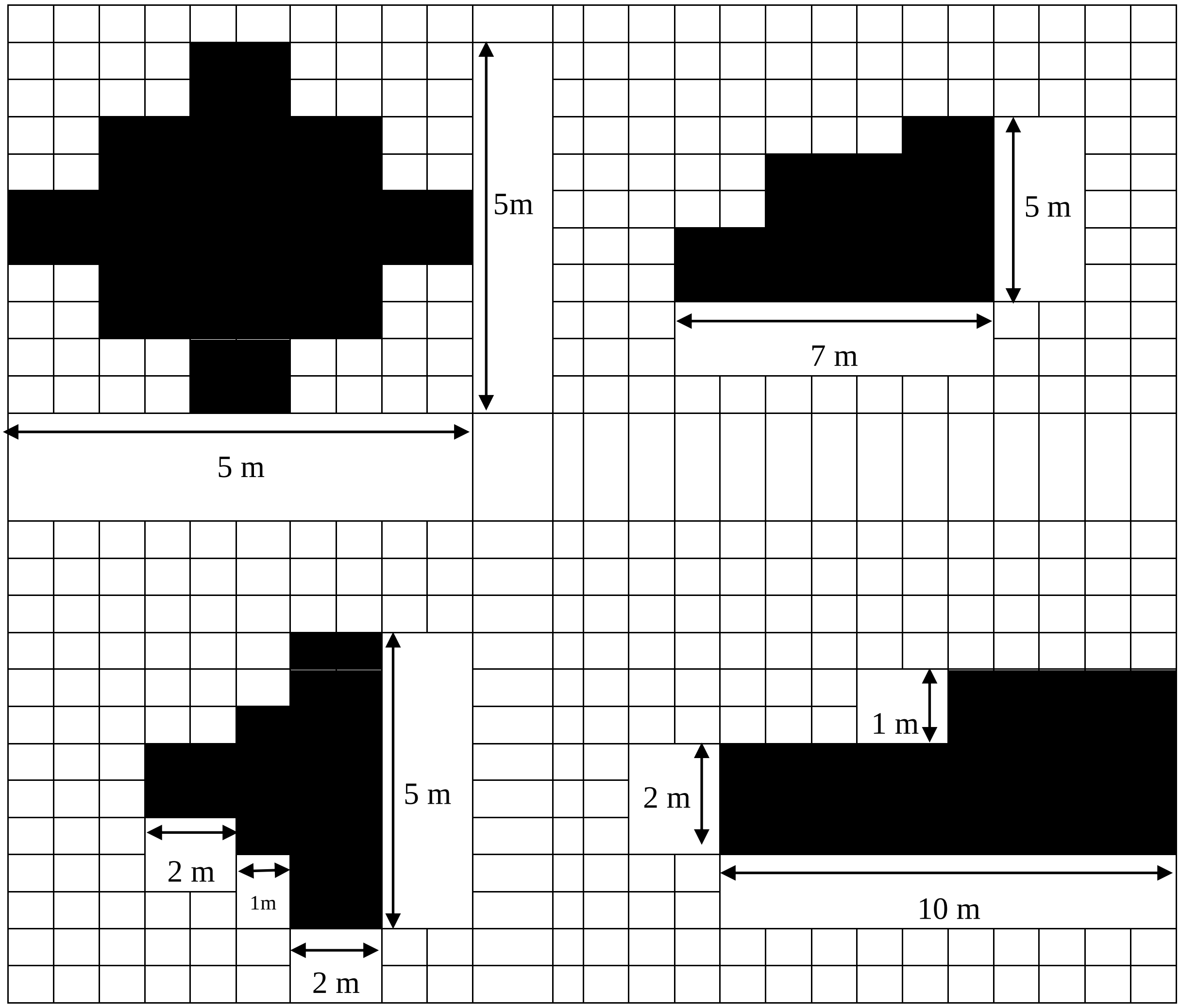
7. Израчунај обим фигуре са слике.



8. Влада је од жице дужине 39 cm направио рам облика правоугаоника чија је дужина 10 cm. Колика је ширина, ако знаш да је Влади остао 1 cm жице?

9. Обим правоугаоника је 54 cm. Колике су дужине страница *a* и *b*, ако је страница *a* за 5 cm дужа од странице *b*?

10. Марко има 24 m жице. Који од облика он не може да направи?



Вежба број 30	
Наставна јединица:	Разломци
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу; Способност коришћења података на нов (другачији) начин;
Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.	

1. Половину дате траке обој плавом бојом, а четвртину црвеном.

2. Никола је прочитао трећину страна једне књиге. Остало му је да прочита још 320 страна. Колико страна има та књига?

3. Влада, Бранко и Мирко деле кликере. Влада је добио половину укупног броја кликера, Бранко четвртину укупног броја кликера, а Мирко преосталих 15 кликера. Колико кликера имају укупно?

4. Мира је купила траку. Половину траке је дала сестри, а половину преосталог дела искористила је за прављење машне на поклону и остало јој је 78 cm. Колика је била дужина Мирине траке?

5. Милка је од своје уштеђевине трећину дала брату, а шестину уштеђевине потрошила у продавници и њој је остало 450 динара. Колика је била Милкина уштеђевина?

Задаци за додатни рад

6. Бака дели бомбоне својим унучићима. Мира је добила четвртину укупног броја бомбона, а Мара половину укупног броја бомбона. Унук Ница је добио преосталих 13 бомбона. Колико бомбона је бака поделила унучићима?

7. Деда Миле на тезги има јабуке, крушке и брескве. Јабуке чине половину његових воћки, брескве четвртину његових воћки, а крушака је 35 килограма. Колико укупно килограма воћа има деда Миле на тезги?

8. У повртњаку деда Митар гаји паприке, парадајз и краставац. Паприке чине половину његовог поврћа, а парадајз шестину укупног броја садница. Краставаца је 60 струка. Колико ког поврћа деда Митар гаји у повртњаку?

Вежба број 31	
Наставна јединица:	Разломци
Тип часа:	Утврђивање
Способност логичког мишљења	Способност решавања задатака уз оштроумност и досетљивост, као и флексибилност у мишљењу; Способност коришћења података на нов (другачији) начин;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Марко је прешао трећину пута. Остало му је да пређе још 450 метара. Колика је дужина целог пута?

2. Марко је дао другу Аци половину својих кликера, а брату Срђану четвртину својих кликера. Њему је остало 16 кликера. Колико је кликера Марко имао на почетку?

3. Мина, Нина и Нена деле јагоде. Мина је добила половину јагода, Нина четвртину укупног броја јагода, а Нена 12 јагода. Колико јагода имају укупно?

4. Веверица је сакупила лешнике. Првог дана је појела половину сакупљених лешника, другог дана половину преосталих, а трећег половину преосталих након другог дана. Колико је лешника сакупила, ако јој је остало 6 лешника?

5. Влада је првог дана прочитао трећину књиге, другог дана за 5 страна више него првог, а трећег преосталих 25 страна књиге. Израчунај колико страна има књига коју Влада чита.

Задаци за додатни рад

6. Када се четвртини неког броја додају његова половина и његова четвртина добије се број 100. О ком броју је реч?

7. Збир половине, трећине и шестине неког броја износи 24. Који је то број?

8. Збир половине, четвртине и осмине неког броја износи 28. Који је то број?

Вежба број 32	
Наставна јединица:	Задаци за вежбање
Тип часа:	Вежбање
Способност логичког мишљења	Способност уочавања и примене правила при решавању задатака; Способност закључивања на основу уочених правила;

Напомена: У вежби су дати само задаци који су представљали експериментални програм. Вежба није сценарио за час. Задаци који су представљали експериментални програм, с обзиром на тежину и усмереност на операционализацијом издвојену способност логичког мишљења, реализовани су у једном делу часа. Предвиђени су и дати и задаци које су ученици добијали за додатни рад код куће.

1. Упиши следећа четири члана низа.

0, 2, 6, 12, 20, ______________________________________

2. Упиши следећа три члана низа.

950, 900, 800, 750, 650, 600, 500, 450, 350, ________________.

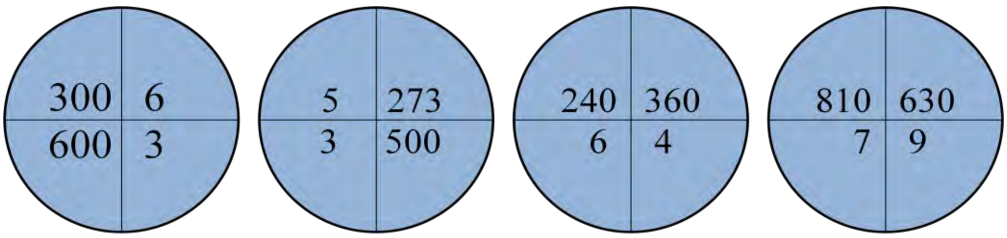
3. Упиши следећа два члана низа.

100, 200, 150, 300, 250, 500, 450, ____, ____.

4. Упиши следећи члан низа.

20, 80, 40, 160, 80, 320, 160, 640, ____.

5. На слици су 4 круга са бројевима уписаним унутар њих. Испитај како се мења распоред бројева унутар сваког круга и пронађи и прецртај круг у којем бројеви нису написани по истом правилу као у осталим круговима.



Задаци за додатни рад

6. Упиши следећих пет чланова низа.

5, 10, 11, 22, 23, 46, 47, ____________________________

7. Упиши следећи члан низа.

5, 25, 30, 150, 155, 775, ____.

ПРИЛОГ 5. *Анкетни упитник за ученике (први)*

Упутство за попуњавање

Пажљиво прочитај питање и искрено одговори.

Изношењем мишљења у овом упитнику помажеш у истраживању. Одговоре задржавамо у тајности.

Хвала на сарадњи!

Име и презиме: ____

Разред: _________________ Одељење: ______________________

Школа: ____

1. Који је твој омиљени предмет у школи? Заокружи слово испред одговора.

   а) Српски језик

   б) Математика

   в) Природа и друштво

   г) Ликовна култура

   д) Музичка култура

   ђ) Физичко васпитање

   е) Изборни предмет

ПРИЛОГ 6. *Анкетни упитник за ученике експерименталне групе (други)*

Упутство за попуњавање

У наредном тексту су питања која се односе на часове математике које си имао/ла у претходном периоду (које је реализовао експериментатор).

Пажљиво прочитај свако питање и искрено одговори заокруживањем једног одговора. Код питања код којих нису понуђени одговори, одговоре упиши на црту поред или испод питања.

Износењем мишљења у овом упитнику помажеш у истраживању. Одговоре задржавамо у тајности.

Хвала на сарадњи!

Име и презиме: ____

Разред: ________________ Одељење: _____________________

Школа: ____

1. Часови математике које смо имали у претходном периоду са експериментатором били су ми:

Заокружи слово испред одговора.

а) веома интересантни
б) интересантни
в) неодлучан сам
г) досадни
д) веома досадни

2. Да ли волиш да решаваш задатке које је на претходним часовима реализовао експериментатор? Заокружи свој одговор.

Да   Неодлучан сам   Не

3. Бројевима од 1 до 5 рангирај (поређај) шта ти се на претходним часовима математике које је држао експериментатор највише допало, тако што ћеш на прво место ставити оно што ти се највише допало уписивањем броја један на црту испред и тако редом.
(1 – највише; 5 – најмање)

______ задаци које смо добијали су веома занимљиви

______ схватио/ла сам да је математика занимљивија него што сам раније мислио/ла

______ схватио/ла сам да је математика много корисна

______ стално смо били активни

______ научио/ла сам да више мислим при решавању математичких задатака

4. Да ли би желео/ла још часова на којима се решавају задаци које сте на претходним часовима решавали са експериментатором? Заокружи одговор.

Да Неодлучан сам Не

5. Који је твој омиљени предмет у школи? Заокружи слово испред одговора.

а) Српски језик

б) Математика

в) Природа и друштво

г) Ликовна култура

д) Музичка култура

ђ) Физичко васпитање

е) Изборни предмет

6. Шта ти се допало на претходним часовима које је реализовао експериментатор?

___

___

7. Шта ти се није допало на претходним часовима које је реализовао експериментатор?

___

___

ПРИЛОГ 7. *Анкетни упитник за учитеље*

Анкетни упитник за учитеље

Упутство

Поштовани учитељи,

У наредном тексту су питања која се односе на могућности подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике. Анкетирање је анонимно. Резултате које добијемо овим упитником користићемо искључиво у научне сврхе. Молимо Вас да пажљиво прочитате свако питање и искрено одговорите. На питања ћете одговарати заокруживањем слова испред става који представља Ваше мишљење или уношењем редног броја којим ћете одређивати важност наведеног. Код питања код којих нису понуђени одговори, одговоре упишите на црту поред питања.

Изношењем Вашег мишљења у овом упитнику допринећете расветљавању проблема везаних за могућности подстицања и развијања логичког мишљења ученика у почетној настави математике.

Како бисмо Вам олакшали попуњавање анкете, издвојили смо дефиниције основних појмова:

- *критичко мишљење* - врста мишљења која се састоји у свестраној анализи, критичком проверавању чињеница, хипотеза и других података који се усвајају;

- *стваралачко мишљење* - разне врсте активности у процесу учења које карактерише самостално уочавање, изналажење и конструисање нових и оригиналних путева за решавање постављених задатака и проблема;

- *логичко мишљење* - способност појединца да користи логичке операције и специфичне мисаоне операције: анализу, синтезу, апстракцију, генерализацију, конкретизацију, специјализацију, упоређивање, као и индуктивно и дедуктивно закључивање, закључивање по аналогији и интуицију;

- *апстрактно мишљење* - облик мишљења у коме се као компоненте којима се решава проблем користе симболи и апстрактни појмови.

Хвала на сарадњи!

Назив школе: ____

Место: ____________________________

Разред: ____________________________

Године радног искуства:______________

Пол: а) мушки б) женски

Стручна спрема:

а) виша школа б) факултет в) мастер д) докторат

1. У којој мери, према Вашем мишљењу, уџбеник математике својим садржајима и концепцијом утиче на развијање логичког мишљења ученика? а) утиче у великој мери б) углавном утиче в) неодлучан сам г) углавном не утиче д) уопште не утиче
2. У којој мери, према Вашем мишљењу, уџбеник математике садржи задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика? а) садржи у великој мери б) углавном садржи в) неодлучан сам г) углавном не садржи д) уопште не садржи
3. Колико често Ви постављате задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике? а) веома често б) често в) просечно г) ретко д) веома ретко
4. У ком делу часа најчешће примењујете задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика? а) у уводном делу часа б) у главном делу часа (неком његовом делу) в) у завршном делу часа
5. Када најчешће примењујете задатке који утичу на развијање логичког мишљења ученика? а) на часовима обраде б) на часовима утврђивања, вежбања или систематизације
6. Коју врсту математичког мишљења највише подстиче почетна настава математике, односно њена организација? (Рангирајте их редним бројевима од 1 до 4; 1 – највише; 4 – најмање) _______ логичко мишљење _______ критичко мишљење _______ стваралачко мишљење _______ апстрактно мишљење
7. У којој мери, према Вашем мишљењу, почетна настава математике и математички задаци утичу на развијање логичког мишљења? а) утичу у великој мери б) углавном утичу в) неодлучан сам г) углавном не утичу д) уопште не утичу

8. Коју компоненту логичког мишљења највише подстичете задацима у почетној настави математике? а) способност закључивања б) логичке операције (конјункција, дисјункција, негација, импликација, еквиваленција, као и разумевање значења и коришћења термина) в) мисаоне поступке (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, конкретизација, специјализација) г) све компоненте подједнако
9. Која врста математичког образовања је најпогоднија за примену задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика? а) редовни часови математике б) додатна настава в) ваннаставне математичке активности г) математичке секције
10. Редним бројевима од 1 до 5 означите шта је то што, према Вашем мишљењу, може допринети Вашем утицају на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике (1 – највише доприноси; 5 – најмање). ___ стручно усавршавање ___ израда упутстава ___ јасније дефинисање појмова *логичко мишљење* и *задаци који утичу на развијање логичког мишљења* ___ погоднији уџбеници који ће садржати довољан број задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ___ нешто друго: ____
11. Редним бројевима од 1 до 6 означите шта, према Вашем мишљењу, представља највећи проблем у Вашем утицају на развијање логичког мишљења ученика у почетној настави математике (1 – највећи; 6 – најмањи). ____ уџбеник ____ нејасно одређени појмови *логичко мишљење* и *задаци којима је циљ развијање логичког мишљења ученика* ____ број ученика у одељењу ____ недостатак времена ____ преобимно градиво ____ нешто друго: ____

ПРИЛОГ 7а. *Скала за учитеље*

Скала судова

Упутство за попуњавање

У скали су изнета нека тврђења о заступљености задатака којима је циљ развијање логичког мишљења ученика. Потребно је да Ваш степен слагања са изнетим тврђењем изразите заокруживањем једног од уписаних слова (од А до Е).

Тврдња	Потпуно се слажем	Углавном се слажем	Неодлучан сам	Углавном се не слажем	Уопште се не слажем
1. У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају да разуме значење термина *и, или, не* како би разумео дате податке у задатку и користио их на прави начин.	А	Б	Ц	Д	Е
2. У почетној настави математике има задатака код којих су питања дата у форми негације, па се од ученика захтева да податке сагледа из супротног угла - разумевање негације.	А	Б	Ц	Д	Е
3. У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају способност уочавања узрочно-последичних веза и односа међу елементима и извођење закључака на основу уочених веза и односа.	А	Б	Ц	Д	Е
4. Задаци у почетној настави математике често од ученика захтевају да сам успоставља релације међу елементима у задатку јер оне нису експлицитно дате.	А	Б	Ц	Д	Е
5. У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају да сам открива правила која постоје међу елементима у задатку и да их примењује.	А	Б	Ц	Д	Е
6. У почетној настави математике ученик је често у прилици да сам открива законитости и на основу њих сам долази до закључака.	А	Б	Ц	Д	Е
7. У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају откривање скривених елемената у задатку.	А	Б	Ц	Д	Е
8. У почетној настави математике има задатака који од ученика захтевају оштроумност и досетљивост.	А	Б	Ц	Д	Е

Хвала на сарадњи!

Биографија

Ивана Јовановић је рођена 25. јула 1983. године у Ваљеву у Републици Србији. Средњу медицинску школу „Др Миша Пантић" завршила је у Ваљеву као ђак генерације и носилац Вукове дипломе. Учитељски факултет у Ужицу, Универзитета у Крагујевцу, завршила је 2007. године. Мастер академске студије завршила је 2010. године на Учитељском факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу са просечном оценом 9,67 (девет и 67/100) одбранивши рад на тему *Проблемска настава и развијање стваралачког мишљења ученика у почетној настави математике*. Школске 2011/12. године уписала је докторске академске студије на Учитељском факултету у Ужицу, на смеру *доктор наука – методика разредне наставе*.

Ивана Јовановић је почела свој професионални ангажман 2013. године у Основној школи „Свети Сава" у Ваљеву у којој је и тренутно запослена као учитељица. Учествовала је на бројним домаћим и међународним научним скуповима и конференцијама из области методике наставе математике. Аутор је и коаутор научних и стручних радова.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

„Почетна настава математике и развијање логичког мишљења ученика“

представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У Ужицу, 29. 8. 2022. године,

ЈЈованови

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

„Почетна настава математике и развијање логичког мишљења ученика"

истоветне.

У Ужицу, 29. 8. 2022. године,

Ђовановић
потпис аутора

Образац 3

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Ивана Јовановић,

- [x] дозвољавам
- [ ] не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

„Почетна настава математике и развијање логичког мишљења ученика“

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

- [x] дозвољавам
- [ ] не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

$\boxed{3)}$ Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Ужицу, 29. 8. 2022. године,

МЈовановић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/