Univerzitet u Kragujevcu

Prirodno-matematički fakultet

Zoran Ognjanović

NEKE VEROVATNOSNE LOGIKE I NJIHOVE PRIMENE U RAČUNARSTVU

Doktorska disertacija

Kragujevac, 1999.

Author: Zoran Ognjanović (1964-)

Title of the PhD thesis: Some probability logics and their applications in computer sciences
Naslov disertacije: Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu

Keywords: probability logic, uncertain reasoning, axiomatization, infinitary inference rules, completeness, decidability, linear programming, temporal logic, automated theorem proving
Klučne reči: verovatnosna logika, rezonovanje u prisustvu neizvesnosti ,aksiomatizacija, beskonačna pravila, potpunost, odlučivost, linearno programiranje, vremenske logike, automatsko dokazivanje teorema

Area: mathematical logic, artificial intelligence, uncertain reasoning,
Oblast: matematičla logika, veštačka inteligencija, rezonovanje u prisustvu neizvesnosti

MSC: 03B48, 03B70, 03B45, 03B44, 68T15, 68T27, 68T37

PhD Committee: Miodrag Rašković (advisor), Žarko Mijajlović, Zoran Marković, Dragić Banković

Faculty: Faculty of sciences, University of Kragujevac
Fakultet: Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Kragujevcu

Date: September 3 1999
Language: Serbian
References: 123
Pages: 128

Abstract

Part1. Subjective and objective interpretations of probability are described. The organization of the text is given.

Part2. Some propositional probability logics are introduced. Their languages, models, satisfiability relations, and (in)finitary axiomatic systems are given. In this paper the terms *finitary* and *infinitary* concern meta language only. Object languages are countable, formulas are finite, while only proofs are allowed to be infinite. Basically, the considered languages are obtained by adding unary probabilistic operators of the form $P_{\geq s}$ with the intended meaning "the probability is greater than s". A Kripke-like possible-world approach to interpret probability-formulas such that they remain either true or false is proposed. Since the compactness theorem does not hold for some of the considered logics, infinitary axiomatic systems allows proving the corresponding extended completeness theorems. Decidability of the logics is proved using a reduction of the satisfiability problem to the linear programming problem.

Part 3. In this part some first order probability logics are considered. In a paper of Abadi and Halpern is proved that there is no recursive axiomatization of these logics, so the presented approach involving infinitary inference rules is the only way to achieve any complete axiomatization.

Part 4. New types of probability operators of the form Q_F, where F is a recursive rational subset of [0, 1] are introduced. A formula $Q_F A$ is satisfied in a probability model if the measure of the set of worlds that satisfy A is in F. The new operators are suitable for describing events in discrete sample spaces. It is show that the new operators are not definable in languages of probability logics that have been used so far.

Part 5. A propositional and a first-order logic for reasoning about discrete linear time and finitely additive probability are given. The languages of these logics allow formulas that say 'sometime in the future, A holds with probability at least s'. Sound and complete infinitary axiomatizations for the logics are provided.

Part 6. In this part a probabilistic extension of modal logic is investigated. It is showed that those logics are closely related, but that modal necessity (denoted by $\Box$) is a stronger notion than probability necessity (probability one, $P_{\geq 1}$). An example of probability version of Barcan-formula which assures this conclusion is given.

Part 7. Decidability of the considered logics is shown by reducing the corresponding satisfiability problem to the linear programming problem. Two automated theorem provers based on that idea are described.

Appendix A. This appendix contains the main definitions and formulations of some statements related to probability, Loeb'measure, infinitary logics, and computation complexity.

Appendix B. This appendix describes some other approaches in the field: work of Keisler concerning the probabilistic quantifiers, and some other papers about probabilistic operators written by Nilsson, Fagin, Halpern etc.

1

Uvod

U ovom radu se razmatra svojevrsno preplitanje dve teorije - matematičke logike i verovatnoće kroz prizmu formalizacije rezonovanja o verovatnoći. To preplitanje je zanimljivo iz više razloga. Najpre, verovatnoća se prirodno pojavljuje kao alternativa standardnim istinitosnim vrednostima. Zatim, verovatnosno rezonovanje se izvodi manipulisanjem simbolima iz datog jezika u skladu sa zadatim pravilima, u čemu je lako pronaći mogućnost računarske implementacije, pa i razloge zbog kojih su ovakvi formalni sistemi interesantni i za računarske nauke. Takođe, prilagođavanje logičkog aparata potrebama manipulisanja izrazima koji uključuju verovatnoće otvara čitav niz pitanja, poput definisanja jezika i aksiomatskih sistema, dokazivanja teorema potpunosti i odlučivosti itd. čijem rešavanju je posvećen najveći deo rada.

U nastavku ovog poglavlja spomenućemo neke od dosadašnjih rezultata koji se odnose na područje u kome se graniče matematička logika i teorija verovatnoće. Navešćemo osnovne rezultate sadržane u radu i dati pregled preostalog dela teksta.

1.1 Interpretacije verovatnoće

Nastanak teorije verovatnoće se povezuje sa Gerolamo Cardan-om (1501 – 1576), Galileo Galilei-em (1564 – 1642) i Blaise Pascal-om (1623 – 1662) koji su proučavali igre na sreću [27, 49]. U njihovim radovima, kao i sve do kraja XIX veka, verovatnoća događaja je shvatana kao šansa, tj. količnik broja povoljnih mogućnosti i ukupnog broja slučajeva ili kao relativna učestanost uspešnih događaja u ukupnom broju pokušaja u nekom eksperimentu. Na ovaj način se jasno određuje značenje rečenica poput 'Verovatnoća da slučajno izabrana ptica leti je bar $\frac{5}{6}$'.

Međutim, u rečenici 'Verovatnoća da je Homer spevao Odiseju je $\frac{1}{3}$' verovatnoću ne možemo tumačiti spomenutim količnicima pošto ne postoji ni ukupan broj slučajeva, ni niz eksperimenata u kojima sa sastavlja Odiseja. Verovatnoća ovde ima smisao stepena verovanja u iskaz, odnosno opisa stanja znanja [51, 110].

Nazovimo ova dva pristupa interpretaciji verovatnoće redom:

- statistički pristup (objektivistički, empirijski), odnosno
- stepen verovanja (subjektivistički, lični pristup).

Prethodni primeri ilustruju višesmislenost upotrebe reči verovatnoća, kao i da ni jedan od spomenutih koncepata nije ni beskoristan, ni dovoljan. Šta više, u daljem tekstu će se videti da ovi koncepti dovode do različitih logičkih sistema, bez obzira što su zakoni koji važe u oba slučaja isti.

1.2 Verovatnoća i matematička logika

Istraživanja u oblastima matematičke logike i teorije verovatnoće često su kroz istoriju imala dodirnih tačaka: pokušavano je zasnivanje teorije verovatnoće na logičkim osnovama, proučavane su logike u kojima se istinitosna vrednost formula izračunava pomoću funkcija koje su verovatnosne mere ili liče na njih, proširivan je logički jezik konstrukcijama koje omogućavaju da se neposredno govori o verovatnoći itd. Od sredine 80-tih godina rad u oblasti veštačke inteligencije, preciznije problemi zaključivanja u situacijama kada je znanje nepotpuno ili dvosmisleno, ili kada nije jasno koja pravila zaključivanja su primenljiva, otvorila su nova pitanja i dodatno inspirisala istraživače.

Verovatnosne logike je razmatrao još Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) koji je u okviru razvoja metoda poznatog kao characteristica generalis pokušavao da primeni logički zasnovan postupak u verifikaciji tvrđenja iz teorije verovatnoće [113]. Leibnitz je razlikovao dve vrste verovatnosnog računa: račun unapred kojim se procenjuje verovatnoća ostvarivanja događaja ako su poznate verovatnoće uzroka i račun unazad kojim se procenjuje verovatnoća uslova ako je poznata verovatnoća onoga na šta oni utiču. Nakon Leibnitz-a sličnom problematikom se bavio veći broj istaknutih matematičara (Jakob Bernoulli (1654 – 1705), Christian Wolff (1679 – 1754), August De Morgan (1806 – 1871), John Venn (1834 – 1923), Platon Sergeyevich Poretskiy (1846 – 1907)), a posebno George Boole (1815 – 1864) [45, 113]. Veliki deo Boole-ovog rada [9] je posvećen proučavanju odnosa logičkog računa i računa događaja koji se danas shvata kao standardni deo teorije verovatnoće. Savremeni aksiomatski pristup verovatnoći uveo je u svojim radovima Andrei Kolmogorov (1903 – 1987) [41, 64]. On je dao dva aksiomatska sistema: za konačno-aditivnu verovatnoću i za σ-aditivnu verovatnoću koji odgovaraju definicijama A.5 i A.6. Iako je u savremenim kursevima verovatnoće favorizovan koncept σ-aditivne verovatnoće, pojedini istraživači smatraju da za to nema opravdanja [58, 110]. Posebno, predlaže se da se, u slučaju kada je smisao verovatnoće stepen verovanja, koristi samo pravilo konačne aditivnosti. Rudolf Carnap (1894 – 1970) je teoriju verovatnoće shvatao kao proširenje logike [15, 16, 59]. U tom proširenju relacija logičkog izvođenja se uopštava do kvantitativne relacije stepena izvođenja. Pri tome je nastojao da verovatnoća zaključka, kao i kod običnog izvođenja, bude logički nužna i izvodljiva iz sintaksne forme argumenata zaključivanja. Recimo, pokušao je da $P(h \mid e)$, uslovnu verovatnoću od h ako je ispunjeno e, korektno odredi logičkom analizom h i e, gde su h i e formule jezika prvog reda. Carnap u tome nije uspeo, čak i za relativno ograničen izbor h i e. Međutim, pojedini delovi njegovog rada su danas aktuelni u oblasti nemonotonog verovatnosnog izvođenja. Haim Gaifman je u [37, 38] nastavio Carnap-ovim putem. Posmatrao je više formalnih jezika i odgovarajuće klase modela i proučavao probleme definisanja mere na skupu rečenica kao generalizacije standardne interpretacije, pojam slučajnosti, uslovne verovatnoće rečenica na osnovu prikupljenih iskustava itd.

U viševrednosnim logikama prisutna je ideja finije gradacije istinitosti nego što je to slučaj kod klasične logike tako da postoje iskazi koji nisu ni potpuno tačni, ni potpuno netačni, već imaju neki drugi status, na primer neodređeni su [109]. Iako istinitosne vrednosti u ovim logikama ne moraju biti verovatnoće iskaza, intuitivna veza sigurno postoji. Recimo, u [108] se razmatraju formule na standardnom modalnom jeziku kojima se značenje određuje pomoću verovatnosnih istinitosnih funkcija i pokazuje se da se skup valjanih formula poklapa sa skupom teorema modalne logike *S5*. U [74] je razmatran logički aspekt fazi logike[1] [121]. Fazi logika se shvata kao viševrednosna logika, pa se interpretacija iskaznih slova definiše kao realna funkcija koja ne mora biti verovatnoća, ali čije vrednosti jesu u segmentu $[0, 1]$. Istinitosna vrednost složenih iskaza se definiše induktivno. Na primer, istinitosna vrednost negacije formule je jedan minus istinitosna vrednost formule, ili istinitosna vrednost dusjunkcije je maksimum istinitosnih vrednosti disjunkata itd. Ako se valjanim formula smatraju formule koje pri svakoj interpretaciji imaju istinitosnu vrednost veću do jednaku od 0.5, pokazano je da se skup valjanih formula poklapa sa skupom klasičnih iskaznih tautologija. U [39] Haim Gaifman

[1] Rasprostranjenost termina *fazi* (engl. *fuzzy*) predstavlja razlog zbog koga se on obično ne prevodi. U tekstu ćemo koristiti 'domaću' varijantu zapisivanja ovog termina.

opisuje još jednu viševrednosnu logiku u čijem jeziku se pojavljuju simboli verovatnosnih operatora. Recimo, formula je izraz oblika $PR(\alpha, [r, s])$ koji se interpretira kao 'verovatnoća od α je u segmentu $[r, s]$. Gaifman analizira i strukture kojima nastoji da da adekvatnu semantiku za verovatnoće višeg reda koje shvata kao procenu kvaliteta verovatnoće nižeg reda. I ovde se dolazi do rezultata da je skup valjanih formula oblika $PR(\alpha, [1, 1])$ u stvari skup teorema modalne logike *S5*. U radu nije razmatrana aksiomatizacija logike.

Sa stanovišta ovoga rada posebno su interesantne logike u čijim objekt jezicima se pojavljuju simboli (verovatnosni kvantifikatori i verovatnosni operatori) kojima se izražava verovatnoća. Za te logike proučavaju se klase modela, aksiomatski sistemi, problemi potpunosti, odlučivosti itd. Njihov nešto detaljniji prikaz dajemo u dodatku B. Ovde spomenimo samo da su modeli za logike sa verovatnosnim kvantifikatorima strukture prvog reda u kojima se verovatnoća definiše nad podskupovima domena, dok su modeli za logike sa verovatnosnim operatorima slični modalnim modelima u kojima se verovatnoća definiše nad podskupovima skupa mogućih svetova.

U veštačkoj inteligenciji[2] se proučavaju postupci za predstavljanje i manipulaciju znanjem koje je po pravilu neprecizno, dvosmisleno ili nepotpuno [60]. Iz perspektive ovog rada interesantni su formalni sistemi u koje spadaju: fazi logike, Bayes-ove mreže i pravila sa faktorima sigurnosti. Pod fazi logikom se obično podrazumeva inžinjerska metodologija u kojoj se u kontroli sistema koristi izvestan numerički pristup modeliranju kao alternativa upotrebi teorije verovatnoće [26, 118, 121]. Međutim, fazi logika se može shvatiti i kao radikalna alternativa matematičkoj logici čiji je cilj da se logika fazifikuje tako da bude direktno primenljiva u zaključivanju sa neformalnim i nepreciznim argumentima. Pri tome "rigoroznost ne igra tako važnu ulogu kao u klasičnoj logici" [122, 123]. Bayes-ova mreža je metod u kojem se pomoću direktnog grafa opisuju međusobno zavisni događaji[86]. Grafu se pridodaje tabela uslovnih verovatnoća koje govore o međusobnoj zavisnosti događaja i pomoću koje se izračanava, recimo, uslovna verovatnoća uzroka uočenog događaja. Pravila sa faktorima sigurnosti (zaključivanja) se često javljaju u programima ekspertnih sistema [17]. Interpretator pravila odgovorajući na postavljeno pitanje sistemu računa i numeričku vrednost koja karakteriše sigurnost zakllјučka. U [78] se konstatuje da se većina ovih postupaka oslanja na *ad hoc* tehnike koje imaju malo ili uopšte nemaju teoretsko opravdanje, zbog čega je značajno razviti logike pogodne za rad sa neizvesnošću.

1.3 Verovatnosne logike i interpretacija verovatnoće

Istinitost rečenice 'Verovatnoća da slučajno izabrana ptica leti je bar $\frac{5}{6}$' je određena objektivnim stanjem aktuelnog sveta, tj. ona predstavlja statističku informaciju koja je bilo tačna, bilo netačna. Preciznije, rečenica je tačna ako je mera skupa ptica koje lete veća do jednaka od $\frac{5}{6}$. Mera je ovde sinonim za relativnu učestanost skupa ptica koje lete u skupu svih ptica.

Sa druge strane istinitost rečenice 'Verovatnoća da je Homer spevao Odiseju je $\frac{1}{3}$' ilustruje uverenje onoga ko je izgovara. Lako je zamisliti situacije u kojima je Homer autor speva i one u kojima on to nije. Nazovimo te situacije mogućim svetovima. Tada možemo reći da je rečenica tačna ako je mera svetova u kojima je Homer spevao Odiseju $\frac{1}{3}$. Pri tome, mera ne mora da bude izražena relativnom učestanošću jednih i drugih svetova, već je pre svega reč o subjektivnom vrednovanju alternativa.

Primetimo da korišćenje relativne učestanosti u interpretaciji verovatnoće nije pogodno za određivanje istinitosti druge rečenica i obrnuto, na probleme se nailazi ako se pokuša određivanje istinitosti prve rečenice koristeći drugi pristup. Pod pretpostavkom da postoji samo jedan, aktuelni svet, u njemu je ili Homer autor Odiseje ili to nije slučaj, tako da je razmatrana rečenica 'Verovatnoća da je Homer spevao Odiseju je $\frac{1}{3}$' uvek lažna. U [4, 47] je predloženo da se $(\forall x)(\text{ptica}(x) \rightarrow \text{leti}(x))$

[2] Ne ulazeći u probleme određivanja pojma veštačke inteligencije poistovetimo ovu oblast sa programima za dijagnosticiranje, ekspertnim sistemima itd. za koje se obično podrazumeva određeni vid inteligentnog ponašanja.

iskoristi kao formula koja odgovara rečenici 'Verovatnoća da slučajno izabrana ptica leti je bar $\frac{5}{6}$' i čija se verovatnoća analizira u skupu mogućih svetova. Međutim, moguće je da u svakom od svetova bar jedna ptica ne leti, te da razmatrana formula ni u jednom od svetova ne bude tačna, odakle bi njena verovatnoća bila 0 bez obzira što skoro sve ptice u svim svetovima lete.

Iz ovih primera se vidi da su logike u kojima je verovatnoća definisana u odnosu na domen pogodne za formalizaciju statističkog zaključivanja, dok su logike u kojima je verovatnoća definisana u odnosu na skup mogućih svetova pogodne za formalizaciju stepena verovanja. Naravno, moguće je posmatrati kombinaciju oba koncepta verovatnoće. Recimo, rečenicom 'Verovatnoća da verovatnoća da slučajno izabrana ptica leti je bar $\frac{5}{6}$ je veća od $\frac{11}{12}$' izražava se stepen verovanja u statističku informaciju. Logike koje formalizuju ovakav pristup prikazane su u [47].

1.4 Organizacija rada

U narednim poglavljima ćemo opisati više logika čiji objekt jezici sadrži verovatnosne operatore oblika $P_{\geq s}$ koji se interpretiraju kao 'verovatnoća je bar s' i koji omogućavaju eksplicitno rezonovanje o verovatnoći.

U poglavlju 2 su prikazane iskazne verovatnosne logike. Polazi se od rezultata profesora dr Miodraga Raškovića objavljenih u [98] koji se proširuju na veći broj iskaznih logika. Za te logike se opisuju klase modela i daju aksiomatizacije za koje se pokazuje jaka potpunost, a takođe se dokazuje i odlučivost logika. Za verovatnosnu iskaznu logiku sa realnovrednosnim verovatnoćama do sada su bile publikovane samo aksiomatizacije za koje je pokazivana slaba potpunost. Pošto za ovu logiku ne važi teorema kompaktnosti, jaka potpunost se ne može dokazati uz konačnu aksiomatizaciju. Mi ćemo, zato, dati jednu novu beskonačnu aksiomatizaciju u kojoj su formule konačne, a postoji beskonačno pravilo izvođenja. Koliko nam je poznato, odgovarajući dokaz potpunosti u formi u kojoj je ovde dat, je originalan.

U poglavlju 3 diskutuju se verovatnosne logika prvog reda, ponovo polazeći od rezultata iz [98]. Kao i u prethodnom poglavlju, date su odgovarajuće aksiomatizacije, dokazana jaka potpunost i diskutovana odlučivost logika. U do sada objavljenim radovima nije bila data aksiomatizacija za verovatnosne logike prvog reda sa realnovrednosnim verovatnoćama, tako da je i ovaj rezultat nov.

U poglavlju 4 se u objekt jezik iskaznih logika iz poglavlja 2 uvode verovatnosni operatori oblika Q_F koji se interpretiraju kao 'verovatnoća je u skupu F'. Različiti izbori skupa $\{F : Q_F$ je operator jezika$\}$ dovode do posebnih logika. U radu je opisan uniforman pristup aksiomatizaciji tih logika, dokazana jaka potpunost i diskutovana odlučivost. Zatim se analizira izražajnost i međusobni odnos logika. Verovatnosni operatori oblika Q_F, koliko nam je poznato, nisu do sada spominjani u literaturi.

U naredna tri poglavlja opisujemo nekoliko primena spomenutih verovatnosnih logika:

- u kombinaciji sa temporalnim logikama, gde će biti formalizovano rezonovanje o promeni verovatnoće sa protokom vremena (poglavlje 5),
- u uopštavanju modalnih logika, gde ćemo razmatrati odnos standardnih modalnih i verovatnosnih operatora (poglavlje 6),
- u Verlog-u, automatskom dokazivaču teorema u verovatnosnoj logici (poglavlje 7).

U poglavlju 7 ćemo takođe ponuditi nekoliko verovatnosnih interpretacija operatora preferiranja i pomoću programa Verlog teorema proveriti valjanost određenog broja formula.

Dodatak A sadrži formulacije definicija i tvrđenja iz oblasti teorije verovatnoće, nestandardne analize, teorije ordinala, infinitarnih logika, hijerarhija i složenosti izračunavanja itd. koje se koriste bilo u prikazu radova koje citiramo, bilo u dokazu nekih teorema. U dodatku B ćemo dati kraći prikaz nekoliko verovatnosnih logika čiji jezici sadrže verovatnosne operatore, odnosno verovatnosne kvantore.

1.5 Publikovani i izlagani delovi rada

Delovi nekih poglavlja su štampani, odnosno prihvaćeni za štampanje, u časopisima ili izlagani na konferencijama. Delovi poglavlja 2 su publikovani u [80] i izlagani u [100]. Jedan pregled rezultata koji su delimično opisani u ovom poglavlju izlagan je na konferenciji posvećenoj profesoru Kurepi i publikovan u [104]. Rezultati iz poglavlja 3 biće publikovani u [84], a iz poglavlja 4 u [83]. Deo poglavlja 5 izlagan je i publikovan u [82]. Dokazivač teorema opisan u poglavlju 7 predstavljen je na konferenciji posvećenoj profesoru Prešiću [106]. Delovi poglavlja 2, 5 i 7 izlagani su na više domaćih konferencija posvećenih matematičkoj logici i računarstvu [81, 99, 101, 102, 105].

1.6 Zahvalnost

Na kraju, a kako se kaže - ne i najmanje važno, želim da istaknem da je profesor dr Miodrag Rašković, moj mentor, glavni inicijator ovog istraživanja. Njegov uticaj se dovoljno ogleda i u činjenici da sam aksiomatski sistem dat u [98] gotovo u potpunosti prihvatio. Sugestije i zadaci koje mi je davao direktno su doveli do rezultata prikazanih u poglavljima 2, 4 i 7, a prisutni su i u ostalim delovima rada.

Pored dr Raškovića, uobličavanju ovog rada su direktno pomogli Vladimir Petrović i Uroš Majstorović koji su napisali najveći deo programkog koda za dokazivače teorema opisane u poglavlju 7.

Povremene diskusije se profesorom dr Aleksandarom Kronom, dr Miodragom Kapetanovićem, dr Radetom Živaljevićem, dr Zoranom Petrićem i profesorom dr Branislavom Boričićem su bile veoma korisne i pomogle su mi u razjašnjavanju nekih nejasnoća. Članovi Komisije za ocenu disertacije, profesor dr Radosav Đorđević, profesor dr Žarko Mijajlović, profesor dr Zoran Marković i profesor dr Miodrag Rašković su svojim sugestijama unapredili kvalitet priloženog teksta.

Istraživanje izloženo u ovom radu predstavlja deo Projekta 04M02 Matematičkog instituta finansiranog od strane Ministarstva za nauku i tehnologiju Republike Srbije.

Moja mala porodica je sa velikim strpljenjem i razumevanjem propratila i podržala izradu ovoga rada.

2

Iskazna verovatnosna logika

U ovom poglavlju ćemo definisati formalne jezike, klase modela i odgovarajuće aksiomatizacije i formulisati i dokazati teoreme potpunosti i odlučivosti za izvestan broj iskaznih logika. U skladu sa terminologijom iz [98] i poglavlja 1, logike koje razmatramo označavamo sa:

- LPP_1, logika u kojoj su dozvoljene iteracije verovatnoća, mešanje iskaznih i verovatnosnih formula, a verovatnoće su realnovrednosne,
- $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$, logika koja predstavlja restrikciju logike LPP_1 u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom,
- LPP_2, logika koja predstavlja restrikciju logike LPP_1 u kojoj nisu dozvoljene iteracije verovatnoća i mešanje iskaznih i verovatnosnih formula i
- $LPP_2^{\mathrm{FR}(n)}$, logika koja predstavlja restrikciju logike LPP_2 u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom.

Za logike LPP_1 i LPP_2 biće date beskonačne, a za logike $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ i $LPP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ konačne aksiomatizacije. (Ne)važenjem teoreme kompaktnosti opravdaćemo takav pristup. Potpunost ćemo dokazivati u odnosu na odgovarajuće merljive verovatnosne modele. Naglašavamo da se beskonačnost, sem ako nije drugačije rečeno, odnosi na meta jezik, odnosno da dokazi mogu biti beskonačni, dok formule moraju biti konačne.

Logika koja je veoma slična sa $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ prikazana je u [80] pod imenom LPP_{ext}. Jedinu razliku predstavlja činjenica da su u [80] dozvoljeni samo verovatnosni operatori $P_{\geq s}$, za s iz ranga verovatnoća. Logika $LPP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ je prikazana u [98] pod imenom LPP.

2.1 Logika LPP_1

U ovom odeljku ćemo analizirati logiku LPP_1. Jedna slična logika je predstavljena u [31], ali za nju je pokazana samo slaba potpunost i to na jeziku koji dozvoljava linearne kombinacije verovatnosnih terma (odeljak B.2).

2.1.1 Jezik

Neka je S skup svih racionalnih brojeva iz $[0, 1]$. Jezik $\mathcal{L}(LPP_1)$ logike LPP_1 je prebrojivo proširenje klasičnog iskaznog jezika koje se sastoji od prebrojivog skupa iskaznih slova $\phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, klasičnih operatora $\neg$ i $\wedge$ [18] i liste verovatnosnih operatora oblika $P_{\geq s}$ za svaki $s \in S$.

2.1.2 Formule

Skup $\mathrm{For}(LPP_1)$ formula ovog jezika je najmanji skup koji sadrži iskazna slova i zatvoren je za sledeća pravila:

- Ako je α formula i $s \in S$, onda je $P_{\geq s}\alpha$ formula.
- Ako su α i β formule, formule su i $\neg\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$.

Primeri formula su: $P_{\geq \frac{1}{2}} p_1$ i $P_{\geq \frac{1}{3}}(p_1 \wedge \neg P_{\geq \frac{9}{11}} p_2) \wedge p_3$. Formule iz skupa $\mathrm{For}(LPP_1)$ ćemo označavati malim slovima grčkog alfabeta: α, β, γ, ...

Za definisanje preostalih klasičnih iskaznih operatora ($\vee$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$) se koristi standardni postupak, tj. $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, $\alpha \rightarrow \beta =_{def} \neg\alpha \vee \beta$ i $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Slično, i drugi verovatnosni operatori se uvode definicijama:

- $P_{<s}\alpha =_{def} \neg P_{\geq s}\alpha$,
- $P_{\leq s}\alpha =_{def} P_{\geq 1-s}(\neg\alpha)$,
- $P_{>s}\alpha =_{def} \neg P_{\leq s}\alpha$ i
- $P_{=s}\alpha =_{def} P_{\geq s}(\alpha) \wedge \neg P_{>s}(\alpha)$.

Na primer, formula $(P_{>r}\alpha \wedge P_{=s}(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow P_{\leq t}\beta$ se shvata kao 'ako je verovatnoća od α veća od r i β sledi iz α sa verovatnoćom s, verovatnoća od β nije veća od t'.

2.1.3 Klase modela

Za davanje značenje formulama koristićemo modele u kojima su verovatnoće definisane nad mogućim svetovima. Ovi modeli podsećaju na modalne modele [56, 57, 66, 68, 69], ali umesto modalne relacije dostižnosti svakom svetu je pridružen jedan prostor mere. Jednu komponentu tog prostora predstavlja skup svetova za koje možemo smatrati da su u nekom smislu dostižni iz posmatranog sveta, dok je verovatnoća za svaki svet definisana nad podskupovima tih dostižnih svetova. U našem pristupu formule, iako govore o verovatnoći, imaju standardne istinitosne vrednosti tačno ($\top$), odnosno netačno ($\bot$).

Definicija 2.1 *Verovatnosni model* je struktura $M = \langle W, v, Prob \rangle$, gde su:

- W neprazan skup svetova,
- $v : W \times \phi \mapsto \{\top, \bot\}$ je iskazna valuacija koja svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje $\top$ ili $\bot$ i
- $Prob$ je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje jedan konačno-aditivni verovatnosni prostor $\langle W(w), H(w), \mu(w) \rangle$ tako da:
  - $W(w)$ je podskup skupa svih svetova W,
  - $H(w)$ je algebra podskupova od $W(w)$ i
  - $\mu(w)$ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na $H(w)$.

Relacija zadovoljivosti je relacija između svetova verovatnosnih modela i formula. Za formulu koja je zadovoljena u nekom svetu kaže se i da je tačna ili da važi u tom svetu. Ako formula nije zadovoljena u nekom svetu kaže se i da je netačna ili da ne važi u tom svetu.

Definicija 2.2 Neka je M proizvoljan LPP_1-model i w proizvoljan svet tog modela. Formula α je *zadovoljena* u svetu w, u oznaci $w \models_M \alpha$, ako važi:

- ako je α iskazno slovo, $\alpha \in \phi$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako $v(w)(\alpha) = \top$,
- ako je α oblika $P_{\geq s}\beta$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako $\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\}) \geq s$,
- ako je α oblika $\neg\beta$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako nije $w \models_M \beta$ i
- ako je α oblika $\beta \wedge \gamma$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako $w \models_M \beta$ i $w \models_M \gamma$.

Prokomentarišimo slučaj formule oblika $P_{\geq s}\beta$. Prema definiciji, ova formula važi u nekom svetu w modela M ako je mera $\mu(w)$ (iz sveta w) svih dostižnih svetova (koji su u skupu $W(w)$) u kojima važi formula β veća do jednaka sa s.

Indeks M koji označava razmatrani model ćemo izostavljati iz oznake $\models_M$ ako se model podrazumeva. Oznaku $\not\models$ koristićemo sa značenjem: nije $\models$.

Definicija 2.3 Formula α je *zadovoljiva* ako postoji svet nekog modela u kome je α zadovoljeno. Formula je *valjana* u modelu M ukoliko je zadovoljena u svakom svetu tog modela. Formula je *valjana* u klasi modela C ukoliko je valjana u svakom modelu te klase. Skup formula T je *zadovoljiv* ako postoji svet nekog modela u kome su zadovoljene sve formule iz skupa.

U daljem izlaganju bavićemo se samo merljivim modelima, odnosno modelima u kojima su svi skupovi svetova definabilni formulama merljivi.

Definicija 2.4 LPP_1-model M je *merljiv* ako je za svaki svet w tog modela i svaku formulu α ispunjeno:

$$\{w' \in W(w) : w' \models \alpha\} \in H(w).$$

Klasu merljivih modela označićemo sa:

- $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$

a takođe ćemo razmatrati i dve njene potklase:

- $LPP_{1,\mathrm{All}}$ i
- $LPP_{1,\sigma}$.

Prvoj potklasi pripadaju svi $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modeli u kojima su iz svakog sveta w merljivi svi podskupovi od $W(w)$, tj. $H(w) = 2^{W(w)}$. Drugoj klasi modela pripadaju svi $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modeli u kojima su sve verovatnoće σ-aditivne . Teoreme potpunosti ćemo dokazivati u odnosu na ove klase modela.

Ako se insistira na preciznosti, definicija zadovoljivosti nije potpunu korektna. Naime, u stavci koja se odnosi na formule oblika $P_{\geq s}\beta$ se podrazumeva da je $\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\})$ definisano, odnosno da je $\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\} \in H(w)$ za svaki svet w i svaku formulu β. Ovo zaista i jeste slučaj ako se razmatraju merljivi modeli, ali u definiciji merljivih modela se koristi definicija zadovoljivosti. Kako je primećeno u [59], ovaj problem se lako prevazilazi u dva koraka. U prvom koraku se definišu premodeli za koje zadovoljivost ne mora biti definisana za svaki par svet-formula. U drugom se model definiše kao premodel u kome je definicija relacije zadovoljivosti totalna.

2.1.4 Aksiomatizacija

Aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} za logiku LPP_1 sadrži sledeće shema aksiome:

1. Sve instance iskaznih tautologija.
2. $P_{\geq 0}\alpha$
3. $P_{\leq r}\alpha \rightarrow P_{<s}\alpha$, $s > r$
4. $P_{<s}\alpha \rightarrow P_{\leq s}\alpha$
5. $(P_{\geq r}\alpha \wedge P_{\geq s}\beta \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow P_{\geq \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$
6. $(P_{\leq r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \rightarrow P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, $r + s \leq 1$

i pravila izvođenja:

1. Iz α i $\alpha \rightarrow \beta$ izvesti β.
2. Iz α izvesti $P_{\geq 1}\alpha$.
3. Iz $\beta \rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\alpha$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \rightarrow P_{\geq s}\alpha$.

Uključivanje aksiome 1 i pravila izvođenja 1 u sistem Ax_{LPP_1} obezbeđuje da je klasična iskazna logika podlogika ove logike. Umesto ovog pristupa je bilo moguće koristiti bilo koji potpuni aksiomatski sistem. Aksioma 2 osigurava da je svaka formula zadovoljena u skupu svetova mere bar 0. Zamenom α sa $\neg\alpha$ u aksiomi 2 dobija se formula

(2') $P_{\leq 1}\alpha (= P_{\geq 0}\neg\alpha)$

koja znači da je svaka formula zadovoljiva u skupu svetova čija mera nije veća od 1. Aksiome 3 i 4 se mogu zapisati i u obliku:

(3') $P_{\geq s}\alpha \rightarrow P_{>r}\alpha$, $s > r$

(4') $P_{>s}\alpha \rightarrow P_{\geq s}\alpha$

Recimo, za aksiomu 3, $P_{\leq r}\alpha \rightarrow P_{<s}\alpha$ je ekvivalentno sa $\neg P_{<s}\alpha \rightarrow \neg P_{\leq r}\alpha$, što se prema definiciji verovatnosih operatora zapisuje kao $P_{\geq s}\alpha \rightarrow P_{>r}\alpha$. Monotonost mere se iskazuje formulom

$P_{\geq r}\alpha \rightarrow P_{\geq s}\alpha$, za $r \geq s$.

Kao što ćemo pokazati u teoremi 2.10.7, monotonost je posledica aksioma 3 i 4. Aksiome 5 i 6 odgovaraju konačnoj aditivnosti verovatnoće. Na primer, aksiomom 5 se kaže da, ako su skupovi svetova u kojima važe α i β disjunktni, onda je verovatnoća skupa svetova u kojima važi $\alpha \vee \beta$ suma verovatnoća prethodna dva skupa. Primetimo da, kao što je istaknuto u [30], ovde ne postoji potreba za aksiomama koje odgovaraju σ-aditivnosti verovatnoća jer se ona i ne može iskazati konačnim formula. Ipak, kao što ćemo pokazati, aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} je korektan i potpun i u odnosu na klasu $LPP_{1,\sigma}$ modela. Pravilo izvođenja 1 je klasično pravilo modus ponensa. Pravilo izvođenja 2 liči na pravilo necesitacije u modalnim logikama [57]. Pravilo izvođenja 3 je jedino beskonačno pravilo u aksiomatskom sistemu. Intuitivno, njime se kaže da, ako je verovatnoće formule α proizvoljno blizu nekom racionalnom broju s, onda je ona upravo jednaka sa s. Ovo pravilo je slično pravilu B.1 pomenutom u odeljku B.1.

Napomenimo da su aksiome 2, 5 i 6 i pravila izvođenja 1 i 2 data u aksiomatskom sistemu iz [98]. U tom sistemu askioma je i formula koja odgovara monotonosti verovatnoće.

Definicija 2.5 Formula α je *teorema* aksiomatskog sistema Ax_{LPP_1} ($\vdash_{Ax_{LPP_1}} \alpha$) ako postoji najviše prebrojiv niz formula $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha$, takav da je svaka α_i aksioma ili je pomoću nekog od pravila izvođenja izvedena iz prethodnih formula. Niz formula $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha$, je *dokaz* (*izvođenje*) za α.

U dokazu teoreme potpunosti biće korišteni i pojmovi sintaksne posledice (deduktivne posledice, izvodivosti iz skupa formula), konzistentnosti i maksimalnog skupa.

Definicija 2.6 Formula α je *sintaksna posledica skupa formula* T ($T \vdash_{Ax_{LPP_1}} \alpha$) ako postoji najviše prebrojiv niz formula $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha$, takav da je svaka formula α_i aksioma ili pripada skupu T ili je pomoću nekog od pravila izvođenja izvedena iz prethodnih formula, uz ograničenje da se pravilo 2 može primeniti samo na teoreme. Niz formula je $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha$ je *dokaz* (*izvođenje*) za α iz skupa formula T.

Indeks Ax_{LPP_1} u oznakama $\vdash_{Ax_{LPP_1}}$ i $T \vdash_{Ax_{LPP_1}}$ nećemo navoditi ukoliko to ne preti da izazove zabunu. Oznaku $\nvdash$ koristićemo sa značenjem: nije $\vdash$.

Definicija 2.7 Skup formula T je *konzistentan* ako postoji formula α takva da nije $T \vdash \alpha$. U suprotnom, skup je *nekonzistentan*.

Kao što se vidi, konzistentnost se definiše relativno, u odnosu na neki aksiomatski sistem, a u ovom slučaju u odnosu na sistem Ax_{LPP_1}.

Definicija 2.8 Skup formula T je *maksimalan* ako za je svaku formulu α, $\alpha \in T$ ili $\neg\alpha \in T$. Skup formula je *maksimalno konzistentan* ako je maksimalan i konzistentan.

2.1.5 Teorema korektnosti

Teorema 2.9 (Korektnost) Aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} je korektan u odnosu na klase modela $LPP_{1,\text{Meas}}$, $LPP_{1,\text{All}}$ i $LPP_{1,\sigma}$.

Dokaz. Neka je L bilo koja od spomenutih klasa modela. Dokaz korektnosti se sprovodi tako što se pokaže da je svaka instanca aksioma valjana formula i da pravila izvođenja očuvaju valjanost. Neka je M proizvoljni L-model. Svaki svet modela se sa stanovišta klasičnih iskaznih formula može shvatiti kao jedan klasičan iskazni model, tako da u svakom svetu važe sve klasične iskazne tautologije. Aksiome 2 – 6 se odnose na osobine verovatnoća i očigledno važe u proizvoljnom svetu. Pretpostavimo da su α i $\alpha \to \beta$ valjane formule. Ako formula β ne bi bila valjana postojao bi svet w nekog L-modela M u kome bi bilo $w \not\models \beta$ i $w \models \alpha \to \beta$, ali bi tada moralo biti i $w \not\models \alpha$, odakle ni α ne bi bilo valjano. Dakle, pravilo izvođenja 1 očuvava valjanost. U vezi pravila 2 pretpostavimo da je α valjana formula. Tada za svaki svet w svakog L-modela M važi $(\forall w' \in W(w))w' \models \alpha$. Kako je $\mu(w)(W(w)) = 1$, znači i da $w \models P_{\geq 1}\alpha$, odnosno da $P_{\geq 1}\alpha$ važi u svakom svetu svakog L-modela, tj. da se polazeći od valjane pretpostavke primenom pravila dobio valjan zaključak. Konačno, pravilo 3 očuvava valjanost zbog osobine skupa realnih brojeva. ∎

2.1.6 Teorema potpunosti

U postupku dokazivanja potpunosti koristićemo varijantu postupka koji je prvi predložio Leon Henkin [52]. Najpre ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja među kojima je i teorema dedukcije. Zatim ćemo opisati kako se proizvoljan konzistentan skup može proširiti do maksimalno konzistentnog skupa i kako se od maksimalno konzistentnih skupova gradi kanonski model. Pokazaćemo da ovaj model pripada klasi $LPP_{1,\text{Meas}}$ modela i da za svaki svet w kanonskog modela i svaku formulu α, α važi u w ako i samo ako α pripada w. Konačno, dokazaćemo da se koristeći kanonski model klase $LPP_{1,\text{Meas}}$ mogu konstruisati kononski modeli i za klase modela $LPP_{1,\text{All}}$ i $LPP_{1,\sigma}$. U ovom odeljku simbol $\perp$ će biti korišten i kao oznaka za $\alpha \wedge \neg\alpha$, za proizvoljnu formulu α. Lako se vidi da je skup formula T nekonzistentan ako i samo ako $T \vdash \perp$.

Teorema 2.10 1. **(Teorema dedukcije)** Ako je T skup formula, α formula i $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, onda $T \vdash \alpha \to \beta$.

2. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$.

3. $\vdash P_{\geq s}(\alpha \vee \bot) \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha$.

4. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha$.

5. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)$.

6. Ako je $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, onda je $\vdash P_{\geq s}\alpha \leftrightarrow P_{\geq s}\beta$.

7. $\vdash P_{\geq r}\alpha \to P_{\geq s}\alpha$, $r > s$.

Dokaz. 1. Koristićemo transfinitnu indukciju po dužini dokaza za β. Ako je dužina dokaza 1, formula β je bilo aksioma, bilo $\beta \in T$. Kako je $\beta \to (\alpha \to \beta)$ tautologija, na osnovu pravila 1, dobija se $T \vdash \alpha \to \beta$. Pretpostavimo da je dužina dokaza $k > 1$. Formula β može ponovo biti aksioma ili pripadati skupu T u kom slučaju bi kao i malopre bilo $T \vdash \alpha \to \beta$. Formula β može biti dobijena i primenom nekog od pravila izvođenja na prethodne formule u dokazu. Pretpostavimo da je β dobijena iz $T \cup \{\alpha\}$ primenom pravila 1. Tada su njene pretpostavke oblika γ i $\gamma \to \beta$. Dokazi ovih pretpostavki su kraći od k, pa je na osnovu indukcijske pretpostavke $T \vdash \alpha \to \gamma$ i $T \vdash \alpha \to (\gamma \to \beta)$. Kako je formula $(\alpha \to (\gamma \to \beta)) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))$ tautologija, dvostrukom primenom pravila 1 dobija se $T \vdash \alpha \to \beta$. Neka je $\beta = P_{\geq 1}\gamma$ dobijena iz $T \cup \{\alpha\}$ primenom pravila 2. Tada su teoreme formule γ i $P_{\geq 1}\gamma$ tako da se iz $\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ dobija $T \vdash \alpha \to \beta$. Konačno, neka je $\beta = \gamma \to P_{\geq s}\delta$ dobijeno iz $T \cup \{\alpha\}$ primenom pravila 3. Tada je:

$T, \alpha \vdash \gamma \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta$, za svaki prirodan broj $k \geq \frac{1}{s}$

$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta)$, za svaki prirodan broj $k \geq \frac{1}{s}$, prema indukcijskoj hipotezi

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta$, za svaki prirodan broj $k \geq \frac{1}{s}$

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to P_{\geq s}\delta$, primenom pravila 3

$T \vdash \alpha \to \beta$

2. Dokaz je:

$\vdash \neg\alpha \vee \neg\bot$

$\vdash P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)$, primenom pravila 2

$\vdash P_{\geq 0}\neg\bot$, aksioma 2

$\vdash (P_{\geq s}\alpha \wedge P_{\geq 0}\neg\bot \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)) \to P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$, aksioma 5

$\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$, dvostrukom primenom pravila 1

3. Izrazi $P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$ i $\neg P_{\geq s}\neg\neg\alpha$ su samo drugačiji zapisi formula $P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot)$, odnosno $P_{<s}\neg\neg\alpha$. Prema askiomi 6 imamo da je

$$\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$$

pa kako je:

$$\vdash (\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha$$

$\vdash P_{\geq 1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, primenom pravila 2

$\vdash \neg P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, prema definiciji verovatnosnih operatora,

sledi da je

$$\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to (P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha) \wedge \neg P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)).$$

Dakle,

$$\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to \bot$$

$$\vdash P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \to \neg P_{<s}\neg\neg\alpha$$

$$\vdash P_{\geq s}(\alpha \vee \bot) \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha.$$

4. Posledica koraka 2 i 3.
5. Negacija formule je ekvivalentna sa $P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geq s}\alpha \wedge P_{<s}\beta$, odakle, prema koraku 4, sledi $P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geq s}\neg\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta$, odnosno $P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\leq 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta$. Pošto je, prema aksiomi 6, $\vdash P_{\leq 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta \to P_{<1}(\neg\alpha \vee \beta)$, i $P_{<1}\alpha = \neg P_{\geq 1}\alpha$, sledi da je $\vdash \neg(P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)) \to P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta)$. Odatle je $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)$.
6. Ovo je neposredna posledica koraka 5, pošto iz $\vdash \alpha \to \beta$, primenom pravila 2 sledi $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta)$, odakle se dobija $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta$.
7. Aksiome 3' i 4' su redom $\vdash P_{\geq r}\alpha \to P_{>s}\alpha$, za $r > s$ i $\vdash P_{>s}\alpha \to P_{\geq s}\alpha$. Odatle sledi da je $\vdash P_{\geq r}\alpha \to P_{\geq s}\alpha$, za $r > s$. ■

Maksimalno konzistentno proširenje konzistentnog skupa se dobija na sledeći način.

Teorema 2.11 Svaki konzistentan skup formula T se može proširiti do maksimalno konzistentog skupa.

Dokaz. Neka je $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jedno nabrajanje svih formula. Definisaćemo niz skupova T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ tako da je:

1. $T_0 = T$,
2. Za svaki $i \geq 0$, ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ konzistentan, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$.
3. Za svaki $i \geq 0$, ako $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentan, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$.
4. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem formule oblika $\neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma)$, tada za neki $n \in \mathbb{N}$ skupu dodajemo i formulu $\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{n}}\gamma$, tako da T_{i+1} bude konzistentno[1].
5. $\overline{T} = \cup_i T_i$.

Skupovi dobijeni u koracima 1 i 2 su očigledno konzistenti. U koraku 3 se takođe dobijaju konzistenti skupovi. Pretpostavimo suprotno. Neka je $T_i \cup \{\alpha_i\} \vdash \bot$. Prema teoremi dedukcije je $T_i \vdash \neg\alpha_i$. Pošto je T_i konzistentan, konzistentan je i skup $T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$. U razmatranju koraka 4, pretpostavimo da skup $T_i \cup \{\beta \to P_{\geq s}\gamma\}$ nije konzistentan, pa je T_{i+1} jednak konzistentnom skupu $T_i \cup \{\neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma)\}$. Ako se skup T_{i+1} ne bi mogao proširiti formulom $\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$ važilo bi:

$T_i, \neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma), \beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma \vdash \bot$, za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$, prema hipotezi

[1] Formula $\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{n}}\gamma$ je svojevrsni svedok čije prisustvo u skupu T_{i+1} garantuje da skup $T_i \cup \{\beta \to P_{\geq s}\gamma\}$ nije konzistentan.

$T_i, \neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma) \vdash \neg(\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma)$ za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$, prema teoremi dedukcije

$T_i, \neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma) \vdash \beta \to P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$ za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$, iz 2., prema klasičnoj tautologiji $\neg(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \neg\gamma)$

$T_i, \neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma) \vdash \beta \to P_{\geq s}\gamma$, prema pravilu izvođenja 3

$T_i \vdash \neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma) \to (\beta \to P_{\geq s}\gamma)$, prema teoremi dedukcije

$T_i \vdash \beta \to P_{\geq s}\gamma$

Pošto $T_i \cup \{\beta \to P_{\geq s}\gamma\}$ nije konzistentno, iz $T_i \vdash \beta \to P_{\geq s}\gamma$ sledi i da T_i nije konzistentno, što predstavlja kontradikciju. Odatle se i u koraku 4 dobijaju konzistenti skupovi.

Razmotrimo skup $\overline{T}$ koji se dobija u koraku 5. Pokazaćemo da je on deduktivno zatvoren skup koji ne sadrži sve formule. Odatle, skup $\overline{T}$ će biti konzistentan.

Primetimo da za svaku formulu α, ako je $T_i \vdash \alpha$, onda mora biti $\alpha \in \overline{T}$. U suprotnom bi za $\alpha = \alpha_k$ i $\alpha \notin \overline{T}$ bilo $T_{\max\{i,k\}+1} \vdash \alpha$ i $T_{\max\{i,k\}+1} \vdash \neg\alpha$, što je kontradikcija. Neka je $\overline{T} \vdash \alpha$. Ako je dokaz za α iz $\overline{T}$ konačan, tada postoji $i \geq \mathbb{N}$ tako da je $T_i \vdash \alpha$, pa mora bit $\alpha \in \overline{T}$. Pretpostavimo da je niz formula $\beta_1, \beta_2, \ldots, \alpha$ koji predstavlja dokaz za α iz $\overline{T}$ prebrojivo beskonačan. U tom slučaju dokažimo da za svaki i važi: ako je β_i dobijeno primenom nekog pravila izvođenja čije sve pretpostavke pripadaju skupu $\overline{T}$, onda i $\beta_i \in \overline{T}$. Pretpostavimo da je β_i dobijeno primenom pravila 1 i da pretpostavke β_i^1 i β_i^2 pripadaju skupu $\overline{T}$. Tada mora postojati $k \in \mathbb{N}$ tako da $\beta_i^1, \beta_i^2 \in T_k$. Pošto $T_k \vdash \beta_i$, mora biti $\beta_i \in \overline{T}$. Neka je β_i dobijeno primenom pravila 2. Tada je $\vdash \beta_i$ i mora biti $\beta_i \in \overline{T}$. Ako to nije, onda je $\alpha_k = \neg\beta_i$, $\alpha_k \in T_{k+1}$, i T_{k+1} ne bi bio konzistentan. Pretpostavimo da je $\beta_i = \beta \to P_{\geq s}\gamma$ dobijeno primenom beskonačnog pravila 3 i da pretpostavke $\beta_i^1 = \beta \to P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma, \beta_i^2 = \beta \to P_{\geq s-\frac{1}{k+1}}\gamma, \ldots$ pripadaju skupu $\overline{T}$. Ako $\beta \to P_{\geq s}\gamma \notin \overline{T}$, prema koraku 4 konstrukcije, postoji $j \in \mathbb{N}$ tako da $j > \frac{1}{s}$ i $\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{j}}\gamma \in \overline{T}$. Neka je $l = \max\{k, j\}$. Prema aksiomama 3 i 4, $\beta \to P_{\geq s-\frac{1}{l}}\gamma \in \overline{T}$ i $\beta \to \neg P_{\geq s-\frac{1}{l}}\gamma \in \overline{T}$. Sada za neki $m \in \mathbb{N}$ skup T_m takođe sadrži te formule. Odatle skup $T_m \cup \{\beta\}$ nije konzistentan i $\beta \notin \overline{T}$. Zato postoji neko $j \in \mathbb{N}$ tako da $\neg\beta \in T_j$, $T_j \vdash \beta \to \bot$, $T_j \vdash \beta \to P_{\geq s}\gamma$ i $\beta \to P_{\geq s}\gamma \in \overline{T}$, što predstavlja kontradikciju. Dakle, skup $\overline{T}$ je deduktivno zatvoren. On ne sadrži sve formule. Ako bi za neku formulu i α i $\neg\alpha$ pripadalo skupu $\overline{T}$, postojao bi neki $i \in \mathbb{N}$ tako da $\alpha, \neg\alpha \in T_i$, što je ponovo kontradikcija. Prema tome, skup $\overline{T}$ je konzistentan.

Konačno, koraci 2 i 3 garantuju da je skup $\overline{T}$ maksimalan. ∎

U sledećoj teoremi formulisane su neke osobine maskimalnih konzistentih skupova formula.

Teorema 2.12 Neka je $\overline{T}$ maksimalni konzistentni skup formula. Tada važi:

1. Ako je $\alpha \in \overline{T}$, onda je $\neg\alpha \notin \overline{T}$.
2. Ako je $\overline{T} \vdash \alpha$, onda je $\alpha \in \overline{T}$, tj. $\overline{T}$ je deduktivno zatvoren skup.
3. $\alpha \wedge \beta \in \overline{T}$ ako i samo ako $\alpha \in \overline{T}$ i $\beta \in \overline{T}$.
4. Ako je $\alpha \in \overline{T}$ i $\alpha \to \beta \in \overline{T}$, onda je $\beta \in \overline{T}$.
5. Sve teoreme pripadaju skupu $\overline{T}$.
6. Ako je $P_{\geq s}\alpha \in \overline{T}$ i $s \geq r$, onda je $P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}$.
7. Ako je $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ i $r = \sup\{s : P_{\geq s}\alpha \in \overline{T}\}$, onda je $P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}$.

Dokaz. 1. Ako bi za neku formulu α i α i $\neg\alpha$ pripadale skupu skupu $\overline{T}$, važilo bi:

$$\overline{T} \vdash \alpha$$

$$\overline{T} \vdash \neg\alpha$$

$$\overline{T} \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$$

odnosno skup $\overline{T}$ ne bi bio konzistentan.
2. Ako bi za neku formulu α bilo $\overline{T} \vdash \alpha$ i $\alpha \notin \overline{T}$, odnosno $\neg\alpha \in \overline{T}$, bilo bi, kao i u koraku 1, $\overline{T} \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$, pa skup $\overline{T}$ ne bi bio konzistentan.
3. Za sve formule $\alpha, \beta \in \overline{T}$, važi:

$$\overline{T} \vdash \alpha$$

$$\overline{T} \vdash \beta$$

$$\overline{T} \vdash \alpha \wedge \beta$$

pa zbog deduktivne zatvorenosti skupa $\overline{T}$, $\alpha \wedge \beta \in \overline{T}$. Obrnuto, ako bi bilo $\alpha \wedge \beta \in \overline{T}$, važilo bi:

$$\overline{T} \vdash \alpha \wedge \beta$$

$$\overline{T} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$$

$$\overline{T} \vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$$

$$\overline{T} \vdash \alpha$$

$$\overline{T} \vdash \beta$$

odakle bi zbog deduktivne zatvorenosti skupa $\overline{T}$ bilo $\alpha, \beta \in \overline{T}$.
4. Slično kao i u prethodnom koraku:

$$\overline{T} \vdash \alpha$$

$$\overline{T} \vdash \alpha \to \beta$$

$$\overline{T} \vdash \beta$$

i zbog deduktivne zatvorenosti skupa $\overline{T}$, $\beta \in \overline{T}$.
5. Ponovo, zbog deduktivne zatvorenosti skupa $\overline{T}$, ako je α teorema, onda je $\overline{T} \vdash \alpha$, pa $\alpha \in \overline{T}$.
6. Prema koraku 5, $P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}$ za $s \geq r$. Ako je $P_{\geq s}\alpha \in \overline{T}$, onda prema koraku 4, $P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}$.
7. Neka je $r = \sup\{s : P_{\geq s}\alpha \in \overline{T}\}$. Prema pravilu 3, $\overline{T} \vdash P_{\geq r}\alpha$ i pošto je $\overline{T}$ deduktivno zatvoren skup, $P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}$. ■

Neka je struktura $M = \langle W, v, Prob \rangle$ definisana na sledeći način:

- W je skup svih maksimalno konzistentnih skupova,
- v je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje valuaciju $v(w) : \phi \mapsto \{\top, \bot\}$, tako da za svako iskazno slovo $p \in \phi$, $v(w)(p) = \top$ ako i samo ako $p \in w$,
- Za svako $w \in W$, $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w) \rangle$ tako da:
  - $W(w) = W$,
  - $H(w)$ je klasa skupova oblika $[\alpha] = \{w \in W : \alpha \in w\}$, za svaku formulu α i
  - za svaki skup $[\alpha] \in H(w)$, $\mu(w)([\alpha]) = \sup\{r : P_{\geq r}\alpha \in w\}$.

Teorema 2.13 Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ upravo definisana struktura. Tada je za svaki $w \in W$, klasa $H(w) = \{[\alpha]\}$ algebra podskupova od $W(w)$.

Dokaz. Očigledno važi sledeće:

- $W(w) = [\alpha \vee \neg\alpha] \in H(w)$, za proizvoljnu formulu α,
- ako je $[\alpha] \in H(w)$, tada je $[\neg\alpha]$ komplement skupa $[\alpha]$ i taj komplement pripada $H(w)$ i
- ako su $[\alpha_1], [\alpha_2] \in H(w)$, tada je unija $[\alpha_1] \cup [\alpha_2] \in H(w)$ jer je $[\alpha_1] \cup [\alpha_2] = [\alpha_1 \vee \alpha_2]$.

Dakle, za svaki w, $H(w)$ je algebra podskupova od $W(w)$. ■

Sledećom teoremom se pokazuje da je struktura M $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model. Model M nazvaćemo kanonski model.

Teorema 2.14 Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ upravo definisana struktura. Tada za svaki $w \in W$ važi:

1. Ako je $[\alpha] = [\beta]$, onda je $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$.
2. $\mu(w)([\alpha]) \geq 0$.
3. $\mu(w)([\alpha]) = 1 - \mu(w)([\neg\alpha])$.
4. $\mu(w)([\alpha] \cup [\beta]) = \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$, za sve formule α i β takve da je $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$.

Dokaz. 1. Dovoljno je pokazati da $[\alpha] \subset [\beta]$ povlači $\mu(w)([\alpha]) \leq \mu(w)([\beta])$. Iz $[\alpha] \subset [\beta]$ sledi da je $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ i $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \rightarrow \beta)$. Ako $P_{\geq s}\alpha \in w$, onda prema teoremi 2.10.5 i $P_{\geq s}\beta \in w$. Dakle, $\mu(w)([\alpha]) \leq \mu(w)([\beta])$.
2. Pošto je $P_{\geq 0}\alpha$ aksioma, $\mu(w)([\alpha]) \geq 0$.
3. Neka je $r = \mu(w)([\alpha]) = \sup\{s : P_{\geq s}\alpha \in w\}$. Ako je $r = 1$, prema teoremi 2.12.7 važi $P_{\geq 1}\alpha = P_{\leq 0}\neg\alpha = \neg P_{>0}\neg\alpha$ i $\neg P_{>0}\neg\alpha \in w$. Ako za neko $s > 0$, $P_{\geq s}\neg\alpha \in w$, prema aksiomi 3' mora biti $P_{>0}\neg\alpha \in w$, što je kontradikcija. Dakle, $\mu(w)([\neg\alpha]) = 1$. Neka je $r < 1$. Tada za svaki racionalan broj $r' \in (r, 1]$, $\neg P_{\geq r'}\alpha = P_{<r'}\alpha$ i $P_{<r'}\alpha$ pripada w. Prema aksiomi 4, $P_{\leq r'}\alpha$ i $P_{\geq 1-r'}(\neg\alpha) \in w$. Sa druge strane, ako postoji racionalan broj $r'' \in [0, r)$ takav da $P_{\geq 1-r''}(\neg\alpha) \in w$, onda $\neg P_{>r''}\alpha \in w$, što je kontradikcija. Dakle, $\sup\{s : P_{\geq s}(\neg\alpha) \in w\} = 1 - \sup\{s : P_{\geq s}\alpha \in w\}$.
4. Neka je $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$, $\mu(w)([\alpha]) = r$ i $\mu(w)([\beta]) = s$. Pošto je $[\beta] \subset [\neg\alpha]$, prema koraku 3 važi da je $r + s \leq r + (1 - r) = 1$. Neka je $r > 0$ i $s > 0$. Zbog osobina supremuma i monotonosti (teorema 2.10.7) za sve racionalne brojeve $r' \in [0, r)$ i $s' \in [0, s)$ je $P_{\geq r'}\alpha, P_{\geq s'}\beta \in w$. Prema aksiomi 5 sledi da $P_{\geq r'+s'}(\alpha \vee \beta) \in w$. Dakle, $r + s \leq \sup\{t : P_{\geq t}(\alpha \vee \beta) \in w\}$. Ako je $r + s = 1$, tvrđenje trivijalno važi. Pretpostavimo da je $r + s < 1$. Ako je $r + s < t_0 = \sup\{t : P_{\geq t}(\alpha \vee \beta) \in w\}$, onda je za svaki racionalan broj $t' \in (r + s, t_0)$, $P_{\geq t'}(\alpha \vee \beta) \in w$. Izaberimo racionalne brojeve $r'' > r$ i $s'' > s$ takve da $\neg P_{\geq r''}\alpha, P_{<r''}\alpha \in w$, $\neg P_{\geq s''}\beta, P_{<s''}(\beta) \in w$ i $r'' + s'' = t' \leq 1$. Prema aksiomi 4, $P_{\leq r''}\alpha \in w$. Prema aksiomi 6 je $P_{<r''+s''}(\alpha \vee \beta)$, $\neg P_{\geq r''+s''}(\alpha \vee \beta)$ i $\neg P_{\geq t'}(\alpha \vee \beta) \in w$, što predstavlja kontradikciju. Dakle, $\mu(w)([\alpha] \cup [\beta]) = \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$. Konačno pretpostavimo da je $r = 0$ ili $s = 0$. U tom slučaju se može rezonovati kao i malopre imajući u vidu da je $r' = 0$ ili $s' = 0$. ■

Teorema 2.15 (Jaka potpunost za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model.

Dokaz. Neka je T konzistentan skup formula. U pethodnim teoremama je pokazano da je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model. Indukcijom po složenosti formula dokazuje se da za svaku formulu α i svaki svet $w \in W$, $w \models \alpha$ ako i samo ako $\alpha \in w$.

Neka je α iskazno slovo. Tada tvrđenje važi prema definiciji modela M. Neka je $\alpha = \neg\beta$. Tada $w \models \neg\beta$ ako i samo ako $w \not\models \beta$ ako i sam ako $\beta \notin w$ ako i samo ako $\neg\beta \in w$. Neka je $\alpha = \beta \wedge \gamma$. Pema teoremi 2.12.3, $w \models \beta \wedge \gamma$ akko $w \models \beta$ i $w \models \gamma$ akko $\beta \in w$ i $\gamma \in w$ akko $\beta \wedge \gamma \in w$. Konačno, neka je $\alpha = P_{\geq s}\beta$. Ako $\alpha \in w$, $\sup\{r : P_{\geq r}(\beta) \in w\} = \mu(w)([\beta]) \geq s$ i $w \models P_{\geq s}\beta$. U suprotnom smeru, pretpostavimo da je $w \models P_{\geq s}\beta$, tj. $\sup\{r : P_{\geq r}(\beta) \in w\} \geq s$. Ako $\mu(w)([\beta]) > s$, onda zbog osobina supremuma i monotonosti verovatnoće $\mu(w)$, $P_{\geq s}\beta \in w$. Ako $\mu(w)([\beta]) = s$, prema teoremi 2.12.7, $P_{\geq s}\beta \in w$. ■

Na ovaj način smo pokazali da za aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} važi jaka potpunost u odnosu na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela. U naredne dve teoreme, koristeći kanonski model iz prethodne konstrukcije, dokazaćemo teoreme jake potpunosti i za preostale dve klase modela. Situacija da je jedan aksiomatski sistem korektan i kompletan u odnosu na više klasa modela nije izuzetak. Recimo, modalni sistem K je kompletan u odnosu na klasu svih modalnih modela, a takođe i u odnosu na klasu svih irefleksivnih modela [57]. Drugim rečima, formulama jezika $\mathcal{L}(LPP_1)$ se ne može iskazati razlika između razmatranih klasa modela.

Teorema 2.16 (Jaka potpunost za $LPP_{1,\mathrm{All}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{1,\mathrm{All}}$-model.

Dokaz. Dokaz se dobija primenom teoreme o proširenju konačno-aditivne verovatnoće A.12 iz [7] kojom se tvrdi da se verovatnoće $\mu(w)$ iz kanonskog modela M mogu proširiti tako da za svaki $w \in W$ budu definisane na $2^{W(w)}$. ■

Teorema 2.17 (Jaka potpunost za $LPP_{1,\sigma}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{1,\sigma}$-model.

Dokaz. Primenom teoreme A.30, varijante teoreme iz [55], kanonski model M se transformiše u σ-aditivni model $^*M$ takav da za svaku formulu α i svaki svet w, $w \models \alpha$ ako i samo ako $w \models_{^*M} \alpha$. ■

2.1.7 Semantičke i sintaksne posledice

U definiciji 2.6 uveden je pojam sintaksne posledice. U ovom odeljku ćemo opisati semantički pandan ovog pojma. Pošto se klase $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}$ i $LPP_{1,\sigma}$ valjanih (zadovoljivih) formula poklapaju, analiziraćemo samo klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela.

Definicija 2.18 Formula α je *semantička posledica skupa formula* T ($T \models \alpha$) ako u svakom svetu w svakog $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela M, ako $w \models T$, onda $w \models \alpha$.

Definicija 2.18 odgovara pojmu *lokalne posledice* koji je za modalne logike definisan u [33]. Pojam posledice je jedan od osnovnih logičkih pojmova kojim se izražava da nešto sledi iz nečega. Posledice se mogu opisati sintaksno, kao u definiciji 2.6 ili semantički, kao u definiciji 2.18. U sledećoj teoremi ćemo pokazati da su ta dva pristupa ekvivalentna.

Teorema 2.19 $T \models \alpha$ ako i samo ako $T \vdash \alpha$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $T \models \alpha$. To znači da $T \cup \{\neg\alpha\}$ nije zadovoljiv, pa ni konzistentan, tj. $T, \neg\alpha \vdash \bot$. Prema teoremi dedukcije je $T \vdash \neg\alpha \rightarrow \bot$, odnosno $T \vdash \alpha$.
($\Leftarrow$) Neka je $T \vdash \alpha$. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po dužini izvođenja α iz T. Ako je izvođenje dužine 1, α je bilo aksioma, bilo pripada skupu T. U oba slučaja tvrđenje trivijalno važi. Neka se α izvodi iz T u k koraka i neka tvrđenje važi za sve kraće dokaze iz T. α ponovo može biti aksioma ili pripadati skupu T, u kom slučaju je dokaz završen. Konačno, α može biti dobijeno primenom nekog od pravila izvođenja na prethodne formule u dokazu. Pretpostavimo da je to pravilo 1, u kom slučaju za neku formulu β, imamo $T \models \beta$ i $T \models \beta \rightarrow \alpha$, odakle sledi da $T \models \alpha$. Slično, ako je za formulu α oblika $\beta \rightarrow P_{\geq s}\gamma$ razmatrana primena pravila 3 na formule oblika $\beta \rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$, važi da je $T \models \beta \rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$ za svaki prirodan broj $k > \frac{1}{s}$. Zbog osobina verovatnoće, u svakom svetu w u kome važe sve takve formule, važi i formula α, pa $T \models \alpha$. Konačno, ako je α dobijena primenom pravila verovatnosne necesitacije 2, ona je teorema, pa je ponovo $T \models \alpha$. ■

2.1.8 Kompaktnost

U ovom odeljku, kao i u 2.1.7, svi semantički pojmovi se odnose na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela.

Razmotrimo skup formula

$$T = \{P_{<\frac{1}{n}}\alpha : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg P_{=0}\alpha\}.$$

Da bi se pokazalo da je svaki konačan podskup T_0 ovog skupa zadovoljiv, dovoljno je posmatrati dvočlani model u kome je skup svetova $W = \{w_1, w_2\}$, pri čemu je $w_1 \not\models \alpha$ i $w_2 \models \alpha$, a u svetu w_1 definisati

$$\mu(w_1)(\{w' : w' \in W(w_1), w' \models_M \alpha\}) = \mu(w_1)(\{w_2\}) = \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{n} : P_{<\frac{1}{n}}\alpha \in T_0\}$$

Međutim, ceo skup T nije zadovoljiv pošto za bilo koju nenultu meru skupa svetova u kojima važi α, $\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \alpha\}) = c$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{1}{n} < c$. Dakle, teorema kompaktnosti

Teorema 2.20 (Kompaktnost) Ako je T skup formula jezika $\mathcal{L}(LPP_1)$ i svaki konačan podskup od T je zadovoljiv, tada je i skup T zadovoljiv.

ne važi. Ovo ima za posledicu da ne postoji konačna aksiomatizacija za koju važi korektnost i jaka potpunost, što se pokazuje na sledeći način. Pretpostavimo da postoji konačna korektna aksiomatizacija za logiku LPP_1 za koju se može dokazati jaka potpunost. Pretpostavimo da je svaki konačan podskup beskonačnog skupa T formula zadovoljiv, dok skup T to nije. Zbog potpunosti aksiomatskog sistema, skup T nije konzistentan, pa se iz ovog skupa formula izvodi kontradikcija. Pošto je aksiomatski sistem konačan, to izvođenje je konačno. Zato postoji konačan podskup T_0 skupa T sa istom osobinom, tj. iz T_0 se izvodi kontradikcija. Odatle skup T_0 nije konzistentan. Zbog korektnosti aksiomatskog sistema T_0, suprotno pretpostavci, ne bi bio zadovoljiv.

Napomenimo da iz činjenice da teorema kompaktnosti ne važi u nekoj klasi modela aksiomatizovanoj nekim aksiomatskim sistemom, u opštem slučaju ne sledi da se za taj aksiomatski sistem ne može dokazati jaka potpunost, doduše u ondosu na neku drugu klasu modela. Primer takvog aksiomatskog sistema predstavlja modalni aksiomatski sistem G [33, 57]. Za ovaj sistem se može pokazati jaka potpunost u odnosu na jednočlanu klasu modela u kojoj se nalazi samo kanonski model za G. Međutim, u toj klasi modela važi teorema kompaktnosti. Teorema kompaktnosti ne važi u odnosu na klasu takozvanih G-modela, a kanonski model za G ne pripada klasi G-modela. U odnosu na ovu klasu modela za aksiomatski sistem G se može dokazati samo slaba potpunost.

2.1.9 Odlučivost

U dokazu odlučivosti problema zadovoljivosti i valjanosti za razmatrane klase modela koristićemo se postupcima filtracije [57] i prevođenja verovatnosnih formula u sisteme linearnih jednačina i nejednačina [30, 31, 98]. Kao i u prethodnim odeljcima analiziraćemo samo klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela.

Teorema 2.21 Formula α je $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$ zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiva u nekom konačnom $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modelu.

Dokaz. Neka je $M = \langle W, v, Prob\rangle$ jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model u čijem svetu w važi formula α. Postupkom filtracije transformisaćemo model M u konačan model u čijem jednom svetu će α takođe važiti.

Neka $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ označava skup svih potformula od α. Definisaćemo jednu relaciju ekvivalencije $\approx$ na skupu svetova W takvu da $w \approx u$ ako i samo ako za svaku formulu $\beta \in \mathrm{Subfor}(\alpha)$, $w \models \beta$ ako i samo ako $u \models \beta$. Pošto je skup $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ konačan, skup svetova W je relacijom $\approx$ podeljen u konačan broj klasa ekvivalencije. Sa C_u označimo klasu ekvivalencije kojoj pripada svet u. Filtracija modela M skupom $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ je model $M^* = \langle W^*, v^*, Prob^*\rangle$ za koji je:

- W^* sadrži tačno po jedan svet iz svake od klasa ekvivalencije količničkog skupa $W_{/\approx}$,
- za svaki $w \in W^*$, $v^*(w)(p) = v(w)(p)$,
- za svaki $w \in W^*$, $W^*(w) = \{u : (\exists v \in C_u) v \in W(w)\}$,
- za svaki $w \in W^*$, $H^*(w) = 2^{W^*(w)}$,
- za svaki $w \in W^*$, $\mu^*(w)(u) = \mu(w)(C_u \cap W(w))$, dok je za svaki $D \in H^*(w)$, $\mu^*(w)(D) = \sum_{u \in D} \mu(w)(C_u \cap W(w))$.

Pošto je

$$\mu^*(w)(W^*(w)) = \sum_{u \in W^*(w)} \mu(w)(C_u \cap W(w)) = \sum_{C_u \in W_{/\approx}} \mu(w)(C_u \cap W(w)) = 1$$

$\mu^*(w)$ jeste verovatnoća. Prema načinu definisanja modela M^*, ovaj model jeste $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model.

Jednostavnom indukcijom po složenosti formula iz skupa $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ dokazuje se da za svaki svet $w \in W^*$ i svaku formulu $\beta \in \mathrm{Subfor}(\alpha)$, $w \models_M \beta$ ako i samo ako $w \models_{M^*} \beta$, čime se dokazuje polazno tvrđenje. Slučajevi iskaznih slova i klasičnih operatora su trivijalni. Neka je formula $\beta = P_{\geq s}\gamma$. Pošto je i $\gamma \in \mathrm{Subfor}(\alpha)$ važi sledeće:

$w \models_M P_{\geq s}\gamma$ ako i samo ako

$s \leq \mu(w)(\{u : u \in W(w), u \models_M \gamma\})$ ako i samo ako

$s \leq \sum_{C_u \models \gamma} \mu(w)(C_u \cap W(w))$ ako i samo ako

$s \leq \sum_{C_u \models \gamma, u' \in C_u \cap W^*} \mu^*(w)(u')$ ako i samo ako

$s \leq \mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), u \models_M^* \gamma\})$ ako i samo ako

$w \models_{M^*} P_{\geq s}\gamma$. ■

Primetimo da postupak filtracije nije dovoljan za dokazivanje odlučivosti, pošto zbog verovatnosne komponente u $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modelima, broj modela sa konačnim brojem svetova (> 2) nije konačan. Zato se u poslednjem koraku dokaza koristi prevođenje formula u sistem linearnih jednačina i nejednačina.

Teorema 2.22 Problemi zadovoljivosti i valjanosti za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$ su odlučivi.

Dokaz. Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model u čijem svetu w važi formula α i neka $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ označava skup svih potformula od α. U svakom svetu w važi tačno jedna formula oblika

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \neg\gamma_m$$

gde je $\mathrm{Subfor}(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. Nazovimo tu formulu karakteristična formula sveta w. Neka je $k = n + m$. Postupkom filtracije obezbeđeno je da postoji $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model sa najviše 2^k svetova, tako da formula α važi u bar jednom svetu tog modela. Za svaki prirodan broj $l \leq 2^k$ razmotrićemo modele sa l svetova. U svakom od tih svetova važiće tačno jedna karakteristična formula. Dakle, za svaki l razmotrićemo sve skupove od l karakterističnih formula koje su iskazno nekontradiktorne i od kojih bar jedna formula sadrži polaznu formulu α. Zapravo, ovde je reč o multiskupovima pošto se ista karakteristična formula može pojaviti više puta. Ti skupovi u potpunosti opisuju model. Za svaki takav izbor i za svaki svet w_i (tj. odgovarajuću karakterističnu formulu α_i) posmatraćemo sledeći skup linearnih jednačina i nejednačina ($\beta \in \alpha_j$ označava da je β konjunkt u α_j):

$\sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(w_j) = 1$

$\mu(w_i)(w_j) \geq 0$, za sve $j = 1, l$

$\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j} \mu(w_i)(w_j) \geq r$, ako $P_{\geq r}\beta \in \alpha_i$

$\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j} \mu(w_i)(w_j) < r$, ako $\neg P_{\geq r}\beta \in \alpha_i$

Prva jednačina znači da je za svaki svet w_i verovatnoća skupa svih svetova jednaka 1, a nejednačine iz drugog reda da su verovatnoće svetova nenegativne. Trećom, odnosno četvrtom, grupom nejednačina tvrdi se da su sve verovatnosne formule oblika $P_{\geq r}\beta$, odnosno $\neg P_{\geq r}\beta$, koje se javljaju kao konjunkcije u karakterističnoj formuli α_i zadovoljene. Unija ovih linearnih jednačina i nejednačina predstavlja jedan sistem linearnih jednačina i nejednačina čije rešavanje je odlučiv problem. Ako je sistem za fiksirane l i izbor karakterističnih formula zadovoljiv, u svakom od l svetova se mogu definisati verovatnosni prostori i u bar jednom svetu važi polazna formula α, odnosno α je $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-zadovoljiva. Ako za neke fiksirane l i izbor karakterističnih formula odgovarajući sistem nije rešiv, tada ne postoji model sa najviše l svetova takav da u i-tom svetu važi karakteristična formula α_i. Ako ni za koje fiksirane l i izbor karakterističnih formula odgovarajući sistem nije rešiv, prema teoremi 2.21 formula α nije $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-zadovoljiva.

Pošto se opisanim postupkom razmatra samo konačno mnogo sistema linearnih jednačina i nejednačina, problem zadovoljivosti je odlučiv, pošto je neka formula α $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-valjana ako i samo ako $\neg\alpha$ nije $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-zadovoljiva, odlučiv je i problem valjanosti. ■

Na slici 2.1 dajemo i jedan programski zapis visokog nivoa opisane procedure odlučivanja.

```
procedure zadovoljivost(α);
begin
    k := broj elemenata skupa Subfor(α);
    for l = 1 to 2^k do
    begin
        for svi izbori l karakteristicnih formula do
        begin
            if neka formula je iskazno kontradiktorna then go to kraj;
            if bar jedna formula ne sadrzi α then go to kraj;
            SISTEM := generisi_sistem(izbor karakteristicnih formula);
            RESENJE:= resenje_sistema(SISTEM);
            if RESENJE ≠ ∅
            then
                begin
                    write(Formula α je zadovoljiva.);
                    exit;
                end;
kraj:   end;
    end;
    write(Formula α nije zadovoljiva.);
end.
```

Slika 2.1. Procedura odlučivanja za LPP_1.

2.1.10 Komentar dokaza teoreme potpunosti

U dokazu teorema potpunosti 2.15, 2.16 i 2.17 iskorišteni su elementi koji se javljaju u dokazima potpunosti kod klasičnih logika i kod modalnih logika. U aksiomatskim sistemima normalnih modalnih logika postoji pravilo necesitacije (iz α izvesti $\Box\alpha$) [57], kojem kod logike LPP_1 odgovara pravilo izvođenja 3. U modalnim logikama se obično ne koristi izvođenje iz skupa formula pošto bi se, ako se primena pravila necesitacije ne ograniči, moglo doći do sledeće situacije:

$\alpha \vdash \alpha$

$\alpha \vdash \Box\alpha$, prema pravilu necesitacije

$\vdash \alpha \to \Box\alpha$, ako važi teorema dedukcije

u kojoj je, suprotno osnovnim načelima modalne logike, formula koja počinje modalnim operatorom $\Box$ istinitosno-funkcionalno definabilna u odnosu na svoje potformule. Naravno, ova konstrukcija je samo hipotetička pošto teorema dedukcije ne važi u ovakvoj formi izvođenja bez ograničenja. U modalnim logikama se zato konzistentnost uglavnom definiše na način koji obezbeđuje da se teorema dedukcije ne koristi u dokazu potpunosti. To se postiže time što se konzistentnost, kao sintaksni pandan semantičkom pojmu zadovoljivosti, uvodi, ne preko izvođenja iz skupa formula, već na sledeći način:

- Konačan skup forumula $T = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ je nekonzistentan ako je $\vdash \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, inače je konzistentan.

- Beskonačan skup formula je nekonzistentan ako ima konačan nekonzistentan podskup, inače je konzistentan.

Očigledno je da se ova definiciji suštinski oslanja na konačnost izvođenja u normalnim modalnim logikama. Sa stanovišta verovatnosne logike LPP_1 ovakav pristup nije moguć jer dokazi mogu biti i beskonačni, tako da postoje skupovi formula, poput skupa iz odeljka 2.1.8, čiji su svi konačni podskupovi zadovoljivi, pa i konzistentni, ali koji sami nisu zadovoljivi. Da bi se izbegao očigledan problem da nezadovoljivi skupovi mogu biti konzistetni, mora se primeniti drugačiji postupak. U klasičnoj logici se potpunost dokazuje uz pomoć teoreme dedukcije, a konzistentost se definiše preko izvođenja iz skupa formula, slično kao i u definiciji 2.7.

Dakle, postupak koji smo koristili u odeljku 2.1.6 je rezultat kompromisa: uz ograničenu upotrebu pravila verovatnosne necesitacije, zadržali smo definicije pojmova izvođenja iz skupa formula i konzistentnosti koji su pogodni za aksiomatski sistem sa beskonačnim dokazima.

Sličnim problemom su se za beskonačne modalne logike, koliko nam je poznato, bavili samo Göran Sundholm u [114] i Krister Segerberg u [111], pri čemu je [111] uopštenje [114]. Rešenja koja su ponuđena se značajno razlikuju od našeg, naime njihovi aksiomatski sistemi su u stvari jedna vrsta sistema prirodne dedukcije u [114], odnosno sekventnog računa u kome se sa leve strane znaka $\vdash$ mogu nalaziti i beskonačni skupovi formula [111], recimo:

- iz $\Gamma \vdash \alpha$ izvesti $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$,

gde je $\Box\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} = \{\Box\alpha_1, \Box\alpha_2, \ldots\}$. U oba se rada se takođe zaobilazi teorema dedukcije, pa su i dokazi teorema potpunosti u osnovi drugačiji od ovde predstavljenog.

Za kraj primetimo da se u dokazu teoreme jake potpunosti za logiku $LPP_1^{\mathrm{FR(n)}}$ za koju važi kompaktnost i koja ima konačan aksiomatski sistem može koristiti postupak analogan onom kod modalnih logika, kao što je to učinjeno u [80].

2.1.11 Jedno proširenje logike LPP_1

U [30, 31] se izlažu verovatnosne logike slične logici LPP_1 u kojima se umesto verovatnosnih operatora koriste takozvani težinski termi. Osnovni težinski term je izraz $w(\alpha)$. Težinski termi su linearne kombinacije $a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k)$, gde su $a_1, \ldots, a_k$ racionalni brojevi. LPP_1-formula $P_{\geq s}\alpha$ se zapisuje kao $w(\alpha) \geq s$. Osnovna težinska formula je izraz oblika

$$a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$$

gde su $a_1, \ldots, a_k, c$ racionalni brojevi. Težinske formule se dobijaju primenom opratora $\neg$ i $\wedge$ na osnovne težinske formule. Kao što je već rečeno za ove logike je u [30, 31] pokazana slaba potpunost.

U ovom odeljku ćemo pokazati da ovo sintaksno proširenje nije esencijalno, zapravo da u dokazu jake potpunosti ne sprečava primenu postupka koji smo prikazali u odeljku 2.1.6.

Najpre je potrebno na jasan način proširiti jezik i pravila za formiranje formula. U definiciji zadovoljivosti novi korak predstavlja:

- $w \models a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$ ako i samo ako $\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(w)(\{w' : w' \models \alpha_i\}) \geq s$.

U aksiomatskom sistemu Ax_{LPP_1} aksiome i pravila izvođenja se ne menjaju, sem što se u njima javljaju formule formirane u skladu sa novim pravilima. Recimo, aksioma 2 i pravilo izvođenja 3 se sada zapisjuju kao:

- $w(\alpha) \geq 0$, odnosno
- iz $\beta \rightarrow t \geq s - \frac{1}{k}$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \rightarrow t \geq s$, gde je t težinski term.

Jedina suštinska promena u sistemu Ax_{LPP_1} je dodavanje novih aksioma koje se odnose na rezonovanje o linearnim nejednačinama [30]. Primer aksioma iz ovog skupa aksioma predstavljaju:

- $(t \geq c) \rightarrow (t > d)$, za $c > d$
- $((a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c) \wedge (a'_1 w(\alpha_1) + \ldots + a'_k w(\alpha_k) \geq c')) \rightarrow$
$((a_1 + a'_1) w(\alpha_1) + \ldots + (a_k + a'_k) w(\alpha_k) \geq (c + c'))$

Do jedinog novog koraka u dokazu jake potpunosti se dolazi u teoremi 2.15 kada treba pokazati da za osnovnu težinsku formulu α važi $w \models \alpha$ ako i samo ako $\alpha \in w$.

Teorema 2.23 Neka je M kanonski model definisan kao što je prethodno opisano i $\alpha = a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$ osnovna težinska formula. Za svaki svet w modela M važi $w \models \alpha$ ako i samo ako $\alpha \in w$.

Dokaz. Pretpostavimo da je za sve formule čija je složenost manja od složenosti formule α dokazano analogno tvrđenje i da je, kao i u teoremi 2.15, tvrđenje dokazano za slučaj osnovnih težinskih formula u kojima je $k = 1$, tj. formula oblika $w(\alpha_1) \geq c$. U dokazu tvrđenja ćemo korstiti indukciju po broju osnovnih težinskih terma u formuli.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da $\alpha \in w$ i da je tvrđenje dokazano za sve osnovne težinske formule sa manje od k osnovnih težinskih terma. Neka je $\alpha = a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$, $a_k > 0$ i neka je verovatnoća takva da je $\mu(w)\{w' : w' \models \alpha_i\} = \mu(w)([\alpha_i]) = s_i$, za $i = 1, k$. Za svaki racionalan broj $r_k \geq s_k$:

$\sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) + a_k w(\alpha_k) \geq c \in w$,

$\sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k w(\alpha_k) \in w$,

$\sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k r_k \in w$,

$w \models \sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k r_k$, prema indukcijskoj pretpostavci,

$\sum_{i=1}^{k-1} a_i\mu(w)([\alpha_i]) \geq c - a_k r_k$.

Kako je $\mu(w)([\alpha_k]) = s_k$, to je:

$\sum_{i=1}^{k} a_i\mu(w)([\alpha_i]) \geq c - a_k r_k + a_k s_k$ i

$\sum_{i=1}^{k} a_i\mu(w)([\alpha_i]) \geq c + a_k(s_k - r_k)$,

a pošto je r_k proizvoljno blisko s_k važi i

$\sum_{i=1}^{k} a_i\mu(w)([\alpha_i]) \geq c$.

Dakle, $w \models \sum_{i=1}^{k} a_i w(\alpha_i) \geq c$. Analogno se zaključuje i ako je $a_k < 0$, pri čemu se biraju racionalni brojevi $r_k \leq s_k$.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da $w \models \alpha$ i da je tvrđenje dokazano za osnovne težinske formule sa manje od k osnovnih težinskih terma. Neka je $\alpha = a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$, $a_k > 0$ i neka je verovatnoća takva da je $\mu(w)([\alpha_i]) = s_i$, za $i = 1, k$. Tada važi:

$w \models \sum_{i=1}^{k} a_i w(\alpha_i) \geq c$,

$w \models \sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k s_k$,

$\sum_{i=1}^{k-1} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k s_k \in w$, prema indukcijskoj pretpostavci.

Takođe, po indukcijskoj pretpostavci, za svaki racionalan broj $r_k \leq s_k$ je:

$w(\alpha_k) \geq r_k \in w$,

odakle važi:

$\sum_{i=1}^{k} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k(s_k - r_k) \in w$.

Sada možemo izabrati niz $\{r_k^n\}_n$ racionalnih brojeva takvih da je $0 < s_k - r_k^n \leq \frac{1}{n}$ i da sve formule oblika $\sum_{i=1}^{k} a_i w(\alpha_i) \geq c - a_k(s_k - r_k)$ pripadaju w. Prema teoremi 2.12.7 tada je

$\sum_{i=1}^{k} a_i w(\alpha_i) \geq c \in w$.

Ponovo, za $a_k < 0$ bira se niz racionalnih brojeva $\{r_k^n\}_n$ za koje je $r_k^n \geq s_k$. ■

2.2 Logika $LPP_1^{\mathrm{FR(n)}}$

U ovom odeljku ćemo razmatrati restrikciju logike LPP_1 u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom, što za posledicu ima važenje teoreme kompaktnosti i mogućnost davanja konačne aksiomatizacije za koju važi jaka potpunost. U [28, 53, 54] razmatrana je slična logika uz dodatnu pretpostavku da nema nepraznih skupova svetova čija je verovatnoća 0. U [28] je data aksiomatizacija za koju je dokazana teorema jake potpunosti, dok je u [53, 54], iako se ne vide razlozi, dokazana samo obična potpunost. Logiku koja se od ovde predstavljene razlikuje u tome što su dozvoljeni samo verovatnosni operatori oblika $P_{\geq s}$ za s iz fiksiranog ranga verovatnoća prikazali smo u [80] pod imenom LPP_{ext}. Dokaz potpunosti dat u [80] je u skladu sa standardnim dokazima potpunosti u modalnim logikama (odeljak 2.1.10), dok ćemo ovde skicirati dokaz po istom principu kao i za logiku LPP_1.

Neka je $n > 0$ prirodan broj i Range $= \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Ako je $s \in [0, 1)$, s^+ označava $\min\{r \in \text{Range} : s < r\}$. Ako je $s \in (0, 1]$, $s^- = \max\{r \in \text{Range} : s > r\}$. Na dalje ćemo koristiti definicije koje su date u odeljku 2.1 uz jedino ograničenje da je kodomen verovatnoća u modelima upravo skup Range, odnosno da se u definiciji verovatnosnog modela 2.1 zahteva da za verovatnoće $\mu(w)$ važi $\mu(w) : H(w) \rightarrow \text{Range}$. Analogno postupku iz odeljka 2.1, definišu se klase modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR(n)}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{1,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$. Primetimo da se za svaki izbor n dobijaju različite logike, tako da se u ovom odeljku analizira zapravo cela jedna klasa logika, pri čemu se definicije i tvrđenja iskazuju posebno za svakog predstavnika te klase.

Aksiomatski sistem, $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$, sadrži sve aksiome kao i sistem Ax_{LPP_1}, kao i pravila izvođenja 1 i 2, a takođe i sledeću aksiomu:

(7) $P_{>s}\alpha \to P_{\geq s^+}\alpha$

Pošto jedino beskonačno pravilo iz Ax_{LPP_1} (3) nije uključeno u $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$, ovaj novi sistem je konačan, a nizovi formula u dokazima mogu biti samo konačni. Aksioma 7 se javlja i u [28, 53, 54]. Sledećom teoremom se pokazuje da aksioma 7 garantuje da je kodomen verovatnoća upravo skup Range.

Teorema 2.24 1. $\vdash P_{<r}\alpha \to P_{\leq r^-}\alpha$,

2. $\vdash P_{>r}\alpha \leftrightarrow P_{\geq r^+}\alpha$,

3. $\vdash P_{\leq r^-}\alpha \leftrightarrow P_{<r}\alpha$,

4. $\vdash \bigvee_{s\in \mathrm{Range}} P_{=s}\alpha$,

5. $\vdash \underline{\bigvee}_{s\in \mathrm{Range}} P_{=s}\alpha$, gde $\underline{\vee}$ označava ekskluzivnu disjunkciju.

Dokaz. 1. Razmatrana formula je samo drugačiji zapis aksiome 7 jer $P_{>r}\alpha = \neg P_{\leq r}\alpha = \neg P_{\geq 1-r}\neg\alpha$ $= P_{<1-r}\neg\alpha$, i $P_{\geq r^+}\alpha = P_{\geq 1-(1-r^+)}\alpha = P_{\leq 1-r^+}\neg\alpha = P_{\leq (1-r)^-}\neg\alpha$.
2. Formula se dobija iz aksioma 7 i 3'.
3. Formula se dobija iz aksiome 3 i teoreme 2.24.1.
4. Iz $\neg P_{>1}\alpha = P_{\leq 1}\alpha$ sledi da je $\vdash (P_{\geq 1}\alpha \vee \neg P_{\geq 1}\alpha) \wedge \neg P_{>1}\alpha$. Zato je $\vdash (P_{\geq 1}\alpha \wedge \neg P_{>1}\alpha) \vee (\neg P_{\geq 1} \wedge \neg P_{>1}\alpha)$. Iz $P_{\geq 1}\alpha \wedge \neg P_{>1}\alpha = P_{=1}\alpha$ i $\vdash P_{<1}\alpha \to P_{\leq 1}\alpha$ sledi $\vdash P_{=1}\alpha \vee P_{<1}\alpha$. Iz $\vdash P_{<1}\alpha \leftrightarrow ((P_{\geq 1^-}\alpha \vee \neg P_{\geq 1^-}\alpha) \wedge P_{<1}\alpha)$, $\vdash (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s^-}\alpha) \leftrightarrow (P_{<s^-}\alpha \to P_{<s}\alpha)$ imamo da je $\vdash P_{<1}\alpha \leftrightarrow ((P_{\geq 1^-}\alpha \wedge \neg P_{>1^-}\alpha) \vee (P_{<1^-}\alpha \wedge P_{<1}\alpha))$ i $\vdash P_{=1}\alpha \vee P_{=1^-}\alpha \vee P_{<1^-}\alpha$. Na takav način se dobija $\vdash (\bigvee_{s\in \mathrm{Range}} P_{=s}\alpha) \vee P_{<0}\alpha$. Konačno, pošto je $\vdash \neg P_{<0}\alpha$ imamo da je $\vdash \bigvee_{s\in \mathrm{Range}} P_{=s}\alpha$.
5. Iz $P_{=r}\alpha = P_{\geq r}\alpha \wedge \neg P_{>r}\alpha$ i aksiome 3 sledi $P_{=r}\alpha \to \neg P_{=s}\alpha$, za $s > r$. Slično, iz aksiome 3' sledi $P_{=r}\alpha \to \neg P_{=s}\alpha$, za $s < r$. Odatle je $\vdash P_{=r}\alpha \to \neg P_{=s}\alpha$, za $r \neq s$ i $\vdash \underline{\bigvee}_{s\in \mathrm{Range}} P_{=s}\alpha$. ■

Dokazi teorema potpunosti za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR(n)}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{1,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$ se sprovode kao i u odeljku 2.1, uz jasno ograničenje da su izvođenja konačna. Tako se u konstrukciji maksimalno konzistentog proširenja konzistentnog skupa formula ne koristi korak 4. Prema teoremi 2.24.5 jedino elementi skupa Range mogu biti supremumi skupova oblika $\{r : P_{\geq r}\alpha \in \overline{T}\}$. Pošto je Range konačan skup, u kanonskom modelu verovatnoće se definišu sa:

- $\mu(w)([\alpha]) = \max\{r : r \in \mathrm{Range}, P_{\geq r}\alpha \in w\}$.

Analogani teorema 2.14 do 2.17 se dokazuju kao i malopre.

Pošto je aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ konačan, dokazi potpunosti se mogu sprovesti i na drugi način, u skladu sa postupkom dokazivanja potpunosti u modalnim logikama [80]. Ovaj postupak ćemo skicirati u odeljku 6.2.2.

Konačno, na osnovu teorema jake potpunosti sledi teorema kompaktnosti koja u slučaju logika iz odeljka 2.1 nije važila.

Teorema 2.25 (Kompaktnost) Neka je L bilo koja od razmatranih klasa modela: $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR(n)}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{1,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$ i neka je T skup formula. Ako je svaki konačan podskup od T L-zadovoljiv i skup T je L-zadovoljiv.

Dokaz. Neka T nije L-zadovoljiv, onda $T \vdash \bot$. Pošto je aksiomatski sistem konačan, postoji konačan podskup T_0 od T takav da je $T_0 \vdash \bot$. Suprotno pretpostavci, taj skup ne bi bio konzistentan, pa ni zadovoljiv. ■

Primetimo da je za dokaz odlučivosti problema zadovoljivosti i valjanosti u odnosu na klase merljivih $LPP_1^{\mathrm{FR(n)}}$-modela dovoljno koristiti postupak filtracije iz teoreme 2.21 jer je broj odgovarajućih modela sa najviše 2^k svetova (za neko fiksirano k) konačan.

2.3 Logika LPP_2

Logika LPP_2 se od logike LPP_1 razlikuje utoliko što nisu dozvoljene iteracije verovatnosnih operatora i mešanje verovatnosnih i klasičnih formula. Slično kao i u odeljku 2.1, i za logiku LPP_2 je data konačna aksiomatizacija korišćenjem rezonovanja o linearnim nejednačinama, pri čemu je, opet, dokazana samo slaba potpunost [30]. Razlog za proučavanje ove logike, je u tome da se u njoj još uvek može rezonovati o verovatnoćama (samo prvog reda), ali na jednostavniji način nego u logici LPP_1. Složenost problema zadovoljivosti logike LPP_2 jednaka je složenosti tog problema u klasičnoj iskaznoj logici [30]. Za LPP_2, kao i za LPP_1, ne važi teorema kompaktnosti. To se može dokazati istim postupkom kao i u odeljku 2.1.8. U dokazu potpunosti ćemo koristiti kombinaciju metoda iz [98] i odeljka 2.1.

2.3.1 Jezik i formule

Jezik $\mathcal{L}(LPP_2)$ se poklapa sa jezikom $\mathcal{L}(LPP_1)$. Razlika se javlja kod pravila za formiranje formula. Skup $\mathrm{For_C}(LPP_2)$ klasičnih iskaznih formula ovog jezika je uobičajeni najmanji skup formula koji sadrži iskazna slova i zatvoren je za pravila: ako su A i B formule, formule su i $\neg A$ i $A \wedge B$. Skup $\mathrm{For_P}(LPP_2)$ verovatnosnih formula ovog jezika je najmanji skup formula koji ispunjava:

- Ako je A klasična iskazna formula i $s \in S$, onda je $P_{\geq s}A$ verovatnosna formula.
- Ako su α i β verovatnosne formule, verovatnsne formule su i $\neg\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$.

Konačno, skup $\mathrm{For}(LPP_2)$ formula ovog jezika je jednak $\mathrm{For_C}(LPP_2) \cup \mathrm{For_P}(LPP_2)$. Formule iz $\mathrm{For_C}(LPP_2)$ ćemo označavati velikim slovima abecede: A, B, C, ... Formule iz $\mathrm{For_P}(LPP_2)$ ćemo označavati malim slovima grčkog alfabeta: α, β, γ, ... Formule iz $\mathrm{For}(LPP_2)$ ćemo označavati velikim slovima grčkog alfabeta: Φ, Ψ, ... Kao i u odeljku 2.1, preostali klasični i verovatnosni operatori se uvode kao skraćenice. Primeri formula su: $P_{\geq\frac{1}{2}}p_1 \wedge \neg P_{\geq 1}p_2$ i $p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_1)$, dok nije formula sledeći niz simbola $P_{\geq\frac{1}{3}}(p_1 \wedge \neg P_{\geq\frac{9}{11}}p_2) \wedge p_3$, jer se u njemu pojavljuju iteracija verovatnosnih operatora i mešanje klasičnih i verovatnosnih formula.

2.3.2 Klase modela

LPP_2-modeli, za razliku od LPP_1-modela, sadrže samo jednu globalnu verovatnoću, a ne po jednu verovatnoću za svaki svet.

Definicija 2.26 *Verovatnosni model* je struktura $M = \langle W, v, H, \mu\rangle$, gde su:

- W je neprazan skup svetova,
- $v : W \times \phi \mapsto \{\top, \bot\}$ je iskazna valuacija koja svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje $\top$ ili $\bot$ i
- H je algebra podskupova od W i

- μ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na H.

Valuacija v se na standardni način proširuje do istinitosne funkcije definisane na svim klasičnim iskaznim formulama, tako da se svetovi ovako definisanih modela mogu shvatiti kao iskazne interpretacija nad kojima je definisana verovatnoća. Ako je A klasična iskazna formula i w svet nekog LPP_2-modela, sa $w \models A$ označavamo da je A zadovoljena pri interpretaciji w. Isti simbol ($\models$) koristićemo i da označimo relaciju zadovoljivosti koja je u ovom slučaju definisana između modela i formula, a ne između svetova i formula kako je to bio slučaj kod logika LPP_1 i $LPP_1^{\mathrm{FR(n)}}$ ili kod modalnih logika [57].

Definicija 2.27 Neka je $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ proizvoljan LPP_2-model. Formula Φ je *zadovoljena* u modelu M, u oznaci $M \models \Phi$, ako važi:

- ako je $\Phi \in \mathrm{For_C}(LPP_2)$, $M \models \Phi$ ako i samo ako za svaki svet $w \in W$, $w \models \Phi$,
- ako je Φ oblika $P_{\geq s}A$, $M \models \Phi$ ako i samo ako $\mu(\{w : w \in W, w \models A\}) \geq s$,
- ako je Φ oblika $\neg\alpha$, gde je $\alpha \in \mathrm{For_P}(LPP_2)$, $M \models \Phi$ ako i samo ako nije $M \models \alpha$ i
- ako je Φ oblika $\alpha \wedge \beta$, gde su $\alpha, \beta \in \mathrm{For_P}(LPP_2)$, $M \models \Phi$ ako i samo ako $M \models \alpha$ i $M \models \beta$.

Definicija 2.28 Formula Φ je *zadovoljiva* ako postoji model u kome je Φ zadovoljeno. Formula je *valjana* u nekoj klasi modela ukoliko je zadovoljena u svakom modelu te klase. Skup formula T je *zadovoljiv* ako postoji model u kome su zadovoljene sve formule iz skupa.

Primetimo da se klasične iskazne formule u definiciji 2.27 ne ponašaju na uobičajeni način. Recimo, moguće je da za neku iskaznu formulu A i neki LPP_2-model M nije ni $M \models A$, ni $M \models \neg A$. Ovo se događa kada formula A važi u nekim, ali ne i u svim, svetovima modela M. Slično, moguće je i da $M \models A \vee B$, ali da nije ni $M \models A$, ni $M \models B$. Dovoljno je za B uzeti $\neg A$ i situacija se svodi na prethodnu. Međutim, pošto je svaki svet svakog modela jedna klasična iskazna interpretacija, sve iskazne tautologije i samo one su klasične valjane formule u smislu definicije 2.28.

Kao i do sada, razmatraćemo samo merljive modele.

Definicija 2.29 LPP_2-model $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ je *merljiv* ako je za svaku klasičnu formulu A ispunjeno:

$$\{w \in W : w \models A\} \in H.$$

Klasu merljivih modela označićemo sa $LPP_{2,\mathrm{Meas}}$, a ponovo ćemo razmatrati i dve njene potklase: $LPP_{2,\mathrm{All}}$ i $LPP_{2,\sigma}$ koje sadrže modele u kojima su svi podskupovi svetova merljivi, odnosno u kojima je verovatnoća σ-aditivna .

2.3.3 Aksiomatizacija

Interesantno je da se za aksiomatizovanje logike LPP_2 koristi isti aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} kao i u odeljku 2.1.4, uz jasno ograničenje da instance aksioma moraju biti u skladu sa pravilima za formiranje formula, odnosno da se u jednoj formuli ne smeju mešati klasične i verovatnosne formule, kao i da nisu dozvoljene formule u kojima se javlja iteracija verovatnosnih operatora. Na primer, pravilo verovatnosne necesitacije 2 se sme primeniti samo na klasične formule. Definicija 2.5 pojmova teorema i dokaza iz odeljka 2.1.4 se i ovde koristi, dok u definiciji sintaksne posledice 2.6 nema ograničenja na primene pravila 2. Dokazi se sastoje iz dva nivoa. Na prvom nivou se radi sa klasičnim formulama, a zatim se, uz eventualno korišćenje pravila 2 verovatnosne necesitacije, prelazi na drugi nivo u kome se manipuliše samo sa verovatnosnim formulama. Ovo za posledicu ima da se pojmovi konzistentnosti i maksimalne konzistentnosti definišu nešto drugačije nego što se to standardno radi.

Definicija 2.30 Skup formula T je *konzistentan* ako postoje bar jedna formula $A \in \mathrm{For_C}(LPP_2)$ takva da nije $T \vdash A$ i bar jedna formula $\alpha \in \mathrm{For_P}(LPP_2)$ takva da nije $T \vdash \alpha$. U suprotnom, skup je *nekonzistentan*.

Definicija 2.31 Skup formula T je *maksimalno konzistentan* ako je konzistentan i zadovoljava:

- za svaku formulu $A \in \mathrm{For_C}(LPP_2)$, ako je $T \vdash A$, onda $A \in T$ i $P_{\geq 1}A \in T$ i
- za svaku formulu $\alpha \in \mathrm{For_P}(LPP_2)$ je $\alpha \in T$ ili $\neg\alpha \in T$.

Primetimo da se u definiciji 2.31 klasične i verovatnosne formule tretiraju na različiti način: za klasičnu formulu A se ne traži da bilo A, bilo $\neg A$ pripada maksimalnom konzistentnom skupu. Takav zahtev bi, kao što će se u dokazu potpunosti videti, doveo do degenerisanog modela u kome važe samo formule oblika $P_{=0}A$ i $P_{=1}A$.

2.3.4 Teoreme korektnosti i potpunosti

Teorema korektnosti koja odgovara teoremi 2.9, kao i teoreme koje odgovaraju tvrđenju 2.10 iskazuju se i dokazuju kao u odeljku 2.1. Jedini izuzetak predstavlja teorema dedukcije koja se zbog sintaksnih ograničenja logike LPP_2 formuliše na sledeći način:

Teorema 2.32 (Teorema dedukcije) Ako je T skup formula i $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ i ako su Φ i Ψ obe bilo klasične, bilo verovatnosne formule, onda je $T \vdash \Phi \to \Psi$.

a dokazuje se kao i pre.

Dokaz jake potpunosti u osnovi prati postupak iz odeljka 2.1.6, tako da ćemo ovde samo naznačiti razlike. Tako, u konstrukciji maksimalno konzistentnog proširenja konzistentog skupa postoji nekoliko novih elemenata.

Teorema 2.33 Svaki konzistentan skup formula T se može proširiti do maksimalno konzistentog skupa.

Dokaz. Neka je $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jedno nabrajanje svih verovatnosnih formula i neka je $\overline{T}^C$ skup svih klasičnih sintaksnih posledica skupa T. Definisaćemo niz skupova T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ tako da je:

1. $T_0 = T \cup \overline{T}^C \cup \{P_{\geq 1}A : A \in \overline{T}^C\}$,
2. Za svaki $i \geq 0$, ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ konzistentan, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$.
3. Za svaki $i \geq 0$, ako $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentan, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$.
4. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem formule oblika $\neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma)$, tada za neki $n \in \mathbb{N}$ skupu dodajemo i formulu $\beta \to \neg P_{\geq s - \frac{1}{n}}\gamma$, tako da T_{i+1} bude konzistentno.
5. $\overline{T} = \cup_i T_i$.

Očigledno je da se u koraku 1 dobija konzistentno proširenje skupa T, jer se ovom skupu dodaju njegove posledice. Konzistentnost svih proširenja T_i dobijenih u koracima 2, 3 i 4 se pokazuje kao i u teoremi 2.11. Konačno, treba pokazati da je skup $\overline{T} = \cup_i T_i$ dobijen u koraku 5 maksimalno konzistentno proširenje skupa T. Prema koraku 1 konstrukcije, $\overline{T}$ sadrži sve svoje klasične posledice i sve formule oblika $P_{\geq 1}A$ za $\overline{T} \vdash A$, $A \in \mathrm{For_C}(LPP_2)$. Pošto je skup T konzistentan, nisu sve klasične formule njegove posledice, pa isto važi i za $\overline{T}$. Za skup $\overline{T}$ se na isti način kao i u teoremi 2.11 pokazuje da sadrži sve svoje verovatnosne posledice, a pošto su svi T_i konzistentni ni za jednu verovatnosnu formulu α nije i α i $\neg\alpha$ u $\overline{T}$. Dakle, $\overline{T}$ je konzistentan pošto postoje bar jedna klasična formula A i bar jedna verovatnosna formula α takve da nije ni $\overline{T} \vdash A$ ni $\overline{T} \vdash \alpha$. Konačno, na osnovu koraka 2 i 3 konstrukcije, za svaku verovatnosnu formulu je bilo $\alpha \in \overline{T}$ bilo $\neg\alpha \in \overline{T}$, pa je $\overline{T}$ konzistentan skup. ■

Teorema 2.12 se formuliše i dokazuje na isti način kao i u odeljku 2.1. Kanonski model za skup T je struktura $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ u kojoj je:

- W je skup svih klasičnih interpretacija koja zadovoljavaju skup $\overline{T}^C$, $W = \{w : w \models \overline{T}^C\}$,
- v je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje samu tu interpretaciju, tj. $v(w)(p) = w(p)$ za svako iskazno slovo $p \in \phi$,
- H je klasa skupova oblika $[A] = \{w \in W : w \models A\}$, za sve klasične formule A i
- za svaki skup $[A] \in H$, $\mu([A]) = \sup\{r : P_{\geq r}A \in \overline{T}\}$.

Sada se vidi razlog zbog koga postoji nesimetričnost između klasičnih i verovatnosnih formula u definiciji 2.31 maksimalno konzistentnog skupa. Kada bi se zahtevalo da za svaku klasičnu formulu A bude bilo A, bilo $\neg A$, u maksimalnom skupu, onda bi, prema opisanoj konstrukciji, skup klasičnih interpretacija koje zadovoljavaju klasični deo maksimalnog konzistentnog skupa bio jednočlan. Mera skupa bi morala biti jedan, odakle bi za proizvoljnu klasičnu formula A važilo bilo $P_{=1}A$ bilo $P_{=0}A$.

Na dalje, teoreme koje odgovaraju tvrđenjima 2.13 i 2.14 se formulišu i dokazuju na isti način kao i u odeljku 2.1, tako da možemo formulisati teoreme jake potpunosti.

Teorema 2.34 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\mathrm{Meas}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\mathrm{Meas}}$-model.

Dokaz. Kao i u teoremi 2.15, pošto je konstruisan kanonski model M za skup T, treba indukcijom po složenosti formula pokazati da za svaku formulu Φ, $M \models \Phi$ ako i samo ako $\Phi \in \overline{T}$. Jedini novi slučaj se odnosi na klasične formule koje se ovde tretiraju drugačije nego u logici LPP_1. Dakle, neka je $\Phi = A$, $A \in \mathrm{For}_{\mathrm{C}}(LPP_2)$. Ako $A \in \overline{T}$, prema definiciji modela $M \models A$. Obrnuto, ako je $M \models A$, to znači da A zadovoljeno u svim klasičnim interpretacijama koje čine svetove modela M, pa zbog potpunosti klasičnog iskaznog računa mora biti $A \in \overline{T}^C$, a onda i $A \in \overline{T}$. ■

Teoreme

Teorema 2.35 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\mathrm{All}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\mathrm{All}}$-model.

Teorema 2.36 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\sigma}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\sigma}$-model.

se dokazuju na isti način kao i u odeljku 2.1.

2.3.5 Odlučivost

U [30, 98] je dokazano da su problemi zadovoljivosti i valjanosti za klasu merljivih LPP_2-modela odlučivi. Ovde ćemo deteljno prikazati dokaz odlučivosti za logiku LPP_2 pošto će se u narednim poglavljima na nekoliko mesta koristiti njegovi delovi, a i dokazivač teorema koji će biti opisan u poglavlju 7 se odnosi na ovu logiku.

Za klasične formule problemi zadovoljivosti i valjanosti su, naravno, odlučivi. Posmatrajmo zato proizvoljnu verovatnosnu formulu α. Klasičnim iskaznim rezonovanjem se pokazuje da je formula α ekvivalentna formuli $DNF(\alpha)$ koja je oblika:

$$\vee_{i=1}^{k} \wedge_{j=1}^{l_i} \pm P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$$

gde $\pm P_{\geq r_{ij}} A_i$, označava bilo formulu $P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$, bilo njenu negaciju. Formula α je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiv bar jedan član ove disjunkcije. Za neko fiksirano i posmatrajmo disjunkt $D_i = \wedge_{j=1}^{l_i} \pm P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$. Neka su $p_1, \ldots, p_n$ sva iskazna slova u D_i. Atomi su konjunkcije oblika $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$, a svaka klasična formula A_{ij} je ekvivalentna disjunkciji atoma koja odgovara savršenoj disjunktivnoj normalnoj formi $SDNF(A_{ij})$ formule A_{ij}. Pošto iz $\models A \leftrightarrow B$ sledi da su u svakom modelu M verovatnoće skupova svetova $\{w : w \models A\}$ i $\{w : w \models B\}$ jednake, disjunkt D_i je zadovoljiv ako i samo ako je zadovoljiva formula oblika

$$\wedge_{j=1}^{l_i} \pm P_{\geq r_{ij}} SDNF(A_{ij}).$$

Kako su svi atomi međusobno kontradiktorni verovatnoća skupa svetova koji zadovoljavaju formule oblika $SDNF(A_{ij})$ jednaka je sumi verovatnoća svetova koji zadovoljavaju pojedinačne atome iz $SDNF(A_{ij})$. Prema tome, u proizvoljnom modelu, formula $P_{\geq r_{ij}} SDNF(A_{ij})$ je zadovoljena ako i samo ako je suma verovatnoća svetova koji zadovoljavaju pojedinačne atome koji čine $SDNF(A_{ij})$ veća do jednaka sa r_{ij}. Slično, formula $\neg P_{\geq r_{ij}} SDNF(A_{ij})$ je zadovoljena ako i samo ako je suma verovatnoća svetova koji zadovoljavaju pojedinačne atome koji čine $SDNF(A_{ij})$ manja od r_{ij}. Na osnovu ovoga, da bi se ispitala zadovoljivost disjunkta D_i posmatra se jedan sistem linearnih jednačina i nejednačina u kome se za svaku formulu $P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$ koje se javlja u D_i nalazi nejednačina:

$\sum_{a \in SDNF(A_{ij})} \mu(a) \geq r_{ij}$,

a za svaku formulu $\neg P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$ koje se javlja u D_i nalazi nejednačina:

$\sum_{a \in SDNF(A_{ij})} \mu(a) < r_{ij}$,

gde $a \in SDNF(A_{ij})$ označava da se atom a javlja u $SDNF(A_{ij})$. Pored ovih nejednačina u sastav sistema ulaze i:

$\sum \mu(a) = 1$, gde se sumira po svim atomima

$\mu(a) \geq 0$, za svaki atom a.

Pošto je rešavanje sistema linearnih jednačina i nejednačina odlučiv problem, problem zadovoljivosti za svaki disjunkt, pa i za verovatnosne formule, je odlučiv. Pošto je formula valjana ako i samo ako njena negacija nije zadovoljiva, odlučiv je i problem valjanosti. U [30] je korišćenjem teorema A.84 i A.85, na osnovu dokaza odlučivosti kako je ovde predstavljen, pokazano da je problem LPP_2-zadovoljivosti NP-kompletan.

2.4 Logika $LPP_2^{\mathrm{FR(n)}}$

Logika $LPP_2^{\mathrm{FR(n)}}$ je opisana u [98, 103]. Ova logika je restrikcija logike LPP_2 na isti način kao što je u odeljku 2.2 logika $LPP_1^{\mathrm{FR(n)}}$ dobijena restrikcijom logike LPP_1. Formulacije definicija i tvrđenja, kao i dokazi, dobijaju se analognim postupkom na osnovu formulacija i dokaza iz odeljka 2.3. Dakle, i ovde važe jaka potpunost i odlučivost za klase modela $LPP_{2,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR(n)}}$, $LPP_{2,\mathrm{All}}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{2,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$.

3

Predikatska verovatnosna logika prvog reda

U ovom poglavlju ćemo nastaviti opisivanje verovatnosnih logika započeto u poglavlju 2, ali ćemo razmatrati verovatnosne logike koje su proširenja klasične logike prvog reda. Sledeći već uvedenu simboliku, logike ćemo označavati sa:

- $LFOP_1$, logika u kojoj su dozvoljene iteracije verovatnoća, mešanje iskaznih i verovatnosnih formula, a verovatnoće su realnovrednosne,

- $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$, logika koja predstavlja restrikciju logike $LFOP_1$ u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom,

- $LFOP_2$, logika koja predstavlja restrikciju logike $LFOP_1$ u kojoj nisu dozvoljene iteracije verovatnoća i mešanje iskaznih i verovatnosnih formula i

- $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$, logika koja predstavlja restrikciju logike $LFOP_2$ u kojoj su dozvoljene samo verovatnoće sa konačnim unapred fiksiranim rangom.

Logika $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ je prikazana u [98] pod imenom LP. Preostale tri logike opisane su u [84]. Koliko nam je poznato, ovo su jedine potpune aksiomatizacije verovatnosnih logika prvog reda (sa verovatnoćama definisanim nad mogućim svetovima). U [2] je interpretiranjem prirodnih brojeva u verovatnosnoj logici pokazano da skup valjanih formula verovatnosne logike prvog reda nije rekurzivno nabrojiv. Taj rezultat predstavlja zapravo samo razradu tvrđenja iz [55] da je verovatnosna logika $L_{HF,F}$ sa verovatnoćama definisanim nad domenom u kojoj su formule konačne a verovatnosni kvantifikatori racionalni Π_1^1-kompletna. Pošto je u [2] definisano utapanje logike sa verovatnosnim kvantifikatorima u logiku sa verovatnosnim operatorima, složenost skupa valjanih formula neposredno sledi. Dakle, za razliku od iskaznog slučaja, kod predikatskih verovatnosnih logika potpuna konačna aksiomatizacija nije moguća. Jedina kompletna aksiomatizacija za verovatnosne logike prvog reda je data u [47] za slučaj kada je veličina domena unapred ograničana fiksiranom konačnom konstantom, no to je logika koja se direktno prevodi u iskaznu.

Zanimljivo je da za standardne modalne verovatnosne logike prvog reda postoje konačne i potpune aksiomatizacije [40, 57, 68]. U aksiomatizacijama i dokazima koji slede iskorišteni su neki elementi iz teorije modalnih logika. Kao i u poglavlju 2, detaljno ćemo opisati najopštiju od logika, a u prikazivanju njenih restrikcija ćemo pre svega obratiti pažnju na posebnosti tih logika.

3.1 Logika $LFOP_1$

3.1.1 Jezik

Neka je S skup svih racionalnih brojeva iz $[0,1]$. Jezik $\mathcal{L}(LFOP_1)$ logike $LFOP_1$ je prebrojivo proširenje klasičnog jezika prvog reda koje sadrži za svaki prirodan broj k, k-arne relacijske simbole $P_0^k, P_1^k, \ldots$, i k-arne funkcijske simbole $F_0^k, F_1^k, \ldots$, klasične operatore $\wedge$ i $\neg$, univerzalni kvantifikator $\forall$, listu verovatnosnih operatora oblika $P_{\geq s}$ za svaki $s \in S$, promenljive $x, y, z, \ldots$, zarez i zagrade (i) [18]. Funkcijski simboli arnosti 0 se nazivaju simboli konstanti.

3.1.2 Formule

Skup Term$(LFOP_1)$ terma ovog jezika je najmanji skup koji sadrži promenljive i simbole konstanti i zatvoren je za pravilo:

- Ako su $t_1, \ldots t_k$ termi i F^k funkcijski simbol arnosti k $(k > 0)$, onda je $F^k(t_1, \ldots t_k)$ term.

Osnovni term je term koji ne sadrži promenljive. Ako su $t_1, \ldots t_k$ termi i P^k funkcijski simbol arnosti k, onda je $P^k(t_1, \ldots t_k)$ atomska formula. Skup For$(LFOP_1)$ formula ovog jezika je najmanji skup koji sadrži atomske formule i zatvoren je za pravila:

- Ako je α formula i $s \in S$, onda je $P_{\geq s}\alpha$ formula.
- Ako su α i β formule, formule su i $\neg\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$.
- Ako je α formula i x promenljiva, formula je i $(\forall x)\alpha$.

Za označavanje formula u ovom odeljku ćemo koristiti mala slova grčkog alfabeta. Druge klasične i verovatnosne operatore definišimo kao u odeljku 2.1, a egzistencijalni kvantifikator kao $(\exists x)\alpha =_{def} \neg(\forall x)\neg\alpha$. Primer formule je $P_{\geq s}(\forall x)P_1^1(x) \to P_3^2(y, F_0^0) \wedge P_{\geq r}P_{\geq t}P_1^1(F_1^0)$.

U formuli oblika $(\forall x)\alpha$ formula α je u dosegu kvantifikatora $(\forall x)$. Pojava promenljive x u formuli α je vezana ako je u delu formule α oblika $(\forall x)\beta$, inače je pojava slobodna. Formula α je rečenica ako ne sadrži slobodne pojave promenljivih. Ako je α formula i t term, kažemo da je t slobodan za promenljivu x u α ako ni jedno slobodno pojavljivanje od x nije u dosegu bilo kog kvantifikatora $(\forall y)$, gde je y promenljiva u t. Recimo, u formuli $(\forall y)P_i^2(x, y)$ sve promenljive sem y su slobodne za x. Sa $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ označavaćemo da je skup slobodnih promenljivih formule α podskup skupa $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Ako je $\alpha(x)$ formula i t term slobodan za x u α, sa $\alpha(t/x)$ ćemo označavati rezultat zamene svih slobodnih pojava promenljive x u α termom t.

3.1.3 Klase modela

U definisanju značenja formula jezika For$(LFOP_1)$ ponovo ćemo koristiti pristup zasnovan na mogućim svetovima [40, 57, 68].

Definicija 3.1 *Verovatnosni model* je struktura $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ gde:

- W je neprazan skup svetova,
- D je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje neprazan domen $D(w)$,
- I je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje klasičnu interpretaciju $I(w)$ prvog reda tako da:
  - za svako i i svaki simbol konstante F_i^0, $I(w)(F_i^0)$ je element skupa $D(w)$,
  - za svako i i k, $I(w)(F_i^k)$ je funkcija iz $D(w)^k$ u $D(w)$,

- za svako i i k, $I(w)(P_i^k)$ je k-arna relacija nad $D(w)$, tj. podskup od $D(w)^k$,

- $Prob$ je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje jedan konačno-aditivni verovatnosni prostor $\langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$ tako da:
  - $W(w)$ je podskup skupa svih svetova W,
  - $H(w)$ je algebra podskupova od $W(w)$ i
  - $\mu(w)$ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na $H(w)$.

Definicija 3.2 Neka je $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ jedan $LFOP_1$-model. *Valuacija* v pridružuje svakom paru koji se sastoji od sveta $w \in W$ i promenljive x, element domena $D(w)$, tj. $v(w)(x) \in D(w)$. Ako je $w \in W$, $d \in D(w)$ i v valuacija, sa $v_w[d/x]$ označićemo valuaciju koja se sa v poklapa svuda, sem možda za par w, x, pri čemu je $v_w[d/x](w)(x) = d$.

Definicija 3.3 Za dati $LFOP_1$-model $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ i valuaciju v, *vrednost terma* t u svetu w $(I(w)(t)_v)$ je:

- ako je t promenljiva x, onda je $I(w)(x)_v = v(w)(x)$,
- ako je t simbol konstante, onda je $I(w)(t)_v = I(w)(t)$ i
- ako je $t = F_i^m(t_1, \ldots, t_m)$, $(m > 0)$, onda je $I(w)(t)_v = I(w)(F_i^m)(I(w)(t_1)_v, \ldots, I(w)(t_m)_v)$

Definicija 3.4 Za dati $LFOP_1$-model $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ i valuaciju v, *vrednost formule* α u svetu w $(I(w)(\alpha)_v)$ je:

- ako je $\alpha = P_i^m(t_1, \ldots, t_m)$, onda je $I(w)(\alpha)_v = \top$ ako je $\langle I(w)(t_1)_v, \ldots, I(w)(t_m)_v\rangle \in I(w)(P_i^m)$, inače je $I(w)(\alpha)_v = \bot$,
- ako je $\alpha = \neg\beta$, onda je $I(w)(\alpha)_v = \top$ ako je $I(w)(\beta)_v = \bot$, inače je $I(w)(\alpha)_v = \bot$,
- ako je $\alpha = P_{\geq s}\beta$, onda je $I(w)(\alpha)_v = \top$ ako je $\mu(w)\{u \in W(w) : I(u)(\beta)_v = \top\} \geq s$, inače je $I(w)(\alpha)_v = \bot$,
- ako je $\alpha = \beta \wedge \gamma$, onda je $I(w)(\alpha)_v = \top$ ako je $I(w)(\beta)_v = \top$ i $I(w)(\gamma)_v = \top$, inače je $I(w)(\alpha)_v = \bot$ i
- ako je $\alpha = (\forall x)\beta$, onda je $I(w)(\alpha)_v = \top$ ako za svaki $d \in D(w)$, $I(w)(\beta)_{v_w[d/x]} = \top$, inače je $I(w)(\alpha)_v = \bot$.

Primetimo da, kao i u klasičnoj logici prvog reda, istinitosna vrednost neke rečenice α u nekom svetu ne zavisi od izbora valuacije [18].

Definicija 3.5 Formula α je *zadovoljena* u svetu w nekog $LFOP_1$-modela $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ ako je za neku valuaciju v, $I(w)(\alpha)_v = \top$. Formula α je *tačna* u svetu w modela M ($w \models_M \alpha$) ako je za svaku valuaciju v zadovoljena u tom svetu. Formula α je *valjana* u modelu M, ako je tačna u svakom svetu modela. Formula α je *valjana* u klasi modela C ukoliko je valjana u svakom modelu te klase. Rečenica α je *zadovoljena* u svetu w nekog $LFOP_1$-modela $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ ako je za sve valuacije v, $I(w)(\alpha)_v = \top$. Rečenica α je *zadovoljiva* ako postoji svet nekog modela u kome je α zadovoljeno. Rečenica je *valjana* u modelu M ukoliko je zadovoljena u svakom svetu tog modela. Rečenica je *valjana* u klasi modela C ukoliko je valjana u svakom modelu te klase. Skup rečenica T je *zadovoljiv* ako postoji svet nekog modela u kome su zadovoljene sve rečenice iz skupa.

Za neki $LFOP_1$-model $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ i $d \in D(w)$, sa $w \models_M \alpha(d)$ ćemo označavati da za svaku valuaciju v, $I(w)(\alpha(x))_{v_w[d/x]} = \top$, odnosno da u svetu w pri svakoj valuaciji koja svetu w i promenljivoj x dodeljuje element d domena važi interpretacija formule α. Kao i u odeljku 2.1, zajedno sa pojmom zadovoljivosti rečenica koristićemo sinonime važiti i biti tačno. Indeks koji označava model iz $\models_M$ ćemo izostavljati ako to ne izaziva dvosmislenost.

Razmotrimo formulu $P_{\geq s}P_1^1(x)$ i pretpostavimo da je za neki $LFOP_1$-model $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ i svet $w \in W$ formula tačna u w: $w \models P_{\geq s}P_1^1(x)$. Prema definicijama 3.4 i 3.5 ovo važi ako i samo ako za svaku valuaciju v, $I(w)(P_{\geq s}P_1^1(x))_v = \top$, ako i samo ako za svaku valuaciju v, $\mu(w)\{u \in W(w) : I(u)(P_1^1(x))_v = \top\} \geq s$, odnosno, ako i samo ako je mera svetova $w' \in W(w)$ takvih da kakva god da je vrednost $d = v(w)(x)$, važi $w' \models P_1^1(d)$, veća do jednaka sa s. Očigledno je da je prema definicijama formula $P_{\geq s}P_1^1(x)$ tačna u nekom svetu ako i samo ako je tačna i formula $(\forall x)P_{\geq s}P_1^1(x)$. Sa druge strane, kao što će se videti u odeljku 6.4, tačnost formule $P_{\geq s}P_1^1(x)$ ne implicira tačnost formule $P_{\geq s}(\forall x)P_1^1(x)$.

U daljem tekstu razmatraćemo kao i do sada samo merljive modele i neke njihove potklase, ali ćemo imati i dodatne zahteve u vezi domena modela i interpretacije funkcijskih simbola. Razloge za ovakve restrikcije i mogućnost njihovog slabljenja ćemo obrazložiti u odeljku 3.1.7.

Definicija 3.6 $LFOP_1$-model M je *merljiv* ako je za svaki svet w tog modela i svaku formulu α ispunjeno:

$$\{w' \in W(w) : w' \models \alpha\} \in H(w).$$

Model je sa *fiksiranim domenom* ako je za sve svetove w i u, $D(w) = D(u)$. Model je sa *rigidnim termima* ako je za sve svetove w i u, i svaki funkcijski simbol F, $I(w)(F) = I(u)(F)$.

Da bismo zadržali jednoobraznost u označavanju, klasu merljivih $LFOP_1$-modela sa fiksiranim domenom i rigidnim termima ćemo označiti sa $LFOP_{1,\mathrm{Meas}}$, a njene potklase u kojima su merljivi svi podskupovi dostižnih svetova, odnosno u kojma su verovatnoće σ-aditivne sa $LFOP_{1,\mathrm{All}}$, odnosno $LFOP_{1,\sigma}$.

Domen svakog sveta nekog modela sa fiksiranim domenom ćemo označiti sa D.

3.1.4 Aksiomatizacija

Aksiomatski sistem Ax_{LFOP_1} za logiku $LFOP_1$ sadrži sledeće shema aksiome:

1. Sve instance iskaznih tautologija.
2. $(\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$, gde x nije slobodno u α.
3. $(\forall x)\alpha(x) \to \alpha(t/x)$, gde je $\alpha(t/x)$ dobijeno zamenom termom t koji je slobodan za x u $\alpha(x)$ svih slobodnih pojava x u $\alpha(x)$.
4. $P_{\geq 0}\alpha$
5. $P_{\leq r}\alpha \to P_{<s}\alpha$, $s > r$
6. $P_{<s}\alpha \to P_{\leq s}\alpha$
7. $(P_{\geq r}\alpha \wedge P_{\geq s}\beta \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geq \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$
8. $(P_{\leq r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, $r + s \leq 1$

i pravila izvođenja:

1. Iz α i $\alpha \to \beta$ izvesti β.
2. Iz α izvesti $(\forall x)\alpha$.

3. Iz α izvesti $P_{\geq 1}\alpha$.

4. Iz $\beta \rightarrow P_{\geq s-\frac{1}{k}}\alpha$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \rightarrow P_{\geq s}\alpha$.

U odnosu na aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} iz poglavlja 2, ovaj aksiomatski sistem se razlikuje utoliko što sadrži aksiome 2 i 3 i pravilo izvođenja 2, tako da je klasična logika prvog reda podlogika od $LFOP_1$.

Za definisanje pojmova teorema , dokaza, sintaksnih posledica skupa rečenica, dokaza iz skupa rečenica, konzistentnosti skupa rečenica i maksimalno konzistentnih skupova rečenica koristićemo se definicijama 2.5, 2.6, 2.7 i 2.8. Međutim u dokazu potpunosti će biti potrebna jedna posebna vrsta maksimalnih skupova rečenica [40]:

Definicija 3.7 Neka je T skup rečenica jezika $\mathcal{L}(LFOP_1)$. Skup T je *skup sa svedocima u* $\mathcal{L}(LFOP_1)$ ako važi

$$\text{ako je } \neg(\forall x)\alpha(x) \in T, \text{ onda je } \neg\alpha(t/x) \in T$$

za neki term t jezika $\mathcal{L}(LFOP_1)$.

3.1.5 Teorema korektnosti

Teorema 3.8 (Korektnost) Aksiomatski sistem Ax_{LFOP_1} je korektan u odnosu na $LFOP_{1,\mathrm{Meas}}$, $LFOP_{1,\mathrm{All}}$ i $LFOP_{1,\sigma}$ klase modela.

Dokaz. U dokazu tvrđenja nove slučajeve, u odnosu na teoremu 2.9, predstavljaju samo aksiome 2 i 3 i pravilo izvođenja 2. Neka je L bilo koja od razmatranih klasa modela i $M = \langle W, D, I, Prob\rangle \in L$.

Razmotrimo aksiomu 2. Pretpostavimo da za neki $w \in W$, $w \not\models (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$. To znači da je za neku valuaciju v, $I(w)((\forall x)(\alpha \rightarrow \beta))_v = \top$, $I(w)(\alpha)_v = \top$ i $I(w)((\forall x)\beta))_v = \bot$. Prema tome za neku valuaciju v, za svaki $d \in D$, $I(w)(\alpha \rightarrow \beta)_{v_w[d/x]} = \top$, $I(w)(\alpha)_v = \top$ i za neki $c \in D$, $I(w)(\beta)_{v_w[c/x]} = \bot$. Međutim, za taj fiksirani $c \in D$, pošto α ne sadrži slobodnu pojavu promenljive x, bilo bi $I(w)(\alpha)_{v_w[c/x]} = \top$, odakle bi, suprotno pretpostavci bilo i $I(w)(\alpha \rightarrow \beta)_{v_w[c/x]} = \bot$. Dakle, svaka instanca aksiome 2 je valjana.

Razmotrimo aksiomu 3. Pretpostavimo da za neki $w \in W$, $w \not\models (\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(t/x)$. To znači da je za neku valuaciju v, $I(w)((\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(t/x))_v = \bot$, odnosno da za neku valuaciju v važi $I(w)((\forall x)\alpha(x))_v = \top$ i $I(w)(\alpha(t/x))_v = \bot$. Posmatrajmo valuaciju $v' = v_w[I(w)(t)_v/x]$, odnosno valuaciju koja se poklapa sa v sem što promenljivoj x dodeljuje vrednost koju termu t u svetu w dodeljuje v. Tada bi bilo $I(w)(\alpha(x))_{v'} = I(w)(\alpha(t/x))_v = \bot$, odakle bi suprotno pretpostavci bilo $I(w)((\forall x)\alpha(x))_v = \bot$. Dakle, svaka instanca aksiome 3 je valjana.

Konačno, posmatrajmo pravilo izvođenja 2. Neka je za svaki svet w modela i svaku valuaciju v je $I(w)(\alpha(x))_v = \top$. Prema definiciji 3.4, direktno sledi da $I(w)((\forall x)\alpha(x))_v = \top$ za svaku valuaciju v. ■

3.1.6 Teorema potpunosti

Osnovna ideja u dokazivanju jake potpunosti u odnosu na razmatrane klase modela prati korake iz odeljka 2.1.6, tako da ćemo u dokazima naglašavati samo nove elemente. To se pre svega odnosi na korišćenje maksimalnih konzistentnih skupova rečenica sa svedocima.

Teorema 3.9 1. **(Teorema dedukcije)** Ako je T skup rečenica, α rečenica i $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, onda $T \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

2. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P_{\geq s}\alpha \rightarrow P_{\geq s}\beta)$.

3. $\vdash P_{\geq r}\alpha \rightarrow P_{\geq s}\alpha$, $r > s$.

Dokaz. U dokazu ovih tvrđenja jedini novi korak u odnosu na teoremu 2.10 predstavlja razmatranje primene pravila 2 u dokazu teoreme dedukcije 3.9.1:

$T, \alpha \vdash \beta$

$T, \alpha \vdash (\forall x)\beta$, prema pravilu 2,

$T \vdash \alpha \to \beta$, prema indukcijskoj pretpostavci,

$T \vdash (\forall x)(\alpha \to \beta)$, prema pravilu 2,

$T \vdash (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$, aksioma 2,

$T \vdash \alpha \to (\forall x)\beta$, dvostrukom primenom pravila 1. ■

Na dalje ćemo u ovom odeljku sa $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$ označavati proširenje jezika $\mathcal{L}(LFOP_1)$ beskonačnim prebrojivim skupom novih simbola konstanti $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1) = \mathcal{L}(LFOP_1) \cup \mathcal{C}$. U sledećoj teoremi konstruisaćemo maksimalno konzistentno proširenje sa svedocima u $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$ proizvoljnog konzistentnog skupa.

Teorema 3.10 Neka je $\mathcal{C}$ beskonačan prebrojiv skup simbola konstanti koji se ne javljaju u jeziku $\mathcal{L}(LFOP_1)$ i $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1) = \mathcal{L}(LFOP_1) \cup \mathcal{C}$. Svaki konzistentan skup T rečenica na jeziku $\mathcal{L}(LFOP_1)$ se može proširiti do maksimalno konzistentnog skupa rečenica sa svedocima u $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$.

Dokaz. U dokazu ćemo pratiti dokaz sličnog tvrđenja iz [18]. Neka je $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jedno nabrajanje svih rečenica jezika $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$. Definisaćemo niz skupova T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ rečenica tako da je:

1. $T_0 = T$,
2. Za svaki $i \geq 0$, ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ konzistentan, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$.
3. Za svaki $i \geq 0$, ako $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentan, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$.
4. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem rečenice oblika $\neg(\forall x)\beta(x)$ tada za neki $c \in C$ skupu T_{i+1} dodajemo i rečenicu $\neg\beta(c)$, tako da T_{i+1} bude konzistentan.
5. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem rečenice oblika $\neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma)$, tada za neki $n \in \mathbb{N}$ skupu dodajemo i rečenice $\beta \to \neg P_{\geq s - \frac{1}{n}}\gamma$, tako da T_{i+1} bude konzistentno.
6. $\overline{T} = \cup_i T_i$.

Prema teoremi 2.11, skupovi dobijeni u koracima 1, 2, 3 i 5 su konzistentni. U koraku 4 se takođe dobijaju konzistenti skupovi. Pretpostavimo suprotno, da ne postoji simbol konstante $c \in C$, takav da je $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x), \neg\beta(c)\}$ konzistentno. Pošto skup T ne sadrži sombole konstanti iz C, a u $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$ se nalazi najviše konačno mnogo simbola konstanti iz C, postoji bar jedna konstanta $c \in C$ takva da se c ne javlja u $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$. Ako $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x), \neg\beta(c)\}$ nije konzistentno, $T_i, \neg(\forall x)\beta(x) \vdash \beta(c)$. Pošto se c ne javlja u $T_i \cup \{\neg(\forall x)\beta(x)\}$, sledi da je $T_i, \neg(\forall x)\beta(x) \vdash \beta(x)$ i $T_i, \neg(\forall x)\beta(x) \vdash (\forall x)\beta(x)$. Odatle je $T_i \vdash (\forall x)\beta(x)$, što je kontradikcija jer je T_i konzistentan, a $T_i \cup \{(\forall x)\beta(x)\}$ nije.

Za skup $\overline{T}$ se kao i u dokazu teoreme 2.11 pokazuje da je deduktivno zatvoren maksimalan skup koji ne sadrži sve formule, pa je konzistentan. Jedini novi korak se odnosi na razmatranje primene pravila 2 u indukcijskom koraku dokaza deduktivne zatvorenosti skupa $\overline{T}$. Najpre primetimo da, ako dokaz iz $\overline{T}$ čine samo rečenice, onda se pripadanje sintaksne posledice skupu $\overline{T}$ pokazuje kao i u teoremi 2.11. Neka je sada:

$\overline{T} \vdash \beta_i^1(x)$

$\overline{T} \vdash (\forall x)\beta_i^1(x)$, primenom pravila 2.

Za razliku od dokaza teoreme 2.11, ako formula $\beta_i^1(x)$ sadrži slobodne promenljive, ona ne može pripadati skupu $\overline{T}$. Međutim, postojanje dokaza za β_i^1 iz skupa $\overline{T}$ nam omogućava da jednostavnom zamenom slobodnih promenljivih u tom dokazu konstantama iz skupa C dobijemo za svaku konstantu $c \in C$ dokaz:

$\overline{T} \vdash \beta_i^1(c)$,

koji se sastoje samo od rečenica, pa $\beta_i^1(c) \in \overline{T}$ za svaku konstantu $c \in C$. Ako $(\forall x)\beta_i^1(x) \notin \overline{T}$, onda za neku konstantu $c \in C$ prema koraku 4 konstrukcije $\neg\beta_i^1(c) \in \overline{T}$. Odavde bi sledila nekonzistentnost nekog od skupa T_i, što je kontradikcija. Dakle, $(\forall x)\beta_i^1(x) \in \overline{T}$. Poslednji zahtev da je skup $\overline{T}$ skup sa svedocima u $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$ direktno sledi iz koraka 4 konstrukcije. ■

Neka je struktura $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ definisana na sledeći način:

- W je skup svih maksimalno konzistentnih skupova sa svedocima u proširenom verovatnosnom jeziku prvog reda $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$,
- D je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ dodeljuje skup $D(w)$ osnovnih terma jezika $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$,
- za svaki svet $w \in W$, $I(w)$ je interpretacija takva da je ispunjeno:
  - za svaki funkcijski simbol F_i^m, $I(w)(F_i^m)$ je funkcija iz D^m u D takva da za sve osnovne terme $t_1, \dots, t_m$ iz $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$, $F_i^m : \langle t_1, \dots, t_m\rangle \to F_i^m(t_1, \dots, t_m)$ i
  - za svaki relacijski simbol P_i^m, $I(w)(P_i^m) = \{\langle t_1, \dots, t_m\rangle$ za sve osnovne terme $t_1, \dots, t_m \in \overline{\mathcal{L}}(LFOP_1) : P_i^m(t_1, \dots, t_m) \in w\}$,
- za svaki svet $w \in W$, $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$ tako da:
  - $W(w) = W$,
  - $H(w)$ je klasa skupova oblika $[\alpha] = \{w \in W : \alpha \in w\}$, za sve rečenice α i
  - za svaki skup $[\alpha] \in H(w)$, $\mu(w)([\alpha]) = \sup\{r : P_{\geq r}\alpha \in w\}$.

Sada se teoreme 2.12, 2.13 i 2.14 formulišu i dokazuju na potpuno isti način kao i u poglavlju 2, tako da je struktura M jedan $LFOP_{1,\mathrm{Meas}}$-model koji ćemo kao i pre nazvati kanonski model.

Teorema 3.11 (Jaka potpunost za $LFOP_{1,\mathrm{Meas}}$) Svaki konzistentan skup rečenica T ima $LFOP_{1,\mathrm{Meas}}$-model.

Dokaz. Prateći dokaz teoreme 2.15 polazimo od konzistentnog skupa rečenica T i konstruišemo kanonski model M i za sve rečenice α na jeziku $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$ pokazujemo da $w \models_M \alpha$ ako i samo ako $\alpha \in w$. Jedine nove korake predstavljaju slučajevi atomskih rečenica i rečenica oblika $(\forall x)\beta$. Za atomske formule tvrđenje važi na osnovu definicije modela:

$$I(w)(P_i^m) = \{\langle t_1, \dots, t_m\rangle \text{ za sve osnovne terme } t_1, \dots, t_m \in \overline{\mathcal{L}}(LFOP_1) : P_i^m(t_1, \dots, t_m) \in w\}.$$

Ako je $\alpha = (\forall x)\beta$ i $\alpha \in w$ onda zbog aksiome 3, $\beta(t/x) \in w$ za svaki $t \in D(w)$. Prema indukcijskoj hipotezi, $w \models \beta(t/x)$ za sve $t \in D(w)$ i $w \models (\forall x)\beta$. Ako $\alpha \notin w$, onda pošto je w skup sa svedocima u $\overline{\mathcal{L}}(LFOP_1)$ postoji neki $t \in D(w)$ takav da je $w \models \neg\beta(t)$. Sada direktno sledi da $w \not\models (\forall x)\beta$. ■

Teoreme potpunosti za $LFOP_{1,\mathrm{All}}$ i $LFOP_{1,\sigma}$

Teorema 3.12 (Jaka potpunost za $LFOP_{1,\mathrm{All}}$) Svaki konzistentan skup rečenica T ima $LFOP_{1,\mathrm{All}}$-model.

Teorema 3.13 (Jaka potpunost za $LFOP_{1,\sigma}$) Svaki konzistentan skup rečenica T ima $LFOP_{1,\sigma}$-model.

se dokazuju kao odgovarajuća tvrđenja u odeljku 2.1.

3.1.7 Komentar zahteva za rigidnost i fiksirane domene

Problemi sa kojima smo se susreli u aksiomatizaciji verovatnosne logike prvog reda $LFOP_1$ su slični sa onima koji se javljaju pri aksiomatizaciji modalnih logika prvog reda. U [40] je ukazano da se moraju postaviti izvesni zahtevi za modele ukoliko se želi da se koristi aksiomatizacija klasične logike prvoga reda. Ti zahtevi su upravo rigidnost terma i fiksiranost domena. Sledeći primeri u verovatnosnom okruženju ilustruju razloge za to.

Neka je $LFOP_1$-model $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$ takav da ne važi rigidnost terma i neka je $w \in W$. Razmotrimo istinitosnu vrednost formule $\alpha(t/x)$ oblika $P_{\geq s}\beta(t/x)$. Prema definiciji istinitosne vrednosti formule 3.4, $I(w)(P_{\geq s}\beta(t/x))_v = \top$ ako je $\mu(w)\{u \in W(w) : I(u)(\beta(t/x))_v = \top\} \geq s$. Dakle, vrednost terma t se računa u svetu u, pa se term odnosi na objekte iz svetova koji pripadaju $W(w)$. Ovo za posledicu ima da neke instance aksiome 3, $(\forall x)\alpha(x) \to \alpha(t/x)$ nisu valjane, pa aksiomatski sistem Ax_{LFOP_1} nije korektan za klasu $LFOP_1$-modela u kojima termi nisu rigidni. Da bi se to utvrdilo dovoljno je da model M bude sledećeg oblika [47]:

- $W = \{w_1, w_2\}$
- $D(w_1) = D(w_2) = \{d_1, d_2\}$,
- $(M, w_1) \models P^1(d_1)$, $(M, w_1) \not\models P^1(d_2)$, $(M, w_2) \not\models P^1(d_1)$, $(M, w_2) \models P^1(d_2)$,
- $\mu(w_1)(\{w_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mu(w_1)(\{w_2\}) = \frac{1}{2}$.

i da se simbol konstante c interpretira tako da je $I(w_1)(c) = d_2$ i $I(w_2)(c) = d_1$. U ovom modelu važi:

$$\mu(w_1)(\{w : w \models P^1(d_1)\}) = \mu(w_1)(\{w_1\}) = \tfrac{1}{2},$$

$$\mu(w_1)(\{w : w \models P^1(d_2)\}) = \mu(w_1)(\{w_2\}) = \tfrac{1}{2},$$

$$w_1 \not\models P^1(c) \text{ i}$$

$$w_2 \not\models P^1(c).$$

pa je

$$w_1 \models (\forall x)P_{\geq\frac{1}{2}}\alpha(x) \text{ i}$$

$$w_1 \not\models (\forall x)P_{\geq\frac{1}{2}}P(x) \to P_{\geq\frac{1}{2}}P(c).$$

Slična situacija se javlja i ako domeni nisu fiksirani. Istinitosna vrednost formule $(\forall x)P_{\geq s}\alpha(x)$ u nekom svetu w $LFOP_1$-modela $M = \langle W, D, I, Prob\rangle$, prema definiciji 3.4, zavisi od vrednosti $I(u)(\alpha(x))_{v[d/x]}$ u svetovima $u \in W(w)$. Sada se postavlja pitanje šta se dešava ukoliko d ne postoji u domenu $D(u)$? Na ovo je u principu moguće odgovoriti na nekoliko načina: vrednost $I(u)(\alpha(x))_{v[d/x]}$ je nedefinisana ili je $\top$ ili $\bot$, i u zavisnosti od izbora menjaju se definicije istinitosne vrednosti i semantike logika. Takođe je moguće zahtevati monotonost domena, tj. ako je $u \in W(w)$, onda je $D(w) \subset D(u)$.

U oba opisana slučaja se postavlja pitanje pronalaženja sintaksnog pandana semantičkim posledicama slabljenja zahteva rigidnosti i fiksiranosti domena. U [40] se kao rešenje sugeriše upotreba takozvane slobodne logike prvog reda kao osnove umesto klasične logike prvog reda.

Primetimo ovde da se jezik $\mathcal{L}(LFOP_1)$ može proširiti znakom jednakosti, a da se aksiomatizacija i opisani postupak dokaza potpunosti bitnije ne promene. Sistemu Ax_{LFOP_1} se dodaju aksiome za jednakost. U definiciji kanonskog modela domen je skup klasa ekvivalencije oblika $\{t' : t = t' \in \overline{T}\}$ gde su t i t' osnovni termi, a $\overline{T}$ jedno fiksirano maksimalno konzistentno proširenje sa svedocima polaznog konzistentnog skupa T. Interpretacija se definiše tako da je za sve osnovne terme i sve valuacije v,

$I(w)(F_i^m(t_1,\ldots,t_m))_v = \{t' : F_i^m(t_1,\ldots,t_m) = t' \in \overline{T}\}$. Ove promene očuvavaju fiksiranost domena i rigidnost terma.

Međutim, odsustvo znaka jednakosti u jeziku $\mathcal{L}(LFOP_1)$ omogućava relativno jednostavnu aksiomatizaciju modela u kojima su termi rigidni, a domeni monotoni. Ako vrednost terma t u svetu w ne pripada domenu $D(w)$, istinitosna vrednost formula oblika $\alpha(t)$ u svetu w je nedefinisana, a $I(w)(P_{\geq s}\alpha(t))_v = \top$ ako i samo ako $\mu(w)\{w' \in W(w) : I(w')(\alpha(t))_v \text{ nije } \bot\} \geq s$. U definisanju kanonskog modela svetovi su maksimalno konzistentni skupovi sa svedocima u proširenjima polaznog jezika (jezici na kojima se grade razni svetovi su pri tome različiti), a $w' \in W(w)$ ako i samo ako je jezik sveta w' nadskup jezika sveta w. Interpretacija se definiše tako da vrednost osnovnih terma budu oni sami. Ovakav postupak obezbeđuje monotonost domena i očuvava rigidnost terma.

3.2 Logike $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$, $LFOP_2$ i $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$

Jezici, skupovi formula, modeli, aksiomatski sistemi i teoreme potpunosti se za logike $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$, $LFOP_2$ i $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ mogu formulisati i dokazati slično kao u odeljku 3.1 postupkom koji je sproveden u odeljcima 2.2, 2.3 i 2.4. Pri tome je potrebno naglasiti da se za logike $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ i $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ na ovaj način dobijaju ne samo kompletni, već i konačni aksiomatski sistemi. To predstavlja zanimljivu suprotnost rezultatima iz [2] o složenosti skupa $LFOP_1$-valjanih formula. Logike $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ i $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$, kao i njihovi iskazni pandani, predstavljaju kompromis između izražajnosti i složenosti. Međutim, dok je u iskaznom slučaju problem predstavljala teorema kompaktnosti i njen uticaj na važenje jake, odnosno slabe, potpunosti, dotle u predikatskom slučaju spomenute predikatske verovatnosne logike dozvoljavaju konačnu aksiomatizaciju, što se inače u opštem slučaju ne može ostvariti.

Ovde ćemo dati pregled razlika koje se odnose na $LFOP_2$-logiku u odnosu na odeljak 3.1. Jezik ove logike se poklapa sa $\mathcal{L}(LFOP_1)$, dok se u pravilima za formiranje formula zabranjuju iteracije verovatnosnih operatora i mešanje verovatnosnih i klasičnih formula, kao i kod iskazne logike LPP_2.

Definicija 3.14 *Verovatnosni $LFOP_2$-model* je struktura $M = \langle W, D, I, H, \mu\rangle$ gde:

- W je neprazan skup svetova,
- D je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje neprazan domen $D(w)$,
- I je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje klasičnu interpretaciju $I(w)$ prvog reda tako da:
  - za svako i i k, $I(w)(F_i^k)$ je funkcija iz $D(w)^k$ u $D(w)$,
  - za svako i i k, $I(w)(P_i^k)$ je relacija nad $D(w)^k$,
- H je algebra podskupova od W i
- μ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na H.

Iako ćemo ponovo razmatrati merljive modele, zahteve za fiksiranim domenom i rigidnim termima više nećemo postavljati. Razlog za to je izostajanje iteracije verovatnosnih operatora i činjenica da se verovatnosni operator ne može pojaviti u dosegu klasičnih kvantifikatora. Zadovoljivost i valjanost se definišu kao i u odeljku 2.3, a aksiomatski sistem se, uz jasna sintaksna ograničenja, poklapa sa sistemom Ax_{LFOP_1} iz odeljka 3.1. U dokazu potpunosti koristi se kombinacija dokaza iz odeljaka 2.3 i 3.1. Najpre se konzistentan skup formula proširi do maksimalno konzistentnog skupa sa svedocima u proširenom jeziku, kao u teoremi 2.33, pri čemu se kao u koraku 4 konstrukcije u teoremi 3.10 obezbeđuje da skup $\overline{T}$ ima svedoke. Zatim se svetovi kanonskog modela definišu kao klasične interpretacije prvog reda sa konačnim ili prebrojivim domenima koje zadovoljavaju skup formula $\overline{T}$. Na ovom mestu se vidi da rigidnost terma i fiksiranost domena nisu neophodni jer i ne važe kod interpretacija koje predstavljaju svetove kanonskog modela. Preostali deo dokaza se dobija neposrednom adaptacijom dokaza teorema 2.12, 2.13 i 2.14.

Podsetimo još da su $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$, odnosno $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$, modeli ustvari $LFOP_1$, odnosno $LFOP_2$, modeli u kojima su kodomeni verovatnoća podskupovi konačnog skupa $\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

3.3 Odlučivost

Pošto je klasična logika prvog reda sadržana u svim razmatranim logikama, odgovarajući problemi valjanosti i zadovoljivosti nisu odlučivi. Zanimljivo je da su monadski fragmenti verovatnosnih logika $LFOP_1$ i $LFOP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ takođe neodlučivi, što se dokazuje korištenjem tehnike koju je Saul Kripke razvio za slučaj monadskih modalnih logika [56, 67]. Postupak se svodi na prevođenje klasičnih predikatskih formula prvog reda na jezik koji sadrži samo jedan binarni relacijski simbol P^2 u monadske modalne formule tako da je klasična formula valjana ako i samo ako je valjan njen modalni prevod. Prilikom prevođenja se u klasičnim formulama svaki izraz oblika $P^2(t_1, t_2)$ zamenjuje izrazom $P_{\geq 0}(P_1^1(t_1) \wedge P_2^1(t_2))$[1]. U dokazu ekvivalentnosti zadovoljivosti klasične formule i njenog prevoda može se koristiti indukcija, pri čemu je suštinski slučaj atomskih formula. Pretpostavimo da je $P^2(t_1, t_2)$ zadovoljivo u nekom klasičnom modelu $N = \langle D, I \rangle$. Posmatrajmo tada verovatnosni model sa samo jednim svetom w (tada je $\mu(w)(w) = 1$), domenom D i interpretacijom $I(w)$ takvom da je $I(w)(P_1^1) = \{d : (\exists c \in D)\langle d, c\rangle \in I(P^2)\}$ i $I(w)(P_2^1) = \{d : (\exists c \in D)\langle c, d\rangle \in I(P^2)\}$. Iz zadovoljivosti $P^2(t_1, t_2)$ trivijalno sledi zadovoljivost $P_1^1(t_1) \wedge P_2^1(t_2)$, a onda zbog oblika modela M i $P_{\geq 0}(P_1^1(t_1) \wedge P_2^1(t_2))$. Obrnuto, ako je formula $P_{\geq 0}(P_1^1(t_1) \wedge P_2^1(t_2))$ zadovoljiva u nekom svetu w nekog verovatnosnog modela, onda postoji svet w' u kome su zadovoljene formule $P_1^1(t_1)$ i $P_2^1(t_2)$. Neka je domen tog sveta D i interpretacija $I(w')$. Definišimo model prvog reda $N = \langle D, I \rangle$ u kome je interpretacija I takva da $I(P^2) = \{(c, d) : (\exists w' \in W(w))c \in I(w')(P_1^1), d \in I(w')(P_2^1)\}$. Iz zadovoljivosti formula $P_1^1(t_1)$ i $P_2^1(t_2)$ neposredno sledi zadovoljivost formule $P^2(t_1, t_2)$.

Međutim, monadski fragmenti logika $LFOP_2$ i $LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$ jesu odlučivi. Sledeći postupak svodi proizvoljnu monadsku formulu ovih logika na iskaznu verovanosnu formulu, odakle sledi odlučivost. U ovim logikama se svaka verovatnosna formula α klasičnim iskaznim postupkom transformiše u formulu

$$DNF(\alpha) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} \pm P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$$

gde $\pm P_{\geq r_{ij}}$ označava bilo $P_{\geq r_{ij}}$, bilo $\neg P_{\geq r_{ij}}$, a A_{ij} su klasične formule prvog reda. Formula α je zadovoljiva ako i samo ako je bar jedan disjunkt $D_i = \wedge_{j=1}^{k_i} \pm P_{\geq r_{ij}} A_{ij}$ zadovoljiv. Ako je α monadska rečenica, onda su to i sve formule A_{ij}. Razmotrimo disjunkt D_i i $LFOP_2$-model ($LFOP_2^{\mathrm{FR}(n)}$-model) $M = \langle W, D, I, H, \mu \rangle$. U skladu sa rezonovanjem zasnovanim na klasičnoj logici, možemo pretpostaviti da se ni koja dva kvantifikatora u D_i ne odnose na iste promenljive. Neka je m_i broj različitih promenljivih u D_i. U svakom svetu modela M važi tačno jedna konjunkcija oblika $\wedge_{j=1}^{k_i} \pm A_{ij}$. Klasična monadska formula sa m_i promenljivih je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiva u modelu sa domenom od 2^{m_i} elemenata [10]. Za svaki svet $w \in W$ razmotrimo klasični model prvog reda $w' = (D(w'), I(w'))$ u kome $D(w')$ sadrži 2^{m_i} elemenata i $I(w') \models \wedge_{j=1}^{k_i} \pm A_{ij}$ ako i samo ako $w \models \wedge_{j=1}^{k_i} \pm A_{ij}$. Imajući model M, konstruišimo model $M' = \langle W', D', I', H', \mu' \rangle$ čiji svetovi su razmatrani klasični modeli prvog reda sa domenima veličine 2^{m_i}. Skup $H'_1 \in H'$ ako i samo ako postoji skup $H_1 \in H$ takav da $w' \in H'_1$ ako i samo ako odgovarajući svet $w \in H_1$. Mera μ' se definiše tako da za sve skupove $H_1 \in H$, $H'_1 \in H'$, $\mu'(H'_1) = \mu(H_1)$. Odatle je $M' \models D_i$ ako i samo ako $M \models D_i$. Neka $d_1, d_2, \ldots, d_{2^{m_i}}$ označavaju elemente domena svetova iz M' i neka je $c_1, c_2, \ldots, c_{2^{m_i}}$ niz od 2^{m_i}

[1] U [56, 67] prevod izraza $P^2(t_1, t_2)$ je $\Diamond(P_1^1(t_1) \wedge P_2^1(t_2))$.

novih simbola konstanti. Proširimo definiciju modela M' tako da je za svaki svet w', $I(w')(c_i) = d_i$. Za svaku formulu A_{ij} razmotrimo formulu $\#A_{ij}$ bez kvantifikatora koja sadrži samo osnovne terme, tj. ne sadrži slobodne promenljive. Zapravo, zamenimo svaku univerzalno kvantifikovanu formulu konjunkcijom, a egzistencijalno kvantifikovanu formulu disjunkcijom formula koje ne sadrže slobodne promenljive. Na primer, formula oblika $(\forall x)P_1^1(x) \wedge (\exists y)P_2^1(y)$ se menja sa $\wedge_{k=1}^{2^2} P_1^1(c_k) \wedge (\vee_{k=1}^{2^2} P_2^1(c_k))$. Kako domeni svetova modela M' sadrže po 2^{m_i} elemenata, za svaki svet $w' \in W'$ je $w' \models A_{ij}$ ako i samo ako $w' \models \#A_{ij}$. Odatle, $M \models D_i$ ako i samo ako je $\#D^i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} \pm P_{\geq r_{ij}} \#A_{ij}$ zadovoljivo u M'. Pošto se formule oblika $\#A_{ij}$ mogu tretirati kao iskazne formule, zadovoljivost monadske verovatnosne formule prvog reda α se svodi na ispitivanje zadovoljivosti iskazne verovatnosne formule, što je odlučivo (odeljak 2.3.5).

4

O jednoj novoj vrsti verovatnosnih operatora

U ovom poglavlju ćemo uvesti novu vrstu verovatnosnih operatora oblika Q_F čije značenje će biti: verovatnoća pripada skupu F, gde je F rekurzivan racionalni podskup od [0,1]. Ovakve operatore ćemo povremeno nazivati skupovni verovatnosni operatori ako je potrebno da se izdvoje od do sada korištenih verovatnosnih operatora. Skupovni verovatnosni operatori su zaista novi operatori, odnosno ne mogu se konačnim sredstvima definisati preko operatora oblika $P_{\geq s}$, a takođe važi i obrnuto, tj. da se 'standardni' operatori $P_{\geq s}$ ne mogu konačnim sredstvima definisati preko skupovnih verovatnosnih operatora. Zamislimo eksperiment u kome se novčić baca proizvoljan konačan broj puta i sa A označimo iskaz da su u eksperimentu ostvarena samo pisma. Verovatnoća istinitosti formule A pripada skupu $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\}$, što se pomoću skupovnih verovatnosnih operatora zapisuje sa $Q_{\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\}}A$, dok se ista rečenica ne može zapisati u jeziku koji sadrži samo operatore oblika $P_{\geq s}$.

Izbor familije O skupova koji se javljaju u skupovnim verovatnosnim operatorima je veoma značajan i utiče na izražajnost i odlučivost dobijenih logika. U narednim odeljcima ćemo opisati odgovarajuće jezike (koji zavise od izbora familije O), formule i modele, dati potpunu aksiomatizaciju i ispitivati odlučivost odgovarajućih logika. Pokazaćemo uzajamnu nedefinabilnost skupovnih i do sada korištenih verovatnosnih operatora i dati kriterijum za upoređivanje izražajnosti logika koje sadrže operatore oblika Q_F. Dodavanje skupovnih verovatnosnih operatora ima smisla izvesti pre svega u logikama opisanim u poglavljima 2 i 3 čiji modeli imaju realnovrednosne mere. Mi ćemo ovde predstaviti najrestriktivniju od tih logika, logiku $LPP_2(P,Q,O)$ koja predstavlja proširenje iskazne logike LPP_2 u kojoj nema iteracija verovatnosnih operatora, a verovatnoće su realnovrednosne. Logike $LPP_1(P,Q,O)$, $LFOP_1(P,Q,O)$ i $LFOP_2(P,Q,O)$ se aksiomatizuju na analogan način. Logika $LPP_2(P,Q,O)$ je opisana u [83].

4.1 Logika $LPP_2(P,Q,O)$

U imenu logika koje opisujemo P, Q i O označavaju da se u formalnom jeziku pojavljuju verovatnosni operatori $P_{\geq s}$ i Q_F za $F \in O$. Kao što svaki izbor konstante n daje novu novu logiku $LPP_2^{\mathrm{FR(n)}}$, tako i kada se logika LPP_2 proširi skupovnim verovatnosnim operatorima jezik je određen izborom klase O skupova. Pošto logika LPP_2 nije kompaktna, to isto važi i za $LPP_2(P,Q,O)$, tako da ćemo i u ovom slučaju dati jednu beskonačnu aksiomatizaciju. Proširenje jezika može dovesti do gubitka odlučivosti.

4.1.1 Jezik

Neka je S skup svih racionalnih brojeva iz $[0,1]$ i O rekurzivna familija rekurzivnih podskupova od S. Jezik $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O))$ logike $LPP_2(P,Q,O)$ je prebrojivo proširenje jezika $\mathcal{L}(LPP_2)$, odnosno jezika $\mathcal{L}(LPP_1)$. Dakle, $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O))$ se sastoji od prebrojivog skupa iskaznih slova $\phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, klasičnih operatora $\neg$ i $\wedge$, liste verovatnosnih operatora oblika $P_{\geq s}$ za svaki $s \in S$ i liste verovatnosnih operatora oblika Q_F za svaki $F \in O$.

4.1.2 Formule

Skup $\mathrm{For_C}(LPP_2(P,Q,O))$ je skup klasičnih iskaznih formula jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O))$ čije članove ćemo označavati velikim slovima abecede: A, B, C, ... Skup $\mathrm{For_P}(LPP_2(P,Q,O))$ verovatnosnih formula ovog jezika je najmanji skup formula koji ispunjava:

- Ako je A klasična iskazna formula i $s \in S$, onda je $P_{\geq s}A$ verovatnosna formula.
- Ako je A klasična iskazna formula i $F \in O$, onda je $Q_F A$ verovatnosna formula.
- Ako su α i β verovatnosne formule, verovatnosne formule su i $\neg\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$.

Formule iz $\mathrm{For_P}(LPP_2(P,Q,O))$ ćemo označavati malim slovima grčkog alfabeta: α, β, γ, ... Skup $\mathrm{For}(LPP_2(P,Q,O))$ formula ovog jezika je jednak $\mathrm{For_C}(LPP_2(P,Q,O)) \cup \mathrm{For_P}(LPP_2(P,Q,O))$. Formule iz ovog skupa ćemo označavati velikim slovima grčkog alfabeta: Φ, Ψ, ... Preostali klasični i verovatnosni operatori se definišu kao i u odeljku 2.1. Ako je $F \in O$, primeri formula su: $P_{\geq\frac{1}{2}}p_1$, $P_{\geq\frac{1}{2}}p_1 \wedge \neg Q_F p_2$ i $p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_1)$. Prva i treća formula su istovremeno i LPP_2-formule, dok druga formula to nije pošto se u njoj javlja i skupovni verovatnosni operator Q_F. Formula nije ni sledeći niz simbola: $Q_F(p_1 \wedge \neg Q_F p_2) \wedge p_3$, jer se u njemu pojavljuju iteracija operatora Q_F i mešanje klasičnih i verovatnosnih formula.

4.1.3 Klase modela

Modeli za $LPP_2(P,Q,O)$ su LPP_2-modeli uvedeni definicijom 2.26, dakle svetovi modela su klasične iskazne interpretacije nad kojima je definisana jedna verovatnoća:

Definicija 4.1 *Verovatnosni model* je struktura $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$, gde su:

- W neprazan skup svetova,
- $v : W \times \phi \mapsto \{\top, \bot\}$ je iskazna valuacija koja svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje $\top$ ili $\bot$ i
- H je algebra podskupova od W i
- μ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na H.

Definicija 4.2 Neka je $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ proizvoljan $LPP_2(P,Q,O)$-model. Formula Φ je *zadovoljena* u modelu M, u oznaci $M \models \Phi$, ako su ispunjeni uslovi iz definicije 2.27:

- ako je $\Phi \in \mathrm{For_C}(LPP_2(P,Q,O))$, $M \models \Phi$ ako i samo ako za svaki svet $w \in W$, $w \models \Phi$,
- ako je Φ oblika $P_{\geq s}A$, $M \models \Phi$ ako i samo ako $\mu(\{w : w \in W, w \models A\}) \geq s$,
- ako je Φ oblika $\neg\alpha$, gde je $\alpha \in \mathrm{For_P}(LPP_2(P,Q,O))$, $M \models \Phi$ ako i samo ako nije $M \models \alpha$ i
- ako je Φ oblika $\alpha \wedge \beta$, gde su $\alpha, \beta \in \mathrm{For_P}(LPP_2(P,Q,O))$, $M \models \Phi$ ako i samo ako $M \models \alpha$ i $M \models \beta$

i ako važi:

- ako je Φ oblika $Q_F A$, $M \models \Phi$ ako i samo ako $\mu(\{w : w \in W, w \models A\}) \in F$.

Na dalje ćemo koristiti definicije 2.28 i 2.29 pojmova zadovoljivosti, valjanosti, merljivih modela i klasa modela $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$, $LPP_{2,\mathrm{All}}(P,Q,O)$ i $LPP_{2,\sigma}(P,Q,O)$.

4.1.4 Aksiomatizacija

Akiomatski sistem Ax_{LPP_1} koji je iskorišten u aksiomatizaciji logike LPP_1 i (uz sintaksna ograničenja) logike LPP_2 biće upotrebljen i ovde. Proširićemo ga shema aksiomom 7:

1. Sve instance iskaznih tautologija.
2. $P_{\geq 0} A$
3. $P_{\leq r} A \to P_{<s} A$, $s > r$
4. $P_{<s} A \to P_{\leq s} A$
5. $(P_{\geq r} A \wedge P_{\geq s} B \wedge P_{\geq 1}(\neg A \vee \neg B)) \to P_{\geq \min(1,r+s)}(A \vee B)$
6. $(P_{\leq r} A \wedge P_{<s} B) \to P_{<r+s}(A \vee B)$, $r + s \leq 1$
7. $P_{=s} A \to Q_F A$, $s \in F$

i pravilom izvođenja 4:

1. Iz Φ i $\Phi \to \Psi$ izvesti Ψ.
2. Iz A izvesti $P_{\geq 1} A$.
3. Iz $\beta \to P_{\geq s - \frac{1}{k}} A$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \to P_{\geq s} A$.
4. Iz $P_{=s} A \to \beta$, za svaki $s \in F$, izvesti $Q_F A \to \beta$.

Dobijeni aksiomatski sistem ćemo označiti sa $Ax_{LPP_2(P,Q,O)}$. Nova aksioma 7 i novo pravilo 4 povezuju dve vrste verovatnosnih operatora. Pravilo 4 je beskonačno, poput pravila 3.

Teoreme, dokazi, sintaksne posledice, konzistentni skupovi i maksimalni konzistentni skupovi se definišu kao i u odeljku 2.3.3. Sledeće tvrđenje sadrži više $LPP_2(P,Q,O)$-teorema koje se koriste u preostalim dokazima. Dokazima tih teorema ćemo ilustrovati izvođenje u ovoj logici. Primetimo da će dokazi, iako su beskonačni, biti zapisani konačnim sredstvima.

Teorema 4.3 Ako svi skupovi koji se navode pripadaju familiji O, odnosno ako sve formule koje se navode pripadaju skupu $\mathrm{For}(LPP_2(P,Q,O))$, onda važi:

1. $\vdash Q_F A \to Q_G A$, za $F \subset G$
2. $\vdash (Q_F A \wedge Q_G A) \leftrightarrow Q_{F \cap G} A$
3. $\vdash (Q_F A \vee Q_G A) \leftrightarrow Q_{F \cup G} A$
4. $\vdash (Q_F A \wedge P_{\geq s} A) \leftrightarrow Q_{[s,1] \cap F} A$ i slično za operatore $P_{>s} A$, $P_{\leq s} A$, $P_{<s} A$
5. $\vdash Q_F A \leftrightarrow Q_{1-F} \neg A$, gde je $1 - F = \{1 - r : r \in F\}$
6. $\vdash P_{=r} A \to \neg Q_G A$, za $r \notin G$

7. $\vdash Q_F A \to \neg Q_G A$, za $F \cap G = \emptyset$

8. $\vdash (Q_F A \wedge \neg Q_G A) \leftrightarrow Q_{F \setminus G} A$

Dokaz. 1.

$\vdash P_{=s} A \to Q_G A$, instanca aksiome 7, za svaki $s \in F \subset G$

$\vdash Q_F A \to Q_G A$, prema pravilu 4.

2. Dokaz s leva na desno je:

$\vdash (P_{=r} A \wedge P_{=s} A) \to Q_{F \cap G} A$, za sve $r \in F$, $s \in G$, jer ako je $r = s$, ovo je instanca aksiome 7, a ako $r \neq s$, leva strana implikacije je kontradikcija

$\vdash P_{=r} A \to (P_{=s} A \to Q_{F \cap G} A)$, za sve $r \in F$, $s \in G$

$\vdash Q_F A \to (P_{=s} A \to Q_{F \cap G} A)$, primenom pravila 4 na $r \in F$

$\vdash P_{=s} A \to (Q_F A \to Q_{F \cap G} A)$

$\vdash Q_G A \to (Q_F A \to Q_{F \cap G} A)$, primenom pravila 4 na $s \in G$

$\vdash (Q_F A \wedge Q_G A) \to Q_{F \cap G} A$

dok je obrnuti smer direktna posledica teoreme 4.3.1 jer važi $F \cap G \subset F$, $\vdash Q_{F \cap G} \to Q_F$, $F \cap G \subset G$ i $\vdash Q_{F \cap G} \to Q_G$.

3. Dokaz s desna na levo je:

$\vdash P_{=s} A \to Q_F A$, instanca aksiome 7, za svaki $s \in F$

$\vdash P_{=s} A \to (Q_F A \vee Q_G A)$

$\vdash P_{=s} A \to Q_G A$, instanca aksiome 7, za svaki $s \in G$

$\vdash P_{=s} A \to (Q_F A \vee Q_G A)$, za sve $s \in F \cup G$

$\vdash Q_{F \cup G} A \to (Q_F A \vee Q_G A)$, primenom pravila 4 na $s \in F \cup G$

dok je obrnuti smer direktna posledica teoreme 4.3.1 jer važi $F \subset F \cup G$, $\vdash Q_F A \to Q_{F \cup G} A$, $G \subset F \cup G$ i $\vdash Q_G A \to Q_{F \cup G} A$.

4. Dokaz s desna na levo je:

$\vdash P_{=r} A \to Q_F A$, instanca aksiome 7, za svaki $r \in F \cap [s, 1]$

$\vdash P_{=r} A \to P_{\geq s} A$, za svaki $r \in F \cap [s, 1]$

$\vdash P_{=r} A \to (Q_F A \wedge P_{\geq s} A)$, za svaki $r \in F \cap [s, 1]$

$\vdash Q_{[s,1] \cap F} A \to (Q_F A \wedge P_{\geq s} A)$, primenom pravila 4 na $r \in [s, 1] \cap F$.

Dokaz s leva na desno je:

$\vdash P_{=r} A \to (P_{\geq s} A \wedge Q_{[s,1] \cap F} A)$, za svaki $r \in F \cap [s, 1]$

$\vdash (P_{=r} A \wedge P_{\geq s} A) \to Q_{[s,1] \cap F} A$, za $r \in F \setminus [s, 1]$ jer je leva strana kontradikcija

$\vdash P_{=r} A \to (P_{\geq s} A \wedge Q_{[s,1] \cap F} A)$, za $r \in F \setminus [s, 1]$

$\vdash P_{=r}A \to (P_{\geq s}A \wedge Q_{[s,1]\cap F}A)$, za $r \in F$

$\vdash Q_F A \to (P_{\geq s}A \wedge Q_{[s,1]\cap F}A)$, primenom pravila 4 na $r \in F$

$\vdash (Q_F A \wedge P_{\geq s}A) \to Q_{[s,1]\cap F}A$.

5. Pošto je $\vdash P_{=s}A \leftrightarrow P_{=1-s}\neg A$, to je:

$\vdash P_{=1-s}\neg A \to Q_F A$, instanca aksiome 7, za svaki $s \in F$

$\vdash Q_{1-F}\neg A \to Q_F A$, primenom pravila 4 na $s \in 1 - F = \{1 - r : r \in F\}$.

Obrnuti smer se dokazuje na isti način.
6.

$\vdash P_{=s}A \to \neg P_{=r}A$, za sve $s \in G$, $r \notin G$

$\vdash Q_G A \to \neg P_{=r}A$, primenom pravila 4 na $s \in G$, za sve $r \notin G$

$\vdash P_{=r}A \to \neg Q_G A$, za $r \notin G$.

7.

$\vdash P_{=r}A \to \neg Q_G A$, prema teoremi 4.3.6, za svaki $r \in F$, ako je $F \cap G = \emptyset$

$\vdash Q_F A \to \neg Q_G A$, primenom pravila 4 na $r \in F$, ako je $F \cap G = \emptyset$.

8. Dokaz s desna na levo je:

$\vdash Q_{F\setminus G}A \to \neg Q_G A$, prema teoremi 4.3.7

$\vdash Q_{F\setminus G}A \to Q_F A$, prema teoremi 4.3.1

$\vdash Q_{F\setminus G}A \to (Q_F A \wedge \neg Q_G A)$.

Dokaz s leva na desno je:

$\vdash (P_{=s}A \wedge \neg Q_G A) \to Q_{F\setminus G}A$, za svaki $s \in F$, jer ako je $s \in F \setminus G$, ovo je posledica aksiome 7, a ako je $s \in F \cap G$, onda je leva strana implikacije kontradikcija

$\vdash P_{=s}A \to (\neg Q_G A \to Q_{F\setminus G}A)$, za svaki $s \in F$

$\vdash Q_F A \to (\neg Q_G A \to Q_{F\setminus G}A)$, primenom pravila 4 na $s \in F$

$\vdash (Q_F A \wedge \neg Q_G A) \to Q_{F\setminus G}A$. ■

4.1.5 Teoreme korektnosti i potpunosti

Za logiku $LPP_2(P,Q,O)$ se korektnost i teoreme koje odgovaraju tvrđenju 2.10 iskazuju i dokazuju kao u odeljku 2.1, odnosno 2.3.4. Jedinu novinu predstavlja razmatranje pravila izvođenja 4.

Teorema 4.4 (Korektnost) Aksiomatski sistem $Ax_{LPP_2(P,Q,O)}$ je korektan u odnosu na klase modela $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$, $LPP_{2,\mathrm{All}}(P,Q,O)$ i $LPP_{2,\sigma}(P,Q,O)$.

Dokaz. Neka je L bilo koja od spomenutih klasa modela. Dopunimo dokaz teoreme 2.9 razmatranjem pravila izvođenja 4. Pretpostavimo da su za sve $s \in F$ valjane formule $P_{=s}A \to \beta$, a da $Q_F A \to \beta$ nije valjana formula. Prema tome, postoji neki L-model $M = \langle W, v, H, \mu\rangle$ u kome je $\mu(A) \in F$ i $M \not\models \beta$. Pošto $\mu(A)$ pripada skupu F, to važi i $M \not\models P_{=\mu(A)}A \to \beta$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Dakle, pravilo izvođenja 4 očuvava valjanost. ■

Teorema 4.5 (Teorema dedukcije) Ako je T skup formula i $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ i ako su Φ i Ψ obe bilo klasične, bilo verovatnosne formule, onda je $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Dokaz. Razmotrićemo samo novi slučaj kada je formula $\beta = Q_F A \to \gamma$ dobijena iz $T \cup \{\alpha\}$ primenom pravila izvođenja 4, pri čemu je $\alpha \in \mathrm{For}_{\mathrm{P}}(LPP_2(P, Q, O))$. Tada je:

$T, \alpha \vdash P_{=s} A \to \gamma$, za svaki $s \in F$

$T \vdash \alpha \to (P_{=s} A \to \gamma)$, za svaki $s \in F$, prema indukcijskoj hipotezi

$T \vdash P_{=s} A \to (\alpha \to \gamma)$, za svaki $s \in F$

$T \vdash Q_F A \to (\alpha \to \gamma)$, primenom pravila izvođenja 4

$T \vdash \alpha \to (Q_F A \to \gamma)$. ■

I u tvrđenju o konstrukciji maksimalno konzistentnog proširenja konzistentnog skupa novinu u odnosu na dokaz iz teoreme 2.33 predstavlja slučaj koji se odnosi na pravilo izvođenja 4. Pošto je ovo pravilo beskonačno, biće potrebno, kao i za pravilo 3, konzistentnom proširenju dodati formulu koja svedoči da zaključak neke instance pravila 4 ne pripada proširenju.

Teorema 4.6 Svaki konzistentan skup formula T se može proširiti do maksimalno konzistentog skupa.

Dokaz. Kao u dokazu teoreme 2.33, neka je $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jedno nabrajanje svih verovatnosnih formula i neka je $\overline{T}^C$ skup svih klasičnih sintaksnih posledica skupa T. Definisaćemo niz skupova T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ tako da je:

1. $T_0 = T \cup \overline{T}^C \cup \{P_{\geq 1} A : A \in \overline{T}^C\}$,
2. Za svaki $i \geq 0$, ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ konzistentan, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$.
3. Za svaki $i \geq 0$, ako $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentan, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$.
4. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem formule oblika $\neg(\beta \to P_{\geq s}\gamma)$, tada za neki $n \in \mathbb{N}$ skupu dodajemo i formulu $\beta \to \neg P_{\geq s - \frac{1}{n}}\gamma$, tako da T_{i+1} bude konzistentno.
5. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem formule oblika $\neg(Q_F A \to \beta)$, tada za neki $s \in F$ skupu dodajemo i formulu $\neg(P_{=s} A \to \beta)$, tako da T_{i+1} bude konzistentno.
6. $\overline{T} = \cup_i T_i$.

Pokažimo najpre da se proširenja koja se dobijaju u koraku 5 konstrukcije konzistentna. Neka važi: T_i je konzistentan, $\alpha_i = Q_F A \to \beta$, $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentno. Pretpostavimo da za svaki $s \in F$, $T_i \cup \{\neg(Q_F A \to \beta), \neg(P_{=s} A \to \beta)\}$ nije konzistentno. Tada je:

$T_i \cup \{\neg(Q_F A \to \beta), \neg(P_{=s} A \to \beta)\} \vdash \bot$, za svaki $s \in F$

$T_i \cup \{\neg(Q_F A \to \beta)\} \vdash P_{=s} A \to \beta$, za svaki $s \in F$, prema teoremi dedukcije

$T_i \cup \{\neg(Q_F A \to \beta)\} \vdash Q_F A \to \beta$, prema pravilu izvođenja 4

$T_i \vdash Q_F A \to \beta$.

Pošto $T_i \cup \{Q_F A \to \beta\}$ nije konzistentno, ovo bi značilo da, suprotno pretpostavci, ni T_i nije konzistentno.

Pokažimo još i da je skup $\overline{T} = \cup_i T_i$, dobijen u koraku 6 konstrukcije, maksimalno konzistentno proširenje skupa T, odnosno proverimo da li se u induktivnom dokazu deduktivne zatvorenosti može rešiti i slučaj pravila izvođenja 4. Pretpostavimo da je formula $\beta_i = Q_F A \to \beta$ dobijena u nekom koraku nekog dokaza iz skupa $\overline{T}$ primenom pravila izvođenja 4 i da za svako $s \in F$ pretpostavke pravila $\beta_i^s = P_{=s} A \to \beta$ pripadaju skupu $\overline{T}$. Ako formula β_i ne pripada skupu $\overline{T}$, onda bi prema koraku 5, postojao skup T_k koji sadrži $\neg\beta_i^s$ za neko $s \in F$. Ako je u nabrajanju verovatnosnih formula $\alpha_j = \beta_i^s$, a $\alpha_l = \neg\beta_i^s$, onda bi skup $T_{\max\{j,l\}+1}$ sadržao i β_i^s i $\neg\beta_i^s$ i bio nekonzistentan, što je kontradikcija. Dakle, $\beta_i \in \overline{T}$. Ostatak dokaza se sprovodi kao u teoremi 4.6. ∎

Kanonski model za skup T je, kao i u odeljku 2.3, struktura $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ u kojoj:

- W je skup svih klasičnih interpretacija koja zadovoljavaju skup $\overline{T}^C$, $W = \{w : w \models \overline{T}^C\}$,
- v je preslikavanje koje svakom svetu $w \in W$ pridružuje samu tu interpretaciju, tj. $v(w)(p) = w(p)$ za svako iskazno slovo $p \in \phi$,
- H je klasa skupova oblika $[A] = \{w \in W : w \models A\}$, za sve klasične formule A i
- za svaki skup $[A] \in H$, $\mu([A]) = \sup\{r : P_{\geq r} A \in \overline{T}\}$,

pa se kao i ranije (teoreme 2.13 i 2.14) pokazuje da je H algebra, a M merljiv model.

Teorema 4.7 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$-model.

Dokaz. U odnosu na teoremu 2.34, potrebno je još pokazati da za formule oblika $\alpha = Q_F A$ važi $M \models \alpha$ ako i samo ako $\alpha \in \overline{T}$. Neka je $Q_F A \in \overline{T}$. Iz $\vdash \neg Q_F A \leftrightarrow (Q_F A \to \bot)$ sledi da $(Q_F A \to \bot) \notin \overline{T}$. Prema koraku 5 kostrukcije skupa $\overline{T}$ za neko $s \in F$, $\neg(P_{=s} A \to \bot) \in \overline{T}$, odnosno $P_{=s} A \in \overline{T}$. Prema indukcijskoj hipotezi i aksiomi 7, $M \models Q_F A$. Neka je $M \models Q_F A$. Tada je $M \models P_{=s} A$ za neki $s \in F$ i $P_{=s} A \in \overline{T}$. Pošto je skup $\overline{T}$ deduktivno zatvoren, pomoću aksiome 7 sledi da je $Q_F A \in \overline{T}$. ∎

Konačno, teoreme

Teorema 4.8 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\mathrm{All}}(P,Q,O)$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\mathrm{All}}(P,Q,O)$-model.

Teorema 4.9 (Jaka potpunost za $LPP_{2,\sigma}(P,Q,O)$) Svaki konzistentan skup T ima $LPP_{2,\sigma}(P,Q,O)$-model.

se dokazuju, a teorema

Teorema 4.10 (Kompaktnost) Ako je T skup formula jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O))$ i svaki konačan podskup od T je zadovoljiv, tada je i skup T zadovoljiv u nekom modelu klase $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$-modela ($LPP_{2,\mathrm{All}}(P,Q,O)$-modela, $LPP_{2,\sigma}(P,Q,O)$-modela)

se opovrgava na isti način kao odgovarajuća tvrđenja iz odeljka 2.1.

4.1.6 (Ne)odlučivost

U odeljku 2.3.5 je pokazana odlučivost logike LPP_2 svođenjem formula na sisteme linearnih jednačina i nejednačina. Slično ćemo postupiti i ovde. U prvom koraku verovatnosna formula α se transformiše u ekvivalentan oblik, disjunktivnu normalnu formu $DNF(\alpha)$:

$$DNF(\alpha) = \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{l_i} X_{ij} A_{ij}$$

u kojoj su X_{ij} verovatnosni operatori iz skupa $\{P_{\geq r_{ij}}, P_{<r_{ij}}, Q_{F_{ij}}, \neg Q_{F_{ij}}\}$. Poslednja dva skupovna verovatnosna operatora se ne javljaju u slučaju logike LPP_2. Zatim se sve klasične formule A_{ij} transformišu u savršenu disjunktivnu normalnu formu $SDNF(A_{ij})$ u kojoj učestvuju sva iskazna slova $\{p_1, \ldots, p_n\}$ koja se pojavljuju u disjunktu $D_i = \bigwedge_{j=1}^{l_i} X_{ij} A_{ij}$. Neka tih iskaznih slova ima n, a atoma $a_1, \ldots, a_{2^n}$ oblika $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$ sastavljenih od tih iskaznih slova 2^n. Polazna formula je zadovoljiva ako i samo ako je zadovoljiv bar jedan disjunkt $D_i = \bigwedge_{j=1}^{l_i} X_{ij} SDNF(A_{ij})$. Zadovoljivost formule D_i se ispituje rešavanjem sistema oblika:

$$\begin{array}{rl}
\sum_{t=1}^{2^n} \mu(a_t) & = 1 \\
\mu(a_t) & \geq 0, \text{ za } t = 1, 2^n \\
\sum_{a_t \in SDNF(A_{i1})} \mu(a_t) & \left\{ \begin{array}{ll} \geq r_{i1} & \text{ako } X_{i1} = P_{\geq r_{i1}} \\ < r_{i1} & \text{ako } X_{i1} = P_{<r_{i1}} \\ \in F_{i1} & \text{ako } X_{i1} = Q_{F_{i1}} \\ \notin F_{i1} & \text{ako } X_{i1} = \neg Q_{F_{i1}} \end{array} \right. \\
\ldots & \\
\sum_{a_t \in SDNF(A_{il_i})} \mu(a_t) & \left\{ \begin{array}{ll} \geq r_{il_i} & \text{ako } X_{il_i} = P_{\geq r_{il_i}} \\ < r_{il_i} & \text{ako } X_{il_i} = P_{<r_{il_i}} \\ \in F_{il_i} & \text{ako } X_{il_i} = Q_{F_{il_i}} \\ \notin F_{il_i} & \text{ako } X_{il_i} = \neg Q_{F_{il_i}} \end{array} \right.
\end{array}$$

U odeljku 2.3.5 su dobijeni slični sistemi za LPP_2-formule u kojima se pojavljuju samo verovatnosni operatori oblika $P_{\geq s}$ i $P_{<s}$. Takvi sistemi su sistemi linearnih jednačina i nejednačina i problem ispitivanja njihove rešivosti je odlučiv. Međutim, ovde se pojavljuju i operatori Q_F tako da svaki od sistema možemo podeliti u dva dela:

- sistem linearnih jednačina i nejednačina, kao u odeljku 2.3.5 i
- sistem formula oblika:
  - $\sum_{a_t \in SDNF(A_{ij})} \mu(a_t) \in F_{ij}$, za svaki $X_{ij} = Q_{F_{ij}}$ koje ćemo zvati pozitivna ograničenja i
  - $\sum_{a_t \in SDNF(A_{ij})} \mu(a_t) \notin F_{ij}$, za svaki $X_{ij} = \neg Q_{F_{ij}}$ koje ćemo zvati negativna ograničenja.

Na osnovu ove analize važi teorema:

Teorema 4.11 Neka je O jedna fiksirana rekurzivna familija rekurzivnih racionalnih podskupova od $[0,1]$. Logika $LPP_2(P,Q,O)$ je odlučiva ako i samo ako je za svaku verovatnosnu formulu $\alpha \in \mathrm{For}_{\mathrm{P}}(LPP_2(P,Q,O))$ i svaki disjunkt iz $DNF(\alpha)$ odgovarajući sistem linearnih jednačina i nejednačina sa ograničenjima rešiv.

Uslov koji se postavlja u teoremi 4.11 je veoma jak. Na primer, sistem

$$\begin{array}{rl}
a_1 + a_2 & = 1 \\
a_t & \geq 0, \text{ za } t = 1, 2 \\
a_1 & \geq r \\
a_1 & \in F
\end{array}$$

koji odgovara formuli $P_{\geq r}p \wedge Q_F p$ je rešiv ako i samo ako je to i problem $F \cap [s,1] \neq \emptyset$, što zavisi od skupa F. U slučajevima kada F predstavlja kodomen neke pogodne funkcije sa racionalnim vrednostima ovakve jednačine se i mogu rešiti, ali u opštem slučaju odlučivost skupova iz familije O ne garantuje odlučivost logike.

4.2 Odnos verovatnosnih operatora $P_{\geq s}$ i Q_F

Na osnovu definicije 4.2 zadovoljivosti, očigledno je da je za skup $F \subset S$

$$Q_F A \leftrightarrow \vee_{f_i \in F} P_{=f_i} A.$$

Međutim, ako je F beskonačan, disjunkcija $\vee_{f_i \in F} P_{=f_i} A$ nije sintaksno ispravna konstrukcija jer su formule iz $\mathrm{For}(LPP_2(P,Q,O))$ konačne. Iz ovog primera se vidi i da se skupovni verovatnosni operatori ponašaju slično egzistencijalnim kvantifikatorima i da u konačne formule skupljaju beskonačne disjunkcije.

Takođe bi se moglo napisati i

$$P_{\geq s}\alpha \leftrightarrow Q_{[s,1]}A,$$

no pošto $[s,1]$ nije skup racionalnih brojeva, verovatnosni operator $Q_{[s,1]}$ ni za jednu familiju O ne pripada jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O))$, pa ni ovo nije $LPP_2(P,Q,O)$-formula.

Prethodni primeri sugerišu da se u opštem slučaju dve vrste verovatnosnih operatora ne mogu izraziti jedna preko druge. U nastavku teksta ovaj utisak ćemo formalno potvrditi. Razmatraćemo klasu $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$-modela. Koristićemo oznake:

- $M(\Phi)$ za klasu svih modela koji zadovoljavaju formulu Φ,
- $\mathcal{L}(LPP_2(P))$ za verovatnosni jezik koji ne sadrži skupovne verovatnosne operatore, dakle za $\{\neg, \wedge\} \cup \{P_{\geq s}\}_{s \in S}$ i
- $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$ za verovatnosni jezik koji ne sadrži standardne verovatnosne operatore, dakle za $\{\neg, \wedge\} \cup \{Q_F\}_{F \in O}$.

Definicija 4.12 Neka je Φ formula verovatnosnog jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_1))$ i neka je Ψ formula verovatnosnog jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ (može biti $O_1 = O_2$). Formula Φ je *definabilna* formulom Ψ ako je $M(\Phi) = M(\Psi)$.

Ovom definicijom definabilnost se uvodi kao semantički pojam. Neka formula je definabilna nekom drugom formulom ako se sa stanovišta modela ne mogu razlikovati, odnosno ako su svi modeli u kojima važi prva formula ujedno i modeli u kojima važi druga formula i obrnuto. U naredne dve teoreme ćemo pokazati da niti su formule na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P))$ u opštem slučaju definabilne formulama na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$, niti su formule na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$ definabilne formulama na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P))$. Pod nezavisnošću vrsta operatora ćemo podrazumevati postojanje takve uzajamne nedefinabilnost formula. Naredne teoreme opravdavaju tvrđenje iz uvodnog dela ovog poglavlja da su Q_F zaista novi operatori, nezavisni od standardnih verovatnosnih operatora oblika $P_{\geq s}$, ali i da su operatori $P_{\geq s}$ nezavisni od operatora Q_F.

Teorema 4.13 Neka je O rekurzivna familija rekurzivnih podskupova od S i $F \in O$ beskonačan skup. Za proizvoljno iskazno slovo $p \in \phi$ ne postoji verovatnosna formula α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P))$ takva da je formula $Q_F p$ definabilna formulom α.

Dokaz. Neka je α verovatnosna formula na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P))$ takva da $M(\alpha) = M(Q_F p)$. Na osnovu analize date u odeljku 4.1.6, α je zadovoljiva ako i samo ako je bar jedan od sistema linearnih jednačina i nejednačina koji odgovaraju $DNF(\alpha)$ zadovoljiv. Sa a_t označimo atome koji se javljaju u tom sistemu, a sa $\mu(a_t)$ njihove verovatnoće, odnosno verovatnoće skupova svetova koji ih zadovoljavaju. Zbog $M(\alpha) = M(Q_F p)$, mora biti

$$\sum_{a_t \in SDNF(p)} \mu(a_t) \in F.$$

Međutim, rešenja sistema koji odgovaraju $DNF(\alpha)$ su oblika $\mu(a_t) \in (r,s)$, $\mu(a_t) \in [r,s)$, $\mu(a_t) \in (r,s]$ i $\mu(a_t) \in [r,s]$, tako da je skup $\{f : f = \sum_{a_t \in SDNF(p)} \mu(a_t)\}$ ili konačan ili neprebrojiv, pa ne može biti jednak beskonačanom prebrojivom skupu F. Odatle formula $Q_F p$ nije definabilna ni jednom verovatnosnom formulom α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P))$. ■

Teorema 4.14 Neka je O rekurzivna familija rekurzivnih podskupova od S i $s \in S \setminus \{1\}$. Za proizvoljno iskazno slovo $p \in \phi$ ne postoji verovatnosna formula α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$ takva da je formula $P_{\geq s} p$ definabilna formulom α.

Dokaz. Skup vrednosti $\mu(\{w : w \models p\})$ koje se dobija rešavanjem sistema koji odgovaraju verovatnosnoj formuli α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$ je ili prebrojiv ili je njegov komplement prebrojiv, dok je skup tih vrednosti u klasi $M(P_{\geq s} p)$ jednak $[s,1]$. Odatle, ne postoji verovatnosna formula α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(Q,O))$ tako da je $P_{\geq s} p$ definabilno formulom α. ■

4.3 Izražajnost logika $LPP_2(P,Q,O)$

Kao što smo već konstatovali, svaki izbor familije O dovodi do posebne logike. Međutim, može se pretpostaviti da je neki skup $F_1 \in O_1$ prikaziv pomoću skupovnih operacija nad elementima neke druge familije O_2. Tada se formule na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_1))$ koje sadrže operator Q_{F_1} mogu izraziti i u logici $LPP_2(P,Q,O_2)$. Na primer, ako je $F_1 = \{\frac{1}{2^i}, i = 1,2,\ldots\} \cup \{\frac{1}{3^i}, i = 1,2,\ldots\}$, a $O_2 = \{F_2, F_3\}$, gde su $F_2 = \{\frac{1}{2^i}, i = 1,2,\ldots\}$ i $F_3 = \{\frac{1}{3^i}, i = 1,2,\ldots\}$, onda je za svaku klasičnu formulu A, klasa modela u kojima važi formula $Q_{F_1} A$ jednaka klasi modela u kojima važi formula $Q_{F_2} A \vee Q_{F_3} A$, tj. formula $Q_{F_1} A$ je definabilna formulom $Q_{F_2} A \vee Q_{F_3} A$.

U nastavku teksta ćemo opisati relaciju kojom se, u ovom smislu, upoređuje izražajnost logika $LPP_2(P,Q,O)$ za razne familije O. Kao i malopre, razmatraćemo klasu $LPP_{2,\mathrm{Meas}}(P,Q,O)$-modela i koristiti oznaku $M(\Phi)$ za klasu svih modela koji zadovoljavaju formulu Φ. Sa O, O_1, O_2, $\ldots$ ćemo označavati rekurzivne familije rekurzivnih racionalnih podskupova skupa $[0,1]$

Definicija 4.15 Neka je $F \subset S$. *Kvazi komplement* skupa F je skup $1 - F = \{1 - f : f \in F\}$.

Na primer, ako je skup $F = \{\frac{1}{2^i} : i = 1,2,\ldots\}$, onda je u skladu sa definicijom 4.15 njegov kvazi komplement skup $1 - F = \{\frac{2^i - 1}{2^i} : i = 1,2,\ldots\}$. Lako se vidi da operacija kvazi komplementiranja ima sledeće osobine:

- $1 - (F \cap G) = (1 - F) \cap (1 - G)$,
- $1 - (F \cup G) = (1 - F) \cup (1 - G)$,
- $1 - (F \setminus G) = (1 - F) \setminus (1 - G)$ i
- $1 - (1 - F) = F$.

Ove osobine, zajedno sa osobinama skupovnih operacija unije, preseka i razlike, garantuju da je svaki skupovni izraz na jeziku $\{\cup, \cap, \setminus, 1-\}$ jednak izrazu u normalnoj formi pod kojom podrazumevamo konačnu uniju konačnih preseka skupova, razlika skupova i kvazi komplemenata skupova.

Definicija 4.16 Neka je skup $F_1 \in O_1$. F_1 je *prikaziv* u O_2 ako je jednak konačnoj uniji konačnih preseka skupova, razlika skupova i kvazi komplemenata skupova iz O_2 i skupova $[r, s]$, $[r, s)$, $(r, s]$ i (r, s), gde su r i s racionalni brojevi iz $[0, 1]$. Familija skupova O_1 je *prikaziva* u familiji skupova O_2 ako je svaki skup $F_1 \in O_1$ prikaziv u O_2.

Na primer, neka je $k > 0$ prirodan broj i neka su skupovi:

- $F_1 = \{\frac{1}{2^i} : i = k, k+1, \ldots\} \cup \{\frac{3^i - 1}{3^i} : i = k, k+1, \ldots\}$,
- $F_2 = \{\frac{1}{2^i} : i = 1, 2, \ldots\}$ i
- $F_3 = \{\frac{1}{3^i} : i = 1, 2, \ldots\}$

i neka je $O_2 = \{F_2, F_3\}$. Prema definiciji 4.16, F_1 je prikaziv u O_2 jer

- $F_1 = (F_2 \cap [0, \frac{1}{2^k}]) \cup ((1 - F_3) \cap [\frac{3^k - 1}{3^k}, 1])$.

S duge strane, skup

- $F_4 = \{\frac{1}{2^{2i}} : i = 1, 2, \ldots\}$

nije prikaziv u O_2.

Sledećom definicijom ćemo uvesti relaciju 'biti izražajnija' između $LPP_2(P, Q, O)$-logika. Definicija će biti data u terminima jednakosti nekih klasa modela. Zatim ćemo pokazati da se ona poklapa sa relacijom prikazivosti između familija skupova.

Definicija 4.17 Logika $LPP_2(P, Q, O_2)$ je *izražajnija* od logike $LPP_2(P, Q, O_1)$ ($LPP_2(P, Q, O_1) \leq LPP_2(P, Q, O_2)$) ako je svaka formula jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P, Q, O_1))$ definabilna nekom formulom jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P, Q, O_2))$.

Drugačije rečeno, u skladu sa definicijom 4.12 definabilnosti, $LPP_2(P, Q, O_1) \leq LPP_2(P, Q, O_2)$ ako za svaku formula Φ jezika $\mathrm{For}(LPP_2(P, Q, O_1))$ postoji formula Ψ jezika $\mathrm{For}(LPP_2(P, Q, O_2))$ tako da $M(\Phi) = M(\Psi)$.

Teorema 4.18 Neka je skup $F_1 \in O_1$ prikaziv u familiji skupova O_2. Za proizvoljnu klasičnu formulu A postoji verovatnosna formula β na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P, Q, O_2))$ tako da je formula $Q_{F_1} A$ definabilna formulom β.

Dokaz. Neka je $F_1 = \cup_{i=1}^m \cap_{j=1}^{k_i} F_{ij}$, gde su skupovi F_{ij} kao u definiciji 4.16 prikazivosti. Prema teoremi 4.3, za proizvoljnu klasičnu formulu A, u logici $LPP_2(P, Q, O_1 \cup O_2)$ je

$$\vdash Q_{F_1} A \leftrightarrow \vee_{i=1}^m \wedge_{j=1}^{k_i} R_{F_{ij}} A$$

gde je

$$R_{F_{ij}} A = \begin{cases} P_{\geq s} A \wedge P_{\leq r} A, & \text{ako } F_{ij} = [s, r] \\ P_{\geq s} A \wedge P_{< r} A, & \text{ako } F_{ij} = [s, r) \\ P_{> s} A \wedge P_{\leq r} A, & \text{ako } F_{ij} = (s, r] \\ P_{> s} A \wedge P_{< r} A, & \text{ako } F_{ij} = (s, r) \\ Q_{F_{ij}} A, & \text{ako } F_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} \neg A, & \text{ako } F_{ij} = 1 - F'_{ij}, F'_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} A \wedge \neg Q_{F''_{ij}} A, & \text{ako } F_{ij} = F'_{ij} \setminus F''_{ij}, F'_{ij}, F''_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} A \wedge \neg(P_{\geq s} A \wedge P_{\leq r} A), & \text{ako } F_{ij} = F'_{ij} \setminus [s, r], F'_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} A \wedge \neg(P_{\geq s} A \wedge P_{< r} A), & \text{ako } F_{ij} = F'_{ij} \setminus [s, r), F'_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} A \wedge \neg(P_{> s} A \wedge P_{\leq r} A), & \text{ako } F_{ij} = F'_{ij} \setminus (s, r], F'_{ij} \in O_2 \\ Q_{F'_{ij}} A \wedge \neg(P_{> s} A \wedge P_{< r} A), & \text{ako } F_{ij} = F'_{ij} \setminus (s, r), F'_{ij} \in O_2 \end{cases}$$

Formula $\vee_{i=1}^m \wedge_{j=1}^{k_i} R_{F_{ij}} A$ je zapisana na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P, Q, O_2))$ i $M(Q_{F_1} A) = M(\vee_{i=1}^m \wedge_{j=1}^{k_i} R_{F_{ij}} A)$.

■

Teorema 4.19 Ako je familija skupova O_1 prikaziva u familiji O_2, onda je $LPP_2(P,Q,O_1) \leq LPP_2(P,Q,O_2)$.

Dokaz. Sve klasične formule pripadaju jezicima $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_1))$ i $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$, tako da su sve one definabilne u $LPP_2(P,Q,O_2)$. Razmotrimo proizvoljnu verovatnosnu formulu α na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_1))$. Prema teoremi 4.18, svaka njena potformula oblika $Q_F B_i$ je definabilna nekom verovatnosnom formulom β_i na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$. Zamenom $Q_F B_i$ sa β_i u formuli α dobija se formula α' na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ takva da je $M(\alpha) = M(\alpha')$. Sada po definiciji sledi da je $LPP_2(P,Q,O_1) \leq LPP_2(P,Q,O_2)$. ■

Teorema 4.20 Ako $LPP_2(P,Q,O_1) \leq LPP_2(P,Q,O_2)$, onda je familija skupova O_1 prikaziva u familiji O_2.

Dokaz. Da bismo izbegli ponavljanje sličnih argumenata, u dokazu ćemo koristiti oznaku $Q_{\{f\}}$ umesto $P_{=f}$, iako operator $Q_{\{f\}}$ možda i ne pripada razmatranim jezicima.

Po pretpostavci za svako iskazno slovo $p \in \phi$ i svaki $F \in O_1$ postoji formula β na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ takva da je $M(Q_{F_1}p) = M(\beta)$. Ako je F_1 prazan skup, on je trivijalno prikaziv u O_2. Ako je F_1 konačan skup važi $F_1 = \cup_{f \in F_1}[f,f]$, tako da je F_1 prikaziv u O_2. Ako je $F_1 = \{f_1, f_2, \ldots\}$ beskonačan skup, formula β ne može biti klasična. Pretpostavimo suprotno. Tada razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ako $\beta \to \neg p$ i $\beta \to p$ nisu teoreme, razmotrimo model $M = \langle \{w_1, w_2\}, 2^{\{w_1,w_2\}}, \mu, v\rangle$ takav da je $\mu(\{w_1\}) = q$ i $\mu(\{w_2\}) = 1 - q$ pri čemu je q iracional broj, $v(w_1)(p) = v(w_1)(\beta) = \top$ i $v(w_2)(\neg p) = v(w_2)(\beta) = \top$. Pošto je $\mu([p]) = q$, sledi da $M \in M(\beta)$ i $M \notin M(Q_{F_1}p)$.

- Ako $\beta \to \neg p$ nije teoema, dok $\beta \to p$ to jeste, razmotrimo $s \in F_1 \setminus \{0\}$ i model $M = \langle \{w_1, w_2\}, 2^{\{w_1,w_2\}}, \mu, v\rangle$ takav da je $\mu(\{w_1\}) = s$, $\mu(\{w_2\}) = 1 - s$, $v(w_1)(p) = v(w_1)(\neg\beta) = \top$ i $v(w_2)(\neg p) = v(w_2)(\neg\beta) = \top$. Pošto je $\mu([p]) = s$, sledi da je $M \notin M(\beta)$ i $M \in M(Q_{F_1}p)$.

- Ako je $\beta \to \neg p$ teorema, razmotrimo $s \in F_1 \setminus \{0\}$ i model $M = \langle \{w_1, w_2\}, 2^{\{w_1,w_2\}}, \mu, v\rangle$ takav da $\mu(\{w_1\}) = s$, $\mu(\{w_2\}) = 1 - s$, $v(w_1)(p) = v(w_1)(\neg\beta) = \top$ i $v(w_2)(\neg p) = v(w_2)(\beta) = \top$. Pošto je $\mu([p]) = s$, sledi da je $M \notin M(\beta)$ i $M \in M(Q_{F_1}p)$.

Pošto su svi prethodni slučajevi doveli do kontradikcije, β ne može biti klasična iskazna formula. Dakle, $\beta \in \mathrm{For}_{\mathrm{P}}(LPP_2(P,Q,O))$. Neka su $p_1, \ldots, p_n$ sva iskazna slova koja se javljaju u β. Kako je $\beta \leftrightarrow (\beta \wedge P_{\geq 0}p)$ valjana formula, možemo pretpostaviti da je među njima i iskazno slovo p. Zato, neka je p iskazno slovo p_1 i neka su $a_1, \ldots, a_{2^n}$ svi atomi od iskaznih slova iz β uređeni tako da je $a_i = p \wedge \ldots$ za $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$ i $a_i = \neg p \wedge \ldots$ za $i = 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$. Sa $y_1, \ldots, y_{2^n}$ označimo verovatnoće atoma, odnosno skupova svetova u nekom modelu u kojima važe odgovarajući atomi. Sada se svi modeli mogu posmatrati kao tačke $\langle s_1, s_2, \ldots, s_{2^n}\rangle$ u 2^n dimenzionalnom prostoru E. Koordinate tačaka su upravo verovatnoće atoma. Preciznije, te tačke leže u hiperravni Γ_0 određenoj jednačinom $\sum_{i=1}^{2^n} y_i = 1$ i to u onom njenom delu koji pripada oblasti E_0 u kojoj su koordinate nenegativne i ograničene sa 1, tj. u oblasti odeređenoj nejednačinama $y_i \geq 0$, $y_i \leq 1$ za $i = 1, \ldots, 2^n$. U preostalom delu dokaza ćemo koristeći sredstva analitičke geometrije pokazati da jednakost klasa modela formula $Q_{F_1}p$ i β dovodi do prikazivosti skupa F_1 u familiji O_2. Pošto je F_1 proizvoljan skup iz O_1, to će značiti i da je familija O_1 prikaziva u O_2.

Međutim, pre samog dokaza razmotrićemo jedan primer. Neka su p_1 i p_2 sva iskazna slova u β, $a_1 = p_1 \wedge p_2$, $a_2 = p_1 \wedge \neg p_2$, $a_3 = \neg p_1 \wedge p_2$ i $a_4 = \neg p_1 \wedge \neg p_2$ odgovarajući atomi čije su verovatnoće $y_1, \ldots, y_4$. Neka jedan disjunkt iz $DNF(\beta)$ sadrži formulu $Q_{\{1\}}p_2$, odnosno $Q_{\{1\}}((p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2))$. Klasa modela $M(Q_{\{1\}}p_2)$ sadrži sve modele oblika $\langle y, 0, 1-y, 0\rangle$ za $y \in [0,1]$. Da bi bilo $M(Q_{F_1}p_1) = M(\beta)$, moraju preostale formule u β da eliminišu sve modele koji nisu u $M(Q_{F_1}p_1)$, recimo modele opisanog oblika za iracionalne y, zatim za racionalne brojeve $y \notin F_1$ itd.

Neka je $DNF(\beta)$ disjunktivna normalna forma formule β u kojoj ni jedan disjunkti nije kontradiktoran. Sa D označimo proizvoljan disjunkt, a sa Sistem(D) i Res(Sistem(D)) odgovarajući sistem (kao u odeljku 4.1.6) i skup njegovih rešenja. Podsetimo se da svaki Sistem(D) sadrži tri dela:

- skup linearnih jednačina i nejednačina,
- skup pozitivnih ograničenja oblika $\sum_{a_t} \mu(a_t) \in F$ i
- skup negativnih ograničenja oblika $\sum_{a_t} \mu(a_t) \notin F$.

Skup linearnih jednačina i nejednačina, ako ceo sistem nije kontradiktoran, određuje jednu nepraznu konveksnu oblast u $E_0 \cap \Gamma_0$. Sa C(Sistem(D)) označimo minimalno konveksno zatvorenje skupa rešenja Res(Sistem(D)). Skup negativnih ograničenja eliminiše najviše prebrojivo mnogo oblasti koje se nalaze u skupu C(Sistem(D)).

Model M pripada klasi $M(Q_{F_1}p)$ ako i samo ako je rešenje sistema:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{2^n} y_i &= 1 \\ y_i &\geq 0, \text{ za } i = 1, \ldots, 2^n \\ \textstyle\sum_{i=1}^{2^{n-1}} y_i &\in F_1 \end{aligned}$$

Za $f_k \in F_1$ sa Γ_{f_k} ćemo označiti hiperravan određenu jednačinom $\sum_{i=1}^{2^{n-1}} y_t = f_k$, a sa I_{f_k} presek $E_0 \cap \Gamma_0 \cap \Gamma_{f_k}$. Primetimo da je dimenzija od I_{f_k} jednaka $2^n - 2$, tako da I_{f_k} ne može biti jednak prebrojivoj uniji oblasti dimenzije manje od $2^n - 2$, a takođe i da je $\cup_{f_k \in F_1} I_{f_k} = M(Q_{F_1}p) = M(\beta)$. Zbog prethodnog, za svaki I_{f_k} postoji bar jedan disjunkt $D \in DNF(\beta)$ takav da Res(Sistem(D)) sadrži bar jednu oblast od I_{f_k} bez najviše prebrojivo mnogo oblasti dimenzije manje od $2^n - 2$. Nazovimo tu oblast ko-prebrojiva oblast od I_{f_k}. Ko-prebrojiva oblast od I_{f_k} pripada skupu Res(Sistem(D)) ako postoji hiperravan Γ (definisana nekom jednačinom u Sistem(D)) takva da je $I_{f_k} \subset E_0 \cap \Gamma_0 \cap \Gamma$.

Sve hiperravni kroz I_{f_k} formiraju jedan svežanj hiperravni. Jednačina hiperravni u tom svežnju je [75]:

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^{2^n} y_i + \nu \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} y_i = \lambda + \nu \cdot f_k$$

što se može zapisati kao:

$$(\lambda + \nu) \cdot \sum_{i=1}^{2^{n-1}} y_i + \lambda \cdot \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} y_i = \lambda + \nu \cdot f_k$$

Pošto koeficijenti u Sistem(D) smeju biti jedino 0 ili 1, mogući su samo sledeći slučajevi:

- $\lambda = 1$, $\nu = 0$, ovo je hiperavan Γ_0,
- $\lambda = 0$, $\nu = 1$, ovo je hiperravan Γ_{f_k} i
- $\lambda = 1$, $\nu = -1$, ova hiperravan odgovara formuli $Q_{\{1-f_k\}}(a_{2^{n-1}+1} \wedge \ldots \wedge a_{2^n})$ koja je prema teoremi 4.3.5 ekvivalentna sa $Q_{\{f_k\}}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^{n-1}})$.

Odavde sledi da za svaki $f_k \in F_1$ postoji bar jedan disjunkt D iz $DNF(\beta)$ i u njemu bar jedna formula oblika $Q_H(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^{n-1}})$ (ili $Q_{1-H}(a_{2^{n-1}+1} \wedge \ldots \wedge a_{2^n})$) takva da $f_k \in H$. Nazovimo disjunkt $D \in DNF(\beta)$ značajnim za $f_k \in F_1$ ako bar jedan ko-prebrojivi segment od I_{f_k} pripada skupu Res(Sistem(D)). Disjunkt D je značajan ako postoji $f_k \in F_1$ takav da je D značajan za f_k. Kao što je upravo konstatovano, za svaki $f_k \in F_1$ postoji bar jedan značajan disjunkt. U nastavku ćemo razmatrati samo značajne disjunkte $D \in DNF(\beta)$.

Primenom teorema iz tvrđenja 4.3 na formule u značajnim disjunktima dobijamo da svaki disjunkt sadrži samo jednu formulu oblika $Q_H(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^{n-1}})$. Nazovimo skup H značajan skup. Takođe, sem ove formule, značajni disjunkti ne sadrže ni jednu formulu oblika: $\neg Q_H(a_1 \vee \ldots \vee a_{2^{n-1}})$, $P_{\geq s}(a_1 \vee \ldots \vee a_{2^{n-1}})$, $\neg P_{\geq s}(a_1 \vee \ldots \vee a_{2^{n-1}})$, $Q_H(a_{2^{n-1}+1} \vee \ldots \vee a_{2^n})$, $\neg Q_H(a_{2^{n-1}+1} \vee \ldots \vee a_{2^n})$, $P_{\geq s}(a_{2^{n-1}+1} \vee \ldots \vee a_{2^n})$ ili $\neg P_{\geq s}(a_{2^{n-1}+1} \vee \ldots \vee a_{2^n})$. Primetimo da se spomenute primene teoreme 4.3 mogu izvesti u dovoljno izražajnoj logici koja sadrži sve potrebne skupovne verovatnosne operatore i čiji je jezik možda bogatiji od jezika $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$, ali da su svi ti skupovi prikazivi u O_2. U slučajevima u kojima bi se inače pojavila dvosmislenost ili je potrebno naglasiti uzajamnu vezu, sa $H(D)$ ćemo označavati značajan skup H iz značajnog disjunkta D.

Dosadašnja analiza pokazuje da je skup F_1 podskup unije značajnih skupova. U nastavku dokaza ćemo pokazati da se skup F_1 može prikazati konačnom unijom konačnih preseka značajnih skupova i intervala sa racionalnim granicama. Pomoću tih preseka iz unije značajnih skupova će biti eliminisani elementi unije koji ne pripadaju skupu F_1.

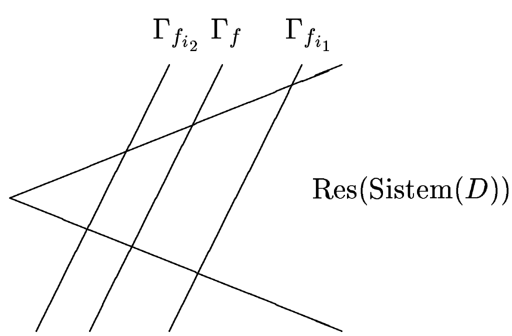
Za svaki značajan disjunkt D skup $H(D)$ podelimo na tri uzajamni disjunktna skupa:

- $H(D)_z = \{f_k : f_k \in H \cap F_1, D \text{ je značajan za } f_k\}$,
- $H(D)_{nz} = \{f_k : f_k \in H \cap F_1, D \text{ nije značajan za } f_k\}$ i
- $H(D)_{nd} = \{f : f \in H \setminus F_1\}$.

Značajni disjunkt D i odgovarajući skup $H(D)$ nazovimo regularnim ako postoji konačni niz $J(D)_1$, $\ldots$, $J(D)_{l(D)}$ uzajamno disjunktivnih intervala sa racionalnim granicama takav da važi $H(D)_z \subset H(D) \cap (\cup_{i=1}^{l(D)} J(D)_i)$ i $H(D)_{nd} \cap (\cup_{i=1}^{l(D)} J(D)_i) = \emptyset$. Ovaj niz intervala izdvaja iz $H(D)$ sve $f_k \in F_1$ za koje je D značajan, pri čemu se u preseku ne nalazi ni jedan element iz $H(D)$ koji nije u F_1. Ako su svi značajni disjunkti regularni, neposredno sledi da je:

$$F_1 = \cup_{D \text{ je značajan}} H(D) \cap (\cup_{i=1}^{l(D)} J(D)_i)$$

jer za svaki $f_k \in F_1$ postoji bar jedan značajni skup H koji sadrži f_k. Pošto su svi značajni skupovi prikazivi u O_2, u tom slučaju je i skup F_1 prikaziv u O_2.

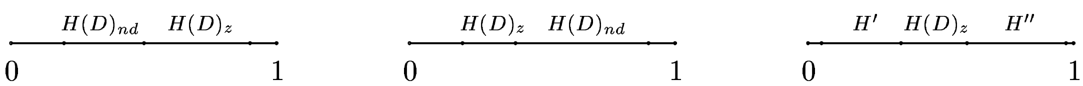


Slika 4.1. $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap I_f \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da postoji značajan disjunkt D koji nije regularan. U tom slučaju i $H(D)_z$ i $H(D)_{nd}$ moraju biti beskonačni jer bi u suprotnom postojao odgovarajući niz intervala $\{[f,f]\}_{f \in H(D)_z}$ koji bi D učinio regularnim. Razmotrimo kakav međusobni odnos mogu imati elementi skupova $H(D)_z$ i $H(D)_{nd}$. Neka je $f \in H(D)_{nd}$, hiperravan Γ_f definisana sa $\sum_{i=1}^{2^{n-1}} y_i = f$ i neka I_f označava deo preseka hiperravni Γ_0 i Γ_f koji pripada skupu $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$. Ako postoji par $f_{i_1}, f_{i_2} \in H(D)_z$ takav da je $f_{i_1} < f < f_{i_2}$ (slika 4.1), skup $\mathrm{Res}(\mathrm{Sistem}(D))$ sadrži ko-prebrojivu podoblast od I_f, jer je $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ konveksan skup za koji je $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap I_{f_1} \neq \emptyset$ i $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap I_{f_2} \neq \emptyset$. Pošto $f \notin F_1$, ovo je kontradikcija, pa su za neregularni disjunkt D mogući samo sledeći međusobno isključivi slučajevi (slika 4.2):

- za sve $f \in H(D)_{nd}$ i $f_k \in H(D)_z$ je $f < f_k$,
- za sve $f \in H(D)_{nd}$ i $f_k \in H(D)_z$ je $f > f_k$ i
- postoji particija (H', H'') skupa $H(D)_{nd}$ takva da za sve $f' \in H'$, $f'' \in H''$ i $f_k \in H(D)_z$ važi $f' < f_k < f''$.

Kažimo da su neregularni značajni disjunkt D i odgovarajući skup $H(D)$ tipa 1, tipa 2 ili tipa 3 ako $H(D)$ zadovoljava prvi, drugi ili treći od nabrojanih uslova.



Slika 4.2. Odnos skupova $H(D)_z$ i $H(D)_{nd}$.

Ako je $D = Q_{H(D)}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1}) \wedge C$ disjunkt tipa 3, moguće je skup $H(D)$ podeliti u dva disjunktna dela $H(D)_1$ i $H(D)_2$ tako da za sve $f \in H(D)_1$ i $h \in H(D)_2$ bude $f < h$, $H' \subset H(D)_1$, $H'' \subset H(D)_2$ i $H(D)_i \cap H(D)_z \neq \emptyset$ za $i = 1, 2$. Pošto je

$$Q_{H(D)}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1}) \leftrightarrow Q_{H(D)_1}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1}) \vee Q_{H(D)_2}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1})$$

i

$$D \leftrightarrow (Q_{H(D)_1}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1}) \wedge C) \vee (Q_{H(D)_2}(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1}) \wedge C),$$

disjunkt D se može posmatrati kao dva disjunkta od kojih je prvi tipa 1, a drugi tipa 2. Odatle, možemo pretpostaviti da su svi neregularni značajni disjunkti i odgovarajući skupovi prva dva tipa.

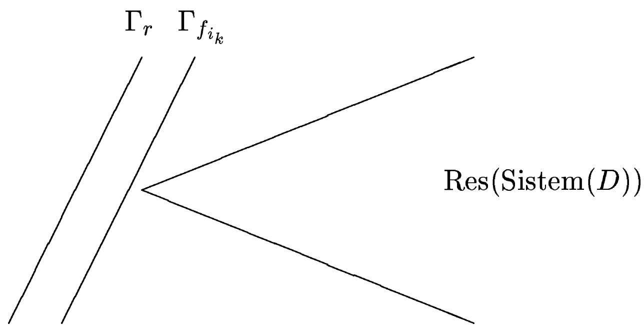
Pošto se $H(D)_z$ ne može razdvojiti od $H(D)_{nd}$ konačnom unijom intervala sa racionalnim granicama, mora postojati iracionalni broj r koji se nalazi između skupova $H(D)_{nd}$ i $H(D)_z$. Ako je $H(D)$ tipa 1, onda je $\sup H(D)_{nd} = r = \inf H(D)_z$. Ako je $H(D)$ tipa 2, onda je $\inf H(D)_{nd} = r = \sup H(D)_z$. Nazovimo r donjom (gornjom) rupom skupa $H(D)$ ako je $H(D)$ tipa 1, odnosno tipa 2 (slika 4.3). Svaki neregularni disjunkt može imati najviše jednu rupu, pa u svim neregularnim disjunktima iz $DNF(\beta)$ može biti najviše konačno mnogo rupa.

Slika 4.3. Donje i gornje rupe za značajne skupove.

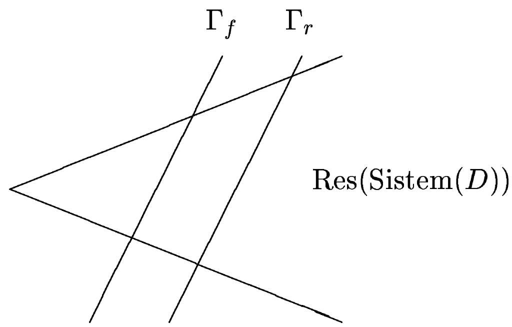
Neka je D neregularni disjunkt tipa 1, odnosno tipa 2, i r odgovarajuća rupa. Neka je Γ_r hiperravan definisana sa $\sum_{i=1}^{2^n-1} y_i = r$. Kada bi bilo $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r = \emptyset$, disjunkt D ne bi bio značajan za bar neki $f_k \in H(D)_z$ što je kontradikcija (slika 4.4).

Dakle, $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r \neq \emptyset$. Granice od $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ ne mogu biti paralelne sa Γ_r jer je $Q_H(a_1 \wedge \ldots \wedge a_{2^n-1})$ jedina formula u disjunktu D koja određuje hiperravni paralelne sa Γ_r. Ako bi skup $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r$ sadržao bar dve tačke, tada bi za bar jedan $f \in H(D)_{nd}$ neka ko-prebrojiva oblast od I_f pripadala skupu $\mathrm{Res}(\mathrm{Sistem}(D))$ što je takođe kontradikcija (slika 4.5).

Iz ovoga sledi da je $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r \neq \emptyset$ i da sve tačke iz skupa $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ pripadaju jednom zatvorenom poluprostoru čija je granica Γ_r. Odatle, $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r$ mora biti jednočlan. Skup $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ ne sadrži $\cup_{f_k \in H(D)_z} I_{f_k}$ jer granice od $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ nisu paralelne sa Γ_r. Za



Slika 4.4. $\mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r = \emptyset$.



Slika 4.5. $\mid \mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D)) \cap \Gamma_r \mid \geq 2$.

beskonačno mnogo $f_k \in H(D)_z$ postoje ko-prebrojive oblasti u I_{f_k} koje nisu u C(Sistem(D)) (slika 4.6).

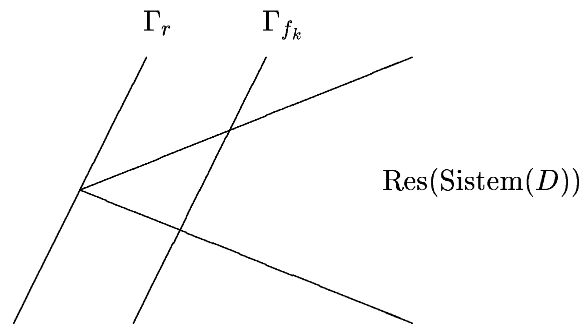
Pošto $\cup_{f_k \in H(D)_z} I_{f_k} \subset M(Q_{F_1} p)$ za te f_k moraju postojati i drugi značajni disjunkti. Ako su ti drugi disjunkti regularni, moguće je pronaći interval J sa racionalnim granicama koji sadrži sve f_k za koje su odgovarajući I_{f_k} u C(Sistem(D)), dok taj interval ne sadrže ni jedan $f \in H(D)_{nz}$. Preostali f_k iz $H(D)_z$ će biti prikazani drugim regularnim skupovima. Spomenuti interval J se definiše na sledeći način (slika 4.7). Neka je značajni neregularan disjunkt D tipa 1. Neka je $\epsilon(D)_1$ rastojanje Γ_r i najbliže tačke, temena skupa C(Sistem(D)) koja ne pripada skupu Γ_r i $\epsilon(D)$ racional broj iz $(r, r + \epsilon(D)_1)$. Svi $f_k \in H(D)_z$ za koje je $I_{f_k} \subset \mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$, moraju biti u $[\epsilon(D), 1]$ jer za njih važi $1 \geq f_k > \epsilon(D)$. Pošto su svi f iz $H(D)_{nz}$ manji od r, oni ne pripadaju $[\epsilon(D), 1]$. Slično, za značajni neregularni disjunkt D koji je tipa 2 i za racionalni broj $\epsilon(D)$ iz $(r - \epsilon(D)_1, r)$, svi $f_k \in H(D)_z$ za koje je $I_{f_k} \subset \mathrm{C}(\mathrm{Sistem}(D))$ moraju biti u $[0, \epsilon(D)]$, dok je $H(D)_{nz} \cap [0, \epsilon(D)] = \emptyset$.

Ako za svaki značajni neregularni disjunkt D i $f_k \in H(D)_z$ za koje bar jedna ko-prebrojiva oblast od I_{f_k} ne pripada skupu C(Sistem(D)) postoji regularan značajni disjunkt D' takav da je $f_k \in H(D')_z$, onda je F_1 prikaziv u O_2 kao konačna unija skupova koji su oblika:

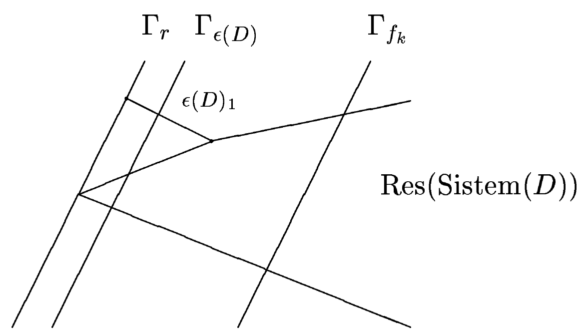
- $H(D) \cap (\cup_{i=1}^{l(D)} J(D)_i)$ za neki značajan regularan disjunkt D i neki konačan niz $J(D)_1, \ldots, J(D)_{l(D)}$ disjunktnih intervala sa racionalnim granicama,

- $H(D) \cap [\epsilon(D), 1]$ za neki značajan neregularan disjunkt D tipa 1 i racionalan broj $\epsilon(D)$ definisan kao malopre i

- $H(D) \cap [0, \epsilon(D)]$ za neki značajan neregularan disjunkt D tipa 2 i racionalan broj $\epsilon(D)$ definisan kao malopre,



Slika 4.6. $\mid$ C(Sistem(D)) $\cap \Gamma_r \mid= 1$.



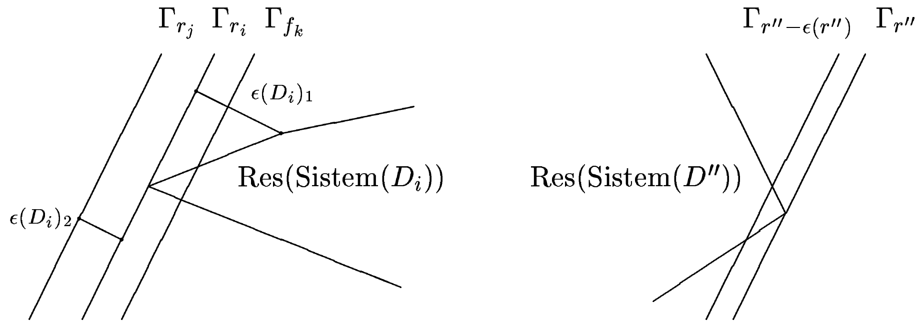
Slika 4.7. Definicija $\epsilon(D)$.

gde su svi $H(D)$ prikazivi u O_2.

Neka su D_1, $\ldots$, D_m svi značajni neregularni intervali takvi da za svaki $i = 1, \ldots m$ postoji bar jedan $f(D_i)_k \in H(D_i)_z$ i ko-prebrojiva oblast od $I_{f(D_i)_k}$ koja nije u CR(Sistem(D_i)) i neka ni jedan značajan regularan disjunkt D' nije značajan za $f(D_i)_k$. Za svaki takav $f(D_i)_k$ mora bar jedna ko-prebrojiva oblast biti u skupu rešenja sistema koji odgovara nekom disjunktu koji nije regularan. Dakle, mora postojati bar jedan značajan neregularan disjunkt $D'' \neq D_i$ takav da $f(D_i)_k \in H(D'')_z$ (slika 4.8).

Rupu za D_i označimo sa r_i. Neka je $\epsilon(D_i)_1$ rastojanje između hiperravni Γ_{r_i} i najbližeg temena skupa CR(Sistem(D_i)) koje ne pripada Γ_{r_i}. Neka je $\epsilon(D_i)_2 = \min\{\mid r_i - r_j \mid, r_i \neq r_j\}$, gde su r_j rupe značajnih neregularnih intervala. Prema definiciji, mora biti $\epsilon(D_i)_1 > 0$ i $\epsilon(D_i)_2 > 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Neka je ϵ proizvoljan racionalni broj iz $(0, \min\{\epsilon(D_i)_1, \frac{\epsilon(D_i)_2}{2}, r_i, 1 - r_i : i = 1, \ldots, m\})$. Ponovo je $\epsilon > 0$. Za svaki disjunkt D_i tipa 1 sa I_i označimo interval $[r_i + \epsilon(r_i), 1]$, gde je $0 < \epsilon(r_i) < \epsilon$ i $r_i + \epsilon(r_i)$ racionalan broj. Slično, za svaki disjunkt D_i tipa 2 sa I_i označimo interval $[0, r_i - \epsilon(r_i)]$. Intervali I_i za $i = 1, \ldots, m$ imaju racionalne granice i ne sadrže elemente iz $H(D_i)_{nz}$. Neka $f(D_i)_k \in H(D'')_z$ za značajan neregularan disjunkt $D'' \neq D_i$ za koji je rupa označena sa r'' i neka je D'' tipa 1. Zbog načina izbora brojeva $r_i + \epsilon(r_i)$ i $r'' + \epsilon(r'')$, važi da je $f(D_i)_k \in [r_i + \epsilon(r_i), 1]$ ili $f(D_i)_k \in [r'' + \epsilon(r''), 1]$. Ako je D'' značajan neregularan disjunkt tipa 2, onda će biti $f(D_i)_k \in [r_i + \epsilon(r_i), 1]$ ili $f(D_i)_k \in [0, r'' - \epsilon(r'')]$. Dakle, svaki $f(D_i)_k$ koji prema definiciji skupa $H(D_i)_z$ pripada F_1 će biti sadržan u nekom od ovakvih intervala koji, opet, neće sadržati elemente iz $H(D_i)_{nz}$. Prema tome, F_1 se može prikazati pomoću skupova $H(D)_i \cap I_i$ i značajnih regularnih skupova.

Pošto je svaki $F_1 \in O_1$ prikaziv u O_2 i cela familija O_1 je prikaziva u O_2. $\blacksquare$



Slika 4.8. Definicija ϵ.

Sledeće dve teoreme su direktne posledice teorema 4.19 i 4.20.

Teorema 4.21 Familija skupova O_1 je prikaziva u familiji O_2 ako i samo ako je $LPP_2(P,Q,O_1) \leq LPP_2(P,Q,O_2)$.

Teorema 4.22 Neka je $F_1 \in O_1$, $p \in \phi$ i β formula na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ takva da je formula $Q_{F_1}p$ definabilna formulom β. Tada postoji formula γ na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ koja od iskaznih slova sadrži samo p takva da je formula $Q_{F_1}p$ definabilna formulom γ.

Dokaz. Neka je $M(Q_{F_1}p) = M(\beta)$. Prema teoremi 4.20, skup F_1 je prikaziv u O_2. Zbog toga možemo, kao i u teoremi 4.19, pokazati da postoji formula γ na jeziku $\mathcal{L}(LPP_2(P,Q,O_2))$ koja od iskaznih slova sadrži samo p takva da je u dovoljno bogatoj logici $\vdash Q_{F_1}p \leftrightarrow \gamma$, pa je i $M(Q_{F_1}p) = M(\gamma)$. ■

5

Verovatnosne temporalne logike

U ovom poglavlju ćemo verovatnosnoj logici dodati vremenski sastavak kako bismo mogli opisati promenu verovatnoće iskaza u vremenu. Definisaćemo odgovarajuće verovatnosno-vremenske modele u kojima će verovatnoća biti definisana na skupovima vremenskih trenutaka i dati aksiomatizacije za koje ćemo dokazati teoreme potpunosti čime će se ilustrovati opštost pristupa koji smo prikazali u poglavlju 2.

Iskazna logika $LPPT$, koju opisujemo u odeljku 5.2, prikazana je u [82]. U njoj su dozvoljene proizvoljne verovatnoće skupova trenutaka, dok su u logici $LPPT_{\frac{1}{2}}$ koju predstavljamo u odeljku 5.3 verovatnoće tih skupova unapred fiksirane. Aksiomatizacije odgovarajućih verovatnosno temporalnih logika prvog reda, odnosno logika koje dozvoljavaju i skupovne verovatnosne operatore, se mogu dobiti iz aksiomatizacija iskaznih logika postupkom opisanim u poglavljima 3 i 4.

U literaturi smo pronašli malo radova u kojima se kombinuju verovatnosno i vremensko rezonovanje. U [43] je data korektna i nepotpuna aksiomatizacija jedne verovatnosne temporalne logike prvog reda koja ima potpuno drugačije modele od ovde opisanih (vreme je razgranato, osnovni elementi su intervali). Razmatranje probabilističkih programa inspirisalo je radove [32, 65]. Pretpostavke ovih logika su značajno različite od naših. Akcenat se stavlja na operatore koji odgovaraju programskim konstrukcijama (if-then, while-do, ...), dok je verovatnosni deo u manjoj meri istaknut, a temporalni je implicitan. U logikama postoje razna sintaksna ograničenja koja su posledice orijentacije ka analizi programa. Na primer, u dosegu verovatnosnih operatora se može naći samo iskazna formula, nije dozvoljena konjunkcija verovatnosnih formula itd. Za ove logike je samo analizirana odlučivost i složenost, dok je otvoreno pitanje kompletne aksiomatizacije. Temporalni operatori se eksplicitno pojavljuju u logikama prikazanim u [50, 73], ali u njima nema verovatnosnih operatora, već se valjanost definiše kao važenje skoro svuda.

5.1 Temporalne logike

Istraživanja u oblasti temporalnih logika inspirisana su nesumljivom promenljivošću istinitosne vrednosti iskaza tokom vremena. Iako je ovaj problem uočen još u antici, nastanak savremene teorije temporalnih logika povezuje se Arthur-om Prior-om [87, 88]. Literatura o temporalnim logikama je veoma bogata, tako da ovde navodimo samo još pregledne tekstove [6, 13, 14].

Na najjednostavnijem iskaznom nivou u temporalnim logikama se koristi iskazna slova, klasični operatori i vremenski (Prior-ovi) operatori G i H koji se redom interpretiraju kao: 'uvek će biti' i 'oduvek je bilo'. Operatori F i P se redom definišu kao $\neg G \neg$, odnosno $\neg H \neg$ i interpretiraju kao 'biće' i 'bilo je'. Ako sa p označimo iskaz 'sneg je beo', onda Gp, Fp, Hp i Pp redom znače 'sneg će uvek biti beo', 'sneg će biti beo', 'sneg je oduvek bio beo' i 'sneg je bio beo'. Vreme se, uglavnom, shvata kao skup trenutaka koji nemaju trajanje. Odgovarajući modeli su slični modalnim modelima u kojima relacija dostižnosti odgovara protoku vremena. Odatle se i vremenski operatori ponašaju slično modalnim operatorima. Recimo, u nekom svetu w nekog modela važi formula $G\alpha$ ako formula α važi u svim svetovima koji se nalaze u budućnosti sveta w. Valjanost izvođenja zavisi od izabrane kosmologije: da li vreme ima početak ili kraj, da li je vreme izomorfno skupu celih, prirodnih, racionanih ili realnih brojeva, da li je vreme kružno, da li postoji više mogućih budućnosti i prošlosti, tj. da li se vreme razgranava ili je linearno itd. U temporalnim logikama se analiziraju odnosi ovih pretpostavki i njihov uticaj na semantiku i aksiomatiku. Bogatiji temporalni jezici sadrže i binarne operatore U i S koji se interpretiraju kao '...je dok god nije ...', odnosno '...je otkad je bilo ...'. Prior-ovi operatori su definabilni preko operatora U i S, dok obrnuto ne važi. Pored tradicije u kojoj se na vreme gleda kao na skup trenutaka, postoji pristup u kome su osnovni elementi vremena intervali.

U delu matematičke logike koja se bavi primenama u računarstvu znatna pažnja se poklanja temporalnim logikama u kojima je, zbog načina rada računara, vreme diskretno i u kojima je prisutan i vremenski operator $\bigcirc$ koji se interpretira kao 'u sledećem trenutku' [5, 72]. Temporalne formule se koriste za opis rada programa. Modeli sa linearnim vremenom izomorfnim prirodnim brojevima predstavljaju sekvencu stanja koja se generišu tokom rada programa. Slično verovatnosnim logikama, za iskazne temporalne logike u kojima je vreme izomorfno sa prirodnim ili celim brojevima ne važi teorema kompaktnosti [36], a u slučaju odgovarajućih temporalnih logika prvog reda skup valjanih formula nije rekurzivno nabrojiv, pa ne postoji konačna aksiomatizacija [115, 116].

5.2 Logika $LPPT$

Logika $LPPT$ je iskazna logika pogodna za temporalno i verovatnosno rezonovanje. U njoj ćemo biti u stanju da formalizujemo rečenice poput 'ako je verovatnoća od α bar s, tada će u sledećem momentu verovatnoća od α biti bar r'. Razmatraćemo modele u kojima je vreme izomorfno sa skupom prirodnih brojeva, dakle:

- postoji početni trenutak, ali ne i poslednji,
- vreme je linearno,
- svaki trenutak ima tačno jednog neposrednog sledbenika i
- ako trenutak nije početni, on ima tačno jednog neposrednog prethodnika.

Svakom trenutku biće pridružen verovatnosni prostor tako da:

- verovatnoća je konačno-aditivna,
- u algebri skupova se nalaze samo skupovi budućih trenutaka i
- samo prazan skup ima verovatnoću nula.

Pretpostavke o toku vremena su, kao što smo konstatovali u odeljku 5.1, uobičajene kada se imaju u vidu primene u računarstvu. Te pretpostavke utiču na izbor vremenskih operatora tako da se koriste operatori koji 'gledaju u budućnost', a takođe i na izbor verovatnosnog dela modela. Pošto ćemo verovatnoćom iskaza nastojati da pružimo gradaciju između ekstremnih krajnosti važenja formula u budućnosti: formula uvek važi i formula važi bar jednom, prirodno je da se mere samo skupovi budućih trenutaka. Naime, ono što je u sadašnjosti ili jeste, ili nije, dok je prošlost uvek konačna i poznata, pa tu nema mesta verovatnoći. Modele smo ograničili tako da su samo prazni skupovi verovatnoće nula. Ovo će za posledicu imati da će vremenski operator G značiti isto što i verovatnosni operator $P_{\geq 1}$. Potpuno je legitimno i da se ova pretpostavka odbaci, u kom slučaju spomenuti odnos operatora G i $P_{\geq 1}$ neće više važiti, što ćemo prodiskutovati u odeljku 5.2.6. Sa druge strane, izbor tipa verovatnoće nije proizvoljan. Naime, postupak prelaska sa konačno-aditivne na σ-aditivnu verovatnoću koji se koristi u poglavljima 2 i 3 ovde nije primenljiv pošto su skupovi svetova rezultujućih σ-aditivnih modela neprebrojivi, dok se ovde koriste samo prebrojivi modeli.

Beskonačnost modela onemogućava da se koristi redukcija proizvoljnog modela u kome važi formula na konačni model, kao što je bilo rađeno u poglavlju 2. Slično, prisustvo verovatnoće sprečava upotrebu standardnih postupaka kojima se ispituje odlučivost kod temporalnih logika [5, 35, 89] tako da je pitanje odlučivosti problema zadovoljivosti i valjanosti za logiku $LPPT$ još otvoreno.

5.2.1 Jezik

Jezik $\mathcal{L}(LPPT)$ logike $LPPT$ je proširenje jezika $\mathcal{L}(LPP_1)$ opisanog u odeljku 2.1.1 vremenskim operatorom $\bigcirc$. Dakle, neka je S skup svih racionalnih brojeva iz $[0,1]$. Jezik $\mathcal{L}(LPPT)$ se sastoji od prebrojivog skupa iskaznih slova $\phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, klasičnih operatora $\neg$ i $\wedge$ [18], liste verovatnosnih operatora oblika $P_{\geq s}$ za svaki $s \in S$ i vremenskog operatora $\bigcirc$.

5.2.2 Formule

Skup For$(LPPT)$ formula ovog jezika je najmanji skup koji sadrži iskazna slova i zatvoren je za sledeća pravila:

- Ako je α formula i $s \in S$, onda je $P_{\geq s}\alpha$ formula.
- Ako je α formula, onda je $\bigcirc\alpha$ formula.
- Ako su α i β formule, formule su i $\neg\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$.

Jedna formula je, recimo, $P_{\geq\frac{1}{2}}p_1 \wedge \bigcirc P_{\geq\frac{5}{6}}p_1$. Formule iz skupa For$(LPPT)$ ćemo označavati malim slovima grčkog alfabeta: α, β, γ, ... Za definisanje preostalih klasičnih iskaznih i verovatnosnih operatora koristićemo isti postupak kao i do sada. Sa $\bigcirc^0\alpha$ označavaćemo formulu α, a sa $\bigcirc^{n+1}\alpha$ formulu $\bigcirc\bigcirc^n\alpha$. Ako je $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ skup formula, sa $\bigcirc T$ ćemo označiti $\{\bigcirc\alpha_1, \bigcirc\alpha_2, \ldots\}$.

5.2.3 Klase modela

Kao i do sada, u određivanju značenja formula koristićemo modele u kojima su verovatnoće definisane nad mogućim svetovima, pri čemu su u ovom slučaju svetovi vremenski trenuci. Modeli će predstavljati kombinaciju temoralnih modela [5, 72] i verovatnosnih modela.

Definicija 5.1 *Verovatnosni vremenski model* je struktura $M = \langle W, v, Prob\rangle$, gde su:

- $W = \{w_0, w_1, \ldots\}$ je neprazan prebrojiv skup svetova,
- $v : W \times \phi \mapsto \{\top, \bot\}$ je iskazna valuacija koja svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje $\top$ ili $\bot$ i
- $Prob$ je preslikavanje koje svakom svetu $w_i \in W$ pridružuje jedan konačno-aditivni verovatnosni prostor $\langle W(w_i), H(w_i), \mu(w_i)\rangle$ tako da:
  - $W(w_i) = \{w_j : j > i\}$,
  - $H(w_i)$ je algebra podskupova od $W(w_i)$ i
  - $\mu(w_i)$ je konačno-aditivna verovatnoća definisana na $H(w_i)$ takva da je za svaki neperazan skup $A \in H(w_i)$, $\mu(w_i)(A) > 0$.

Očigledno je da je definicija 5.1 u skladu sa ograničenjima datim na početku odeljka 5.2, tj. da su iz nekog trenutka merljivi samo skupovi budućih trenutaka i da su svi neprazni skupovi pozitivne verovatnoće.

Relaciju zadovoljivosti ćemo uvesti u skladu sa definicijom 2.2.

Definicija 5.2 Neka je M proizvoljan $LPPT$-model i w_i proizvoljan svet tog modela. Formula α je *zadovoljena* u svetu w_i, u oznaci $w_i \models_M \alpha$, ako važi:

- ako je α iskazno slovo, $\alpha \in \phi$, $w_i \models_M \alpha$ ako i samo ako $v(w_i)(\alpha) = \top$,
- ako je α oblika $P_{\geq s}\beta$, $w_i \models_M \alpha$ ako i samo ako $\mu(w_i)(\{w' : w' \in W(w_i), w' \models_M \beta\}) \geq s$,
- ako je α oblika $\bigcirc\beta$, $w_i \models_M \alpha$ ako i samo ako $w_{i+1} \models \beta$,
- ako je α oblika $\neg\beta$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako nije $w \models_M \beta$ i
- ako je α oblika $\beta \wedge \gamma$, $w \models_M \alpha$ ako i samo ako $w \models_M \beta$ i $w \models_M \gamma$.

Indeks koji označava model u oznaci $\models_M$ nećemo pisati, ako to ne unosi zabunu. Prema definicijama 5.1 i 5.2, za trenutak w_i nekog modela je $w_i \models P_{\geq 1}\alpha$ ako i samo ako α važi u svim budućim trenucima w_{i+j} posmatranim iz w_i. Dakle, verovatnosni operator $P_{\geq 1}$ se ponaša kao i vremenski operator G.

Zadovoljivost, važenje, tačnost i valjanost se definišu kao i u odeljku 2. Recimo, formula $\bigcirc\neg p$ je zadovoljiva, ako postoji model M i u njemu bar jedan trenutak koji nije početni u kome ne važi iskazno slovo p.

Sa $LPPT_{\text{Meas}}$ ćemo kao i do sada označavati klasu merljivih modela, odnosno modela u kojima je za svaki trenutak w_i i svaku formulu α skup $\{w_{i+j} : j > 0 \text{ i } w_{i+j} \models \alpha\}$ merljiv. Klasu modela u kojima je za svaki svet w_i algebra $H(w_i) = 2^{W(w_i)}$ ćemo označavati sa $LPPT_{\text{All}}$. U daljem izlaganju bavićemo se samo modelima iz ove dve klase.

5.2.4 Aksiomatizacija

Aksiomatski sistem Ax_{LPP_1} iz odeljka 2.1.4 ćemo proširiti novim aksiomama koje se odnose na vremenski operator $\bigcirc$ i njegov odnos sa verovatnosnim operatorima (aksiome 7, 8, 9 i 10):

1. Sve instance iskaznih tautologija.
2. $P_{\geq 0}\alpha$
3. $P_{\leq r}\alpha \rightarrow P_{<s}\alpha$, $s > r$
4. $P_{<s}\alpha \rightarrow P_{\leq s}\alpha$
5. $(P_{\geq r}\alpha \wedge P_{\geq s}\beta \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow P_{\geq \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$
6. $(P_{\leq r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \rightarrow P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, $r + s \leq 1$
7. $\bigcirc(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc\beta)$
8. $\neg \bigcirc \alpha \leftrightarrow \bigcirc\neg\alpha$
9. $\bigcirc\alpha \rightarrow P_{>0}\alpha$
10. $\bigcirc P_{>0}\alpha \rightarrow P_{>0}\alpha$

a takođe ćemo donekle izmeniti i beskonačno pravilo izvođenja (3):

1. Iz α i $\alpha \to \beta$ izvesti β.

2. Iz α izvesti $P_{\geq 1}\alpha$.

3. Za svaki $m > 0$, iz $\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s-\frac{1}{k}}\alpha$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\alpha$.

Dobijeni aksiomatski sistem ćemo označiti sa Ax_{LPPT}. Aksiome 7 i 8 su uobičajene aksiome u logikama koje uključuju operator $\bigcirc$. Aksioma 7 se odnosi na distibutivnost operatora $\bigcirc$ preko implikacije, dok se aksiomom 8 zapisuje komutativnost operatora $\bigcirc$ i $\neg$. Aksiome 9 i 10 opisuju odnos operator $\bigcirc$ i verovatnosnih operatora. Aksiomom 9 se kaže da, ako je α tačna u sledećem trenutku, onda je njena verovatnoća u tekućem momentu veća od 0. Slično, aksiomom 10 se kaže da, ako je u sledećem trenutku verovatnoća od α pozitivna, to je slučaj i u sadašnjosti. Ove dve aksiome skupa garantuju da će svi merljivi neprazni skupovi imati pozitivnu verovatnoću. Aksiome 9 i 10 su redom ekvivalentne sa:

(9') $P_{\geq 1}\alpha \to \bigcirc\alpha$

(10') $P_{\geq 1}\alpha \to \bigcirc P_{\geq 1}\alpha$

Formula $P_{\geq 1}\alpha \to \bigcirc\alpha \wedge \bigcirc P_{\geq 1}\alpha$ je njihova jednostavna posledica. Ta formula na sintaksnom nivou potvrđuje da se operator $P_{\geq 1}$ u potpunosti ponaša kao temporalni operator G. Slično, temporalni operator F se ponaša kao $P_{>0}$. Uobičajeno pravilo necesitacije, 'iz α izvesti $\bigcirc\alpha$' se dobija iz pravila 2 korišćenjem aksioma 9' i 10'.

Pojmovi teorema, dokaza, sintaksnih posledica skupova formula, dokaza iz skupova formula, konzistentnih i maksimalno konzistentnih skupova su dati definicijama 2.5, 2.6, 2.7 i 2.8. Podsetimo da to znači da se u izvođenju iz skupa formula pravilo 2 primenjuje samo na teoreme.

Sledeće tvrđenje će biti korišteno u preostalim dokazima.

Teorema 5.3 1. Ako je $\vdash \alpha$, onda je $\vdash \bigcirc\alpha$.

2. $\vdash \bigcirc(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

3. $\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \beta) \to (\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta)$

4. Ako je $T \vdash \alpha$, onda je $\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$.

Dokaz. 1. Neka je $\vdash \alpha$. Prema pravilu izvođenja 2 je $\vdash P_{\geq 1}\alpha$, pa pošto je aksioma 9' oblika $P_{\geq 1}\alpha \to \bigcirc\alpha$, neposredno sledi $\vdash \bigcirc\alpha$.
2. Dokaz s leva na desno sledi neposredno, pošto je formula $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$ u stvari aksioma 7. Dokaz s desna na levo je:

$\vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg\beta$

$\vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \to \alpha$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \neg\beta) \to \bigcirc\neg\beta$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg \bigcirc \beta$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \neg\beta) \to \bigcirc\alpha$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \neg\beta) \to (\bigcirc\alpha \wedge \neg \bigcirc \beta)$

$\vdash \neg(\bigcirc\alpha \wedge \neg \bigcirc \beta) \to \neg \bigcirc (\alpha \wedge \neg\beta)$

$\vdash (\neg \bigcirc \alpha \vee \bigcirc\beta) \to \bigcirc\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$

$\vdash (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta) \to \bigcirc(\alpha \to \beta)$

3. Dokaz je:

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \beta) \to \bigcirc\alpha$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \beta) \to \bigcirc\beta$

$\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \beta) \to (\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta)$

4. Dokaz se sprovodi indukcijom po dužini izvođenja. Ako je dužina dokaza $T \vdash \alpha$ jednaka 1, tada je α bilo aksioma, bilo formula iz skupa T. U prvom slučaju je $\vdash \bigcirc\alpha$, a u drugom $\bigcirc\alpha \in \bigcirc T$, tako da tvrđenje sledi trivijalno. Pretpostavimo da je dužina dokaza k. Ponovo, formula α može biti aksioma ili pripadati skupu T. U oba slučaja dokaz se sprovodi kao malopre. Pretpostavimo da je α dobijena iz T primenom pravila 1:

$T \vdash \beta \to \alpha$

$T \vdash \beta$

$T \vdash \alpha$

Tada je, na osnovu indukcijske pretpostavke:

$\bigcirc T \vdash \bigcirc(\beta \to \alpha)$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\beta$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\beta \to \bigcirc\alpha$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$

Pretpostavimo da je $\alpha = P_{\geq 1}\beta$ dobijena iz T primenom pravila 2:

$T \vdash \beta$

$T \vdash P_{\geq 1}\beta$

Tada su β i $P_{\geq 1}\beta$ teoreme, pa važi:

$\vdash \bigcirc P_{\geq 1}\beta$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$

Konačno, pretpostavimo da je $\alpha = \beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\gamma$ dobijena iz T primenom pravila 3:

$T \vdash \beta \to \bigcirc^m P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$

$T \vdash \beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\gamma$

Prema indukcijskoj pretpostavci tada je:

$\bigcirc T \vdash \bigcirc(\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma)$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\beta \to \bigcirc^{m+1} P_{\geq s-\frac{1}{k}}\gamma$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\beta \to \bigcirc^{m+1} P_{\geq s}\gamma$

$\bigcirc T \vdash \bigcirc(\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\gamma)$, prema teoremi 5.3.2

$\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$ ∎

5.2.5 Teorema potpunosti

Analogani teoreme korektnosti 2.9 i teoreme 2.10 (čiji deo je i teorema dadukcije) se dokazuju na isti način kao i u poglavlju 2. Maksimalno konzistentno proširenje konzistentnog skupa se dobija kao i u teoremi 2.11. Jedino se, zbog razlika u zapisu pravila izvođenja, korak 4 zapisuje na sledeći način:

4. Ako je skup T_{i+1} dobijen dodavanjem formule oblika $\neg(\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\gamma)$, tada za neki $n \in \mathbb{N}$ skupu dodajemo i formulu $\beta \to \neg \bigcirc^m P_{\geq s-\frac{1}{n}}\gamma$, tako da T_{i+1} bude konzistentno.

Za maksimalno konzistentne skupove važe iste osobine kao i u teoremi 2.12.

Razlike u odnosu na dokaz potpunosti iz odeljka 2.1.6 se javljaju tek prilikom definisanja kanonskog modela, što je posledica specifičnosti modela iz klase $LPPT_{\mathrm{Meas}}$. Kao i ranije polazni konzistentni skup T se proširuje do maksimalno konzistetnog skupa $\overline{T}$, a zatim se svetovi kanonskog modela definišu induktivno: $w_0 = \overline{T}$, $w_{i+1} = \{\beta : \bigcirc\beta \in w_i\}$. Sledećom teoremom pokazaćemo da je je svaki ovako dobijeni svet maksimalno konzistentan.

Teorema 5.4 Neka je T konzistentan skup. Skupovi $w_0 = \overline{T}$ i $w_{i+1} = \{\beta : \bigcirc\beta \in w_i\}$ za $i \geq 0$ su maksimalno konzistenti.

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po i. Za skup w_0 je već obrazloženo da je maksimalno konzistentan. Neka tvrđenje važi za neko $i \geq 0$. Ako skup w_{i+1} ne bi bio konzistentan, bilo bi $w_{i+1} \vdash \alpha\wedge\neg\alpha$. Prema teoremi 5.3.4 tada je $\bigcirc w_{i+1} \vdash \bigcirc(\alpha\wedge\neg\alpha)$, a prema teoremi 5.3.3, $\bigcirc w_{i+1} \vdash \bigcirc\alpha\wedge\neg\bigcirc\alpha$. Odavde neposredno sledi da bi i skup w_i bio nekonzistentan, što predstavlja kontradikciju. Slično, neka je skup w_{i+1} za $i \geq 0$ prvi u nizu skupova koji nije maksimalan. To znači da za neku formulu α ni α ni $\neg\alpha$ ne pripadaju skupu w_{i+1}. Odatle ni $\bigcirc\alpha$ ni $\bigcirc\neg\alpha$, odnosno $\neg \bigcirc \alpha$ ne pripadaju skupu w_i, pa ni ovaj skup ne bi bio maksimalan, što je kontradikcija. ■

Kanonski model je struktura $M = \langle W, v, Prob\rangle$ gde:

- W je upravo definisani skup $\{w_0, w_1, \ldots\}$,
- v je preslikavanje koje svakom svetu $w_i \in W$ pridružuje valuaciju $v(w_i) : \phi \mapsto \{\top, \bot\}$, tako da za svako iskazno slovo $p \in \phi$, $v(w_i)(p) = \top$ ako i samo ako $p \in w_i$,
- Za svako $w_i \in W$, $Prob(w_i) = \langle W(w_i), H(w_i), \mu(w_i)\rangle$ tako da:
  - $W(w_i) = \{w_{i+j} : j > 0\}$,
  - $H(w_i)$ je klasa skupova oblika $[\alpha]_{w_i} = \{w_j \in W(w_i) : \alpha \in w_j\}$, za svaku formulu α i
  - za svaki skup $[\alpha]_{w_i} \in H(w_i)$, $\mu(w_i)([\alpha]_{w_i}) = \sup\{r : P_{\geq r}\alpha \in w_i\}$.

Da je M jedan $LPPT_{\mathrm{Meas}}$-model pokazuje se na isti način kao i u teoremama 2.13 i 2.14, uz dodatak da aksiome 9 i 10 garantuju da su samo prazni skupovi verovatnoće nula. Naime, ako je za neko α, skup $[\alpha]_{w_i} \neq \emptyset$, to znači da za neko $m > 0$, $\bigcirc^m\alpha \in w_i$. Prema aksiomama, formule $\bigcirc^{m-1}P_{>0}\alpha$, $\bigcirc^{m-2}P_{>0}\alpha$, ..., $P_{>0}\alpha$ pripadaju skupu w_i, pa je $\mu(w_i)([\alpha]_{w_i}) > 0$.

Teorema 5.5 (Jaka potpunost za $LPPT_{\mathrm{Meas}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPPT_{\mathrm{Meas}}$-model.

Dokaz. Jedini novi korak u odnosu na teoremu 2.15 predstavlja dokaz da je za svako $i \geq 0$ i svako β, $w_i \models \bigcirc\beta$ ako i samo ako $\bigcirc\beta \in w_i$. Neka $w_i \models \bigcirc\beta$. To znači da je $w_{i+1} \models \beta$, pa na osnovu indukcijske pretpostavke $\beta \in w_{i+1}$. Zbog načina definisanja skupova w_i, sledi da je $\bigcirc\beta \in w_i$. U suprotnom smeru, pretpostavimo da je $\bigcirc\beta \in w_i$. Ponovo, prema načinu definisanja skupova w_i, odatle sledi da je $\beta \in w_{i+1}$. Zbog indukcijske pretpostavke je $w_{i+1} \models \beta$, pa je je $w_i \models \bigcirc\beta$. ■

Konačno, teorema

Teorema 5.6 (Jaka potpunost za $LPPT_{\mathrm{All}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPPT_{\mathrm{All}}$-model.

se dokazuje kao i teorema 2.16.

5.2.6 Jedno slabljenje pretpostavki o modelima

Na početku odeljka 5.2 smo postavili zahtev da u modelima samo prazni skupovi imaju verovatnoću nula što je imalo za posledicu da se operatori G i $P_{\geq 1}$ mogu poistovetiti. Ova pretpostavka se može i odbaciti pri čemu se gubi spomenuta veza. Za relaciju zadovoljivosti ćemo u odnosu na definiciju 5.2 dodatno zahtevati da ispunjava:

- ako je α oblika $G\beta$, $w_i \models \alpha$ ako i samo ako za svaki $j > 0$, $w_{i+j} \models \beta$.

Aksiomatizacija ovakve jedne logike bi se postigla sledećim izmenama u sistemu Ax_{LPPT}:

- Potrebno je dodati aksiome koje govore o odnosu operatora G i $\bigcirc$ [72]:

  $$G\alpha \to \bigcirc\alpha$$
  $$G\alpha \to \bigcirc G\alpha$$

  umesto aksioma 9 i 10.

- Potrebno je dodati aksiomu koja opisuje odnos operatora G i $P_{\geq 1}$:

  $$G\alpha \to P_{\geq 1}\alpha.$$

- Potrebno je dodati pravila izvođenja:

  Iz $\vdash \alpha$ izvesti $\vdash G\alpha$.

  Iz $\vdash \beta \to \bigcirc^m \alpha$ za svaki prirodan broj $m > 0$ izvesti $\vdash \beta \to G\alpha$.

  koja zamenjuju pravilo 2.

Primetimo da je poslednje pravilo izvođenja beskonačno, poput pravila 3. Razlog za njegovo uvođenje leži u tome što teorema kompaktnosti (odeljak 5.2.7) ne važi za temporalni deo ove logike. Dokaz potpunosti zatim prati prethodno opisane korake.

5.2.7 Kompaktnost

Kao što je u odeljku 2.1.8 pokazano, verovatnosni deo logike $LPPT$ ne zadovoljava teoremu kompaktnosti. Slično važi i za čisto temporalni deo [36]. Da bi se to utvrdilo dovoljno je posmatrati formule $A_n = F(p \wedge F(p \wedge F(\ldots))\ldots)$, gde je n broj pojava iskaznog slova p i analizirati skup $A = \{A_n : n \text{ je prirodan broj}\} \cup \{FG\neg p\}$. Svaki konačan podskup skupa A je zadovoljiv, dok ceo skup to nije. Zato smo prinuđeni da u aksiomatski sistem uključimo beskonačno pravilo kako bismo ostvarili jaku potpunost. Za temporalni deo logike $LPPT$ postoji konačna aksiomatizacija za koju važi samo slaba potpunost [72].

5.3 Logika $LPPT_{\frac{1}{2}}$

U odeljku 5.2 su razmatrani modeli u kojima nije bilo posebnih zahteva za vrstu verovatnoće, izuzev da su neprazni merljivi skupovi vremenskih trenutaka imali pozitivnu verovatnoću. Nekada može biti interesantno razmatrati modele u kojima je verovatnoća fiksirana. U nastavku teksta ćemo upravo to uraditi. Zadržaćemo istu definiciju modela, uz pretpostavku da je u modelima fiksirana sledeća verovatnoća:

- $W(w_i) = \{w_{i+j}, j > 0\}$,

- $H(w_i) = 2^{W(w_i)}$ i
- μ je funkcija koja svakom svetu iz W pridružuje verovatnoću tako da $\mu(w_i)(w_{i+j}) = \frac{1}{2^j}$, za $j > 0$.

Označimo ovu logiku sa $LPPT_{\frac{1}{2}}$. Aksiomatskim sistemom i dokazom teoreme potpunosti ilustrovaćemo postupak koji bi se mogao primeniti za logiku čiji modeli imaju i neku drugu, ali fiksiranu verovatnoću.

Aksiomatski sistem $Ax_{LPPT_{\frac{1}{2}}}$ će sadržati shema aksiome:

1. Sve instance iskaznih tautologija.
2. $P_{\geq 0}\alpha$
3. $P_{\leq r}\alpha \to P_{<s}\alpha$, $s > r$
4. $P_{<s}\alpha \to P_{\leq s}\alpha$
5. $(P_{\geq r}\alpha \wedge P_{\geq s}\beta \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geq \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$
6. $(P_{\leq r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, $r + s \leq 1$
7. $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$
8. $\neg \bigcirc \alpha \leftrightarrow \bigcirc\neg\alpha$
9. $\bigcirc\alpha \to P_{\geq \frac{1}{2}}\alpha$
10. $\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc P_{\geq s}\neg\alpha \to P_{\geq \frac{s}{2}}\neg\alpha$
11. $\bigcirc\neg\alpha \wedge \bigcirc P_{\geq s}\neg\alpha \to P_{\geq \frac{s+1}{2}}\neg\alpha$

i pravila izvođenja:

1. Iz α i $\alpha \to \beta$ izvesti β.
2. Iz α izvesti $P_{\geq 1}\alpha$.
3. Za svaki $m > 0$, iz $\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s-\frac{1}{k}}\alpha$, za svaki prirodni broj $k \geq \frac{1}{s}$, izvesti $\beta \to \bigcirc^m P_{\geq s}\alpha$.

Upoređivanjem se lako ustanovljava da su novim aksiomama 9, 10 i 11 zamenjene aksiome 9 i 10 iz sistema Ax_{LPPT}, dok preostali deo sistema nije menjan.

U dokazima analogana teorema 5.3, 2.11 i 5.4 ponavlja se isti postupak kao i ranije. Do izmena dolazi prilikom definisanja kanonskog modela. Sada će to biti struktura $M = \langle W, v, Prob\rangle$ u kojoj:

- W je kao i pre skup $\{w_0, w_1, \ldots\}$,
- v je preslikavanje koje svakom svetu $w_i \in W$ pridružuje valuaciju $v(w_i) : \phi \mapsto \{\top, \bot\}$, tako da za svako iskazno slovo $p \in \phi$, $v(w_i)(p) = \top$ ako i samo ako $p \in w_i$ i
- Za svako $w_i \in W$, $Prob(w_i) = \langle W(w_i), H(w_i), \mu(w_i)\rangle$ tako da:
  - $W(w_i) = \{w_{i+j} : j > 0\}$,
  - $H(w_i) = 2^{W(w_i)}$ i
  - $\mu(w_i)(\{w_{i+j}\}) = \frac{1}{2^j}$ za $j > 0$, $\mu(w_i)(A) = \sum_{w_{i+j} \in A} \mu(w_i)(\{w_{i+j}\})$ za svaki skup $A \in H(w_i)$.

Sada se lako proverava da je funkcije $\mu(w_i)$ verovatnoća, pa je M zaista $LPPT_{\frac{1}{2}}$-model. I sledeća teorema je posledica načina definisanja kanonskog modela.

Teorema 5.7 Ako je za neku formulu β i neki svet w_i $(i > 0)$ kanonskog modela $\beta \in w_i$, onda je:

1. $\bigcirc^i \beta \in w_0$
2. $\bigcirc^{i-1} P_{\geq \frac{1}{2}} \beta \in w_0$ i
3. $\bigcirc^{i-1} P_{\leq \frac{1}{2}} \neg\beta \in w_0$.

Dokaz. 1. Iz definicije svetova w_i sledi $w_i = \{\beta : \bigcirc\beta \in w_{i-1}\} = \ldots = \{\beta : \bigcirc^i\beta \in w_0\}$.
2. Prema aksiomi 9 je $\bigcirc\beta \to P_{\geq\frac{1}{2}}\beta \in w_0$, pa je na osnovu koraka 1, $\bigcirc^{i-1} P_{\geq\frac{1}{2}}\beta \in w_0$.
2. Tvrđenje sledi neposredno iz činjenice da je $P_{\geq\frac{1}{2}}\beta = P_{\leq\frac{1}{2}}\neg\beta$. ■

Teorema 5.8 (Jaka potpunost za $LPPT_{\frac{1}{2}}$) Svaki konzistentan skup T ima $LPPT_{\frac{1}{2}}$-model.

Dokaz. Jedini novi korak u odnosu na teoremu 5.5 predstavlja dokaz da je za svako $i \geq 0$ i svako β, $w_i \models P_{\geq s}\beta$ ako i samo ako $P_{\geq s}\beta \in w_i$.

Neka je $P_{\geq s}\beta \in w_i$. Pokazaćemo da pretpostavka $w_i \not\models P_{\geq s}\beta$ dovodi do kontradikcije. Iz pretpostavke $w_i \not\models P_{\geq s}\beta$ sledi da je $\mu(w_i)(\{w_{i+j} : w_{i+j} \models \beta\}) < s$. Pošto je μ nenegativno, nije moguće da bude $s = 0$, pa mora biti $s > 0$. Sa $[\beta]_{w_i}$ označimo skup $\{w_{i+j} : \beta \in w_{i+j}\}$, a sa $[\neg\beta]_{w_i}$ skup $\{w_{i+j} : \neg\beta \in w_{i+j}\}$. Prema indukcijskoj pretpostavci $\beta \in w$ ako i samo ako $w \models \beta$. Prema tome imamo da je $\mu(w_i)([\beta]_{w_i}) < s$. Kako je $[\neg\beta]_{w_i} = W(w_i) \setminus [\beta]_{w_i}$, sledi da je $\mu(w_i)([\neg\beta]_{w_i}) > 1 - s < 1$. Skup $[\neg\beta]_{w_i}$ je neprazan jer je njegova mera strogo veća od 0. Iz skupa $[\neg\beta]_{w_i}$ možemo izdvojiti konačan neprazan podskup sa istom osobinom.

Neka je D skup indeksa svetova iz tog konačnog skupa, odnosno $D = \{i+j : \neg\beta \in w_{i+j}\}$ tako da je $\sum_{i+j \in D} \frac{1}{2^j} = s' > 1 - s$. Kako je D konačan, postoji njegov maksimalan element $m = \max\{i+j \in D\}$. Neka su $D_{\neg\beta} = \{i+k : i+k \leq m, k > 0, \neg\beta \in w_{i+k}\}$ i $D_\beta = \{i+k : i+k < m, k > 0, \beta \in w_{i+k}\}$ skupovi indeksa svetova koji se nalaze između w_i i w_m (uključujući i w_m) u kojima se nalazi formula $\neg\beta$, odnosno β. Pošto $\neg\beta \in w_m$, prema teoremi 5.7 imamo da formule $\bigcirc^{m-1} P_{\leq\frac{1}{2}}\beta$ i $\bigcirc^{m-1} P_{\geq\frac{1}{2}}\neg\beta$ pripadaju skupu w_0. Primenom aksioma 9, 10 i 11 polazeći od skupa w_m vraćaćemo se unazad korak po korak i određivati verovatnoće skupova $[\beta]_{w_{i+j}}$ i $[\neg\beta]_{w_{i+j}}$.

Ako je $m = i+1$, onda je $\neg\beta \in w_{i+1}$ i $\bigcirc\neg\beta \in w_i$, a prema aksiomi 9 $P_{\geq\frac{1}{2}}\neg\beta, P_{\leq\frac{1}{2}}\beta \in w_i$. Pošto je $\sum_{i+j \in D_{\neg\beta}} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} > 1 - s$, onda je $s > \frac{1}{2}$. Prema aksiomi 3 je:

$$\vdash P_{\leq\frac{1}{2}}\beta \to P_{<s}\beta.$$

Odatle sledi da je $P_{<s}\beta$, odnosno $\neg P_{\geq s}\beta$ u skupu w_i, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $P_{\geq s}\beta \in w_i$.

Neka je $m > i+1$. Tada je $\bigcirc\neg\beta \in w_{m-1}$ i $P_{\geq\frac{1}{2}}\neg\beta \in w_{m-1}$. Indeks $m-1$ pripada ili skupu D_β ili skupu $D_{\neg\beta}$. Ako je $m-1$ u prvom skupu, odnosno ako $\beta \in w_{m-1}$, onda formule $\bigcirc\beta \in w_{m-2}$ i $\bigcirc P_{\geq\frac{1}{2}}\neg\beta$ pripadaju skupu w_{m-2}, pa prema aksiomi 10 formula $P_{\geq(\frac{1}{2})/2}\neg\beta \in w_{m-2}$. Prema teoremi 5.7, $\bigcirc^{m-2} P_{\geq\frac{1}{4}}\neg\beta \in w_0$. Ako je $m-1 \in D_{\neg\beta}$, odnosno $\neg\beta \in w_{m-1}$, onda formule $\bigcirc\neg\beta \in w_{m-2}$ i $\bigcirc P_{\geq\frac{1}{2}}\neg\beta$ pripadaju skupu w_{m-2}, pa prema aksiomi 11 formula $P_{\geq(\frac{1}{2}+1)/2}\neg\beta \in w_{m-2}$. Prema teoremi 5.7, $\bigcirc^{m-2} P_{\geq\frac{3}{4}}\neg\beta \in w_0$.

Ovakav postupak kretanja unazad se ponavlja $m - i$ puta, nakon čega se zaključuje da je $\bigcirc^i P_{\geq s'}\neg\beta$, odnosno $\bigcirc^i P_{\leq 1-s'}\beta$ u skupu w_0. Kako je $s' > 1 - s$, odnosno $s > 1 - s'$, prema aksiomi 3 sledi da je $\bigcirc^i P_{<s}\beta \in w_0$. Pošto je po pretpostavci i $\bigcirc^i P_{\geq s}\beta \in w_0$, skup w_i ne bi bio konzistentan, što je kontradikcija.

U suprotnom smeru pretpostavimo da je $w_i \models P_{\geq s}\beta$. Ako je $s = 0$, po aksiomi 2 je $P_{\geq 0}\beta \in w_i$. Neka je dalje $s > 0$ i $\mu(w_i)(\{w_{i+j} : w_{i+j} \models \beta\}) \geq s$. Prema indukcijskoj pretpostavci $\beta \in w_{i+j}$ ako i samo ako $w_{i+j} \models \beta$. Ako je $[\beta]_{w_i} = \{w_{i+j} : \beta \in w_{i+j}\}$, onda je $\mu(w_i)([\beta]_{w_i}) \geq s$ i $\mu(w_i)([\beta]_{w_i}) > s - \frac{1}{k}$, za svako $k \geq \frac{1}{s}$. Za svako fiksirano $k \geq \frac{1}{s}$ postoji konačan skup $K(\beta, w_i, k) \subset [\beta]_{w_i}$ sa osobinom $\mu(w_i)(K(\beta, w_i, k)) > s - \frac{1}{k}$. Neka je, kao i malopre, $m = \max\{i + j : w_{i+j} \in K(\beta, w_i, k)\}$. Pošto $w_m \models \beta$, po indukcijskoj pretpostavci je $\beta \in w_m$, pa je $\bigcirc\beta \in w_{m-1}$. Kako je po aksiomi 9 $\bigcirc\beta \rightarrow P_{\geq \frac{1}{2}}\beta \in w_{m-1}$, to je i $P_{\geq \frac{1}{2}}\beta \in w_{m-1}$. Sličnim postupkom kao i malopre, na osnovu aksioma 10 i 11, zaključuje se da je $P_{\geq s'}\beta \in w_i$, gde je $s' > s - \frac{1}{k}$. Dalje je, prema aksiomama 3 i 4, $P_{\geq s - \frac{1}{k}}\beta \in w_i$ i $\bigcirc^i P_{\geq s - \frac{1}{k}}\beta \in w_0$. Prema konstrukciji skupa w_0 sledi da je $\bigcirc^i P_{\geq s}\beta \in w_0$, odnosno $P_{\geq s}\beta \in w_i$. ■

6

Verovatnosna proširenja modalnih logika

Na osnovu izloženog u poglavljima 2 i 3 može se uočiti da su verovatnosne logike u izvesnom smislu slične normalnim modalnim logikama [57]:

- jednu komponentu verovatnosnih modela predstavlja skup mogućih svetova,
- relacija zadovoljivosti je definisana tako da se u slučaju verovatnosnih operatora razmatraju istinitosne vrednosti formula u drugim svetovima, tako da su verovatnosni operatori, poput modalnih operatora, svojevrsni kvantifikatori nad mogućim svetovima,
- formula $P_{\geq 1}\alpha$ važi u nekom svetu verovatnosnog modela ako je mera svetova u kojima važi α jedan, dok formula $\Box\alpha$ važi u nekom svetu modalnog modela ako α važi u svim dostižnim svetovima,
- teorema 2.10.5 o distribuiranju verovatnosnog operatora $P_{\geq 1}$ podseća na aksiomu K kod modalnih logika,
- u dokazu potpunosti se koristi konstrukcija kanonskog modela itd.

U ovom poglavlju ćemo pokušati da sistematski proučimo odnos između verovatnosnih i normalnih modalnih logika. Pokazaćemo da verovatnosni operatori čine gradaciju između ekstrema koje u modalnom okruženju predstavljaju operatori $\Box$ (važiti u svim svetovima) i $\Diamond$ (važiti u bar jednom svetu). Definisaćemo relaciju dostižnosti između svetova u verovatnosnim modelima koja će nam poslužiti kao sredstvo za poređenje logika. U većem delu poglavlja razmatraćemo iskazne verovatnosne logike LPP_1 i $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ (i neke njihove varijante) u kojima su dozvoljene iteracije verovatnosnih operatora i mešanje klasičnih i verovatnosnih formula. Dobijeni rezultati pokazuju da su verovatnosne logike proširenja normalnih modalnih logika. Preciznije, logika LPP_1 predstavlja konzervativno, a $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ nekonzervativno proširenje (izomorfne slike) logike D. Za normalne logike koje sadrže D situacija je komplikovanija zbog osobina veovatnoće. Na kraju poglavlja, jednim primerom ćemo ilustrovati odnos između verovatnosnih i modalnih logika prvog reda.

Odnos između modalnih i verovatnosnih logika je proučavan u više radova od kojih navodimo [19, 42, 48, 77, 108]. U [19, 77, 108] je tradicionalna iskazna valuacija zamenjena verovatnosnim funkcijama. Pokazano je da postoji adekvatna verovatnosna semantika za neke normalne modalne logike. Naš pristup je bliži radovima [42, 48] u kojima su razmatrane logike sa verovatnosnim operatorima, ali se zahteva da su verovatnoće koje se javljaju u modelima diskretne. Ako se razmatraju samo modeli kod kojih je za sve svetove w verovatnoća $\mu(w)$ ista funkcija, pokazano je da je verovatnosna logika (u našoj notaciji) LPP_1 konzervativno proširenje logike $KD45$.

6.1 Normalne modalne logike

U ovom odeljku koristićemo materijal iz [57].

Modalni jezik $\mathcal{L}(\Box)$ se sastoji od prebrojivog skupa iskaznih slova $\phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$, klasičnih operatora $\neg$ i $\wedge$ i modalnog operatora $\Box$. Skup $\mathrm{For}(\Box)$ formula ovog jezika je najmanji skup koji sadrži iskazna slova i zatvoren je za pravila: ako su α i β formule, formule su i $\neg\alpha$, $\Box\alpha$ i $\alpha \wedge \beta$. Uobičajeno je da se definiše $\Diamond\alpha = \neg\Box\neg\alpha$. Modalni model je struktura $\langle W, \rho, v\rangle$, gde je W neprazan skup mogućih svetova, relacija dostižnosti ρ je binarna relacija među svetovima, a valuacija v svakom svetu i svakom iskaznom slovu pridružuje istinitosne vrednosti $\top$ ili $\bot$. Relacija zadovoljivosti $\models$ se definiše između mogućih svetova i formula tako da (w je svet nekog modela):

- ako je α iskazno slovo, $\alpha \in \phi$, $w \models \alpha$ ako i samo ako $v(w)(\alpha) = \top$,
- ako je α oblika $\neg\beta$, $w \models \alpha$ ako i samo ako nije $w \models \beta$,
- ako je α oblika $\Box\beta$, $w \models \alpha$ ako i samo ako za svaki svet u tog modela, ako $w\rho u$, onda $u \models \beta$ i
- ako je α oblika $\beta \wedge \gamma$, $w \models \alpha$ ako i samo ako $w \models \beta$ i $w \models \gamma$.

Formula je valjana u modelu ako je zadovoljena u svim njegovim svetovima. Formula je valjana u klasi modela C, ako je valjana u svakom modelu te klase.

Klase modalnih modela se dobijaju zadavanjem uslova za relaciju dostižnosti ρ. U nastavku ćemo se baviti klasama modela čija su imena i odgovarajući uslovi za relaciju dostižnosti dati u tabeli na slici 6.1. Skupovi C-valjanih formula ($C \in \{D, D4, DB, T, S4, B, S5\}$) se nazivaju normalne modalne logike.

klasa modela	uslovi za ρ
D	serijska
$D4$	serijska i tranzitivna
DB	serijska i simetrična
T	refleksivna
$S4$	refleksivna i tranzitivna
B	refleksivna i simetrična
$S5$	relacija ekvivalencije

Slika 6.1. Klase modela.

Označimo sa K skup formula koji sadrži sve instance:

- iskaznih tautologija i
- formule $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

i koji je zatvorene za sledeća pravila:

- modus ponens (ako su α i $\alpha \to \beta$ u K), onda je β u K i
- necesitaciju (ako je α u K, onda je i $\Box\alpha$ u K).

Razmotrimo zatim sledeće formule:

(D) $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$

(T) $\Box\alpha \to \alpha$

(4) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

(B) $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ i

(5) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$.

Ove formule se nazivaju karakteristične aksiome. Aksiomatizacija normalnih modalnih logika se može ostvariti dodavanjem karakterističnih aksioma na K (slika 6.2). Upoređivanjem tabela datih na slikama 6.1 i 6.2 intuitivno se naslućuje da je karakteristična aksioma (D) u vezi sa serijalnošću, (T) sa refleksivnošću, (4) sa tranzitivnošću i (B) sa simetričnošću relacija dostižnosti u modalnim modelima, dok je karakteristična aksioma (5) u prisustvu aksiome (T) u vezi sa relacijama dostižnosti koje su ekvivalencije. Ovaj utisak se formalno potvrđuje u dokazima potpunosti koji se zasnivaju na konstrukciji kanonskog modela. Tada prisustvo karakterističnih aksioma utiče da relacija dostižnosti u kanonskom modelu ima odgovarajuće osobine.

klasa modela	aksiomatizacija
D	$K + (D)$
D4	$K + (D) + (4)$
DB	$K + (D) + (B)$
T	$K + (T)$
S4	$K + (T) + (4)$
B	$K + (T) + (B)$
S5	$K + (T) + (5)$

Slika 6.2. Aksiomatizacija normalnih modalnih logika.

Sve normalne modalne logike imaju svojstvo da je proizvoljna formula zadovoljiva u nekom modelu ako i samo ako je zadovoljiva u nekom konačnom modelu odgovarajuće klase. Jedna od posledica ove osobine je da je problem zadovoljivosti i valjanosti formula za normalne modalne logike odlučiv.

6.2 Verovatnosne logike, još jednom

Razmatranje ćemo započeti od iskaznih verovatnosna logika LPP_1 i $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$ opisanih u poglavlju 2 u kome su definisane klase merljivih modela, aksiomatski sitemi i dokazane odgovarajuće teoreme potpunosti. Ovde ćemo, ukratko, taj opis dopuniti tako da bude pogodniji za upotrebu u ovom poglavlju.

6.2.1 Logika LPP_1

U odeljku 2.1 je dat beskonačni akiomatski sistem Ax_{LPP_1} i pokazana jaka potpunost za klase modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}$ i $LPP_{1,\sigma}$. Primetimo da se filtriranjem kanonskog modela dobija konačan model u kome su verovatnoće σ-aditivne. Prema tome, za aksiomatski sitem Ax_{LPP_1} se može pokazati slaba potpunost za klasu prebrojivih merljivih modela u kojima su verovatnoće σ-aditivne. Označimo ovu klasu modela sa $LPP_{1,c,\sigma}$.

6.2.2 Logika $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$

U odeljku 2.2 je dat konačni aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ i pokazana potpunost u odnosu na klase modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR(n)}}$, $LPP_{1,\mathrm{All}}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{1,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$. Odgovarajući dokazi potpunosti se oslanjaju na postupak iz teorema 2.15, 2.16 i 2.17 koji je razvijen za potrebe beskonačnog aksiomatskog sistema Ax_{LPP_1}. Međutim, koristeći konačnost sistema $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ moguće je dati i dokaze koji prate dokaze potpunosti normalnih modalnih logika [80], a koji će nam poslužiti u nastavku poglavlja. Prikažimo ukratko taj, nazovimo ga modalni, postupak.

Pre svega, konzistentost se definiše na sledeći način:

- konačni skup formula $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ je nekonzistentan ako je $\vdash \neg(\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$, a u suprotnom je skup konzistentan i

- beskonačan skup formula je konzistentan ako su mu svi konačni podskupovi konzistentni.

Ako je $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ jedno nabrajanje formula, maksimalno konzistentno proširenje konzistentnog skupa formula T se dobija definisanjem niza skupova:

1. $T_0 = T$,

2. ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ konzistentan skup, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$,

3. ako je $T_i \cup \{\alpha_i\}$ nije konzistentan skup, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$ i

4. $\overline{T} = \cup_i T_i$.

U koraku 3 se dobija konzistentan skup formula pošto iz nekonzistentnosti skupova $T_i \cup \{\alpha_i\}$ i $T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$ sledi da u skupu T_i postoje formule $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ i $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tako da je:

$$\vdash \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \wedge \alpha_i)$$

$$\vdash \neg(\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m \wedge \neg\alpha_i)$$

odakle sledi

$$\vdash \neg(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \wedge \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_m)$$

pa ni skup T_i ne bi bio konzistentan, što je kontradikcija. Pošto je izvođenje konačno, ako skup $\overline{T}$ ne bi bio konzistentan, postojao bi skup T_i koji takođe ne bi bio konzistentan. Odatle, skup $\overline{T}$ jeste konzistentan. Dalje se dokaz potpunosti sprovodi na isti način kao i u poglavlju 2.

Slično kao i u odeljku 6.2.1, sa $LPP_{1,c,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$ ćemo označiti klasu prebrojivih modela u kojima su verovatnoće σ-aditivne, a za koje se na isti način pokazuje slaba potpunost.

6.3 Verovatnosne i modalne logike

U odeljku 6.3.1 biće dato nekoliko teorema koje na sintaksnom nivou ilustruju sličnosti između operatora $P_{\geq 1}$ i $\Box$. Zatim ćemo u odeljku 6.3.2 definisati relaciju dostižnosti između svetova verovatnosnih modela koja će biti pandan relacije dostižnosti u modalnim modelima i pokazati da se i u verovatnosnom okruženju ova relacija može u nekim slučajevima dovesti u vezu sa karakterističnim aksiomama. Videćemo i da na semantičkom nivou postoje velike sličnosti između operatora $P_{\geq 1}$ i $\Box$. Intuitivno, dok formula $\Box\alpha$ važi u svetu w_m nekog modalnog modela ako i samo ako α važi u svim svetovima dostižnim iz w_m, dotle $P_{\geq 1}\alpha$ važi u svetu w_v nekog verovatnosnog modela ako i samo ako α važi u skoro svim svetovima iz $W(w_v)$, tj. u skupu svetova dostižnih iz w_v čija je verovatnoća 1. U odeljku 6.3.4 ćemo pokazati da su verovatnosne logike proširenja normalnih modalnih logika. Zatim ćemo u odeljku 6.3.5 razmotriti logike koje se dobijaju kada se verovatnosni jezik proširi modalnim operatorom $\Box$.

6.3.1 Operatori $P_{\geq 1}$ i $\Box$

U sledećem tvrđenju su sumirane neke verovatnosne teoreme koje imaju modalne analogane.

Teorema 6.1 1. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)$

2. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}\beta)$

3. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta) \to (P_{\geq 1}\alpha \wedge P_{\geq 1}\beta)$

4. $\vdash (P_{\geq 1}\alpha \wedge P_{\geq 1}\beta) \to P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta)$

5. $\vdash P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (P_{\geq 1}\alpha \wedge P_{\geq 1}\beta)$

Dokaz. 1. Dokazano u teoremi 2.10.5.
2. Posledica koraka 1 ovog tvrđenja.
3. Dokaz je:

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

$\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$

$\vdash P_{\geq 1}((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$

$\vdash P_{\geq 1}((\alpha \wedge \beta) \to \beta)$

$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta) \to P_{\geq 1}\alpha$

$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta) \to P_{\geq 1}\beta$

$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta) \to (P_{\geq 1}\alpha \wedge P_{\geq 1}\beta)$

4. Dokaz je:

$\vdash \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$

$\vdash P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}(\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

$\vdash P_{\geq 1}\alpha \to (P_{\geq 1}\beta \to P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta))$

$\vdash (P_{\geq 1}\alpha \wedge P_{\geq 1}\beta) \to P_{\geq 1}(\alpha \wedge \beta)$

5. Posledica koraka 3 i 4 ovog tvrđenja. ■

6.3.2 Relacija dostižnosti u verovatnosnim modelima

U verovatnosnom modelu $M = \langle W, v, Prob \rangle$ (bez obzira da li je reč o LPP_1 ili $LPP_1^{\mathrm{FR}(n)}$-modelu) možemo reći da je svaki svet iz $W(w)$ dostižan[1] iz sveta w. U skupu $W(w)$ nemaju svi svetovi isti značaj. Na primer, ako je $\mu(w)(\{u\}) = 0$, svet u ne utiče na verovatnoću skupova iz $H(w)$. Kada bi verovatnoća uvek bila diskretna, mogli bismo relaciju dostižnosti između svetova verovatnosnog modela definisati tako da je svet u dostižan iz sveta w ako je $\mu(w)(\{u\}) > 0$. Upravo to pojednostavljenje je pretpostavljeno u [48]. Međutim, pošto postoje i modeli sa neprekidnim verovatnoćama, mi ćemo uvesti opštiju definiciju:

[1] Ovde bi prikladniji termin bio *vidljiv* koji se ređe koristi u terminologiji teorije modalnih logika.

Definicija 6.2 Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ proizvoljni merljivi $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model ($LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$-model). *Relacija dostižnosti* je relacija $R \subset W^2$ koja zadovoljava da je za sve $w, u \in W$, wRu ako važi:

1. $u \in W(w)$ i

2. za svaki skup $A \in H(w)$, ako $u \in A$, onda $\mu(w)(A) > 0$.

Ovakvo uopštenje dovodi do bitnih razlika u odnosu na rezultate u [48].

Sledeće teoreme formalizuju ono što smo želeli reći kada smo na početku ovog odeljka spomenuli da su neki svetovi značajniji, odnosno manje značajni od drugih svetova. Zapravo, značajnost je sinonim za dostižnost uvedenu definicijom 6.2. U teoremi 6.3 se pokazuje da svetovi koji pripadaju skupovima verovatnoće nula nisu značajni, dok su svi svetovi koje smo nazvali značajnima, prema teoremi 6.4, u skupu verovatnoće jedan.

Teorema 6.3 Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model ($LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$-model) takav da za svetove $w, u \in W$ važi $u \in A \in H(w)$ i $\mu(w)(A) = 0$. Tada za svaki skup $B \in H(w)$ za koji je $u \in B$ i $\mu(w)(B) > 0$ postoji skup $C \in H(w)$ takav da je $C \subset B$, $u \notin C$ i $\mu(w)(B) = \mu(w)(C)$.

Dokaz. Neka je $C = B \setminus A$. Tada je $C \in H(w)$, $C \subset B$, $\mu(w)(B \cap A) = 0$ i $\mu(w)(C) = \mu(w)(B)$. ■

Teorema 6.4 Neka je $M = \langle W, v, Prob \rangle$ jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model ($LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$-model) takav da za svet $w \in W$ i skup $A \in H(w)$ važi $\mu(w)(A) = 1$. Tada se u skupu A nalaze svi dostižni svetovi za svet w.

Dokaz. Pretpostavimo da je wRu tako da $u \notin A$. Tada je $u \in W \setminus A$ i $\mu(w)(W \setminus A) > 0$, što predstavlja kontradikciju. Dakle, za svaki svet u za koji je wRu mora biti $u \in A$. ■

Relacija dostižnosti u verovatnosnim modelima je, prema definiciji 6.2, potpuno određena elementima iz struktura $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modela ($LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$-modela). Mi ćemo je u nastavku koristiti kao sredstvo koje olakšava poređenje logika. Pošto je relacija dostižnosti u verovatnosnim modelima uvedeni pojam, $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-modele ($LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$-modele) ćemo od sada shvatati kao četvorke $\langle W, v, Prob, R \rangle$ gde je R relacija dostižnosti. Sada ćemo, kao i u modalnom slučaju, biti u mogućnosti da postavljanjem različitih zahteva za R (serijalnost, refleksivnost, tranzitivnost, simetričnost) dobijamo posebne klase verovatnosnih modela.

Problem sa relacijom verovatnosne dostižnosti će predstavljati činjenica da u opštem slučaju nismo u stanju da pokažemo da iz $\mu(w)(A) > 0$ sledi da u skupu A postoji svet dostižan iz w. Naime, postoje (čak i σ-aditivne) verovatnoće sa osobinom da za svaki $u \in A$, $\mu(w)(\{u\}) = 0$, ali da je $\mu(w)(A) > 0$.

6.3.2.1 Neke potklase od $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$

Neka $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}X$, gde je $X \in \{D, D4, DB, T, S4, B, S5\}$, označava potklasu od $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}$ u kojoj je relacija dostižnosti redom serijska, serijska i tranzitivna, serijska i simetrična, refleksivna, refleksivna i tranzitivna, refleksivna i simetrična i relacija ekvivalencije.

Proanaliziraćemo povezanost zahteva postavljenih za relaciju dostižnosti i sledećih karakterističnih aksioma.

(D_{Prob}) $P_{\geq 1}\alpha \to P_{>0}\alpha$

(T_{Prob}) $P_{\geq 1}\alpha \to \alpha$

(4_{Prob}) $P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}P_{\geq 1}\alpha$

(B_{Prob}) $\alpha \to P_{\geq 1} P_{>0} \alpha$

(5_{Prob}) $P_{>0}\alpha \to P_{\geq 1} P_{>0} \alpha$

Primetimo da je formula (D_{Prob}) $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}$-valjana. Imajući u vidu iskustvo iz modalnog okruženja, neposredno se nameće ideja da relacija dostižnosti u minimalnoj verovatnosnoj logici treba da bude makar serijska. Međutim, postoje $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}$-modeli koji nisu serijski. Na primer, razmotrimo model $M = \langle W, v, Prob, R\rangle$:

- W je prebrojiv skup $\{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$,
- $H(w_1)$ sadrži konačne podskupove od W i ko-konačne podskupove od W,
- za konačno aditivnu verovatnoću $\mu(w_1)$ važi $\mu(w_1)(A) = 0$ za svaki konačan skup $A \in H(w_1)$, $\mu(w_1)(A) = 1$ za svaki ko-konačan skup $A \in H(w_1)$, i
- za svako $i > 0$, $w_i \models p_j$ ako i samo ako $i = j$.

Za svako $i > 0$, skup $\{u : u \in W(w_1), u \models p_i\}$ je jednočlan, pa svaki w_j $(j > 0)$ pripada skupu svetova iz $H(w_1)$ mere nula. Odatle, w_1 nema ni jedan dostižan svet. Međutim, u teoremi 6.6 ćemo pokazati da je aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ kompletan u odnosu na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}$ modela u kojima je relacija dostižnosti serijska. To znači da, kao i u poglavlju 2, verovatnosne formule ne mogu da izraze razlike između nekih klasa modela.

Aksiomatske sisteme za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$-logike ćemo, po analogiji sa modalnim logikama, formirati kao u tabeli na slici 6.3. Međutim, videćemo da se u verovatnosnom slučaju neće uvek dobijati rezultati koji bi se mogli očekivati.

klasa modela	aksiomatizacija
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}D$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}D4$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (4_{Prob})
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}DB$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (B_{Prob})
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}T$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (T_{Prob})
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}S4$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (T_{Prob}) + (4_{Prob})
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}B$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (T_{Prob}) + (B_{Prob})
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}S5$	$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}$ + (T_{Prob}) + (5_{Prob})

Slika 6.3. Aksiomatizacija $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$-logika.

Neka je $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$ bilo koja od logika navedenih u tabeli na slici 6.3 i $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ odgovarajući aksiomatski sistem.

Teorema 6.5 (Korektnost) Aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ je korektan u odnosu na klasu modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, za $X \in \{D, T\}$.

Dokaz. Zbog teorema korektnosti dokazanih u poglavlju 2, slučaj $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}D$-modela nema potrebe razmatrati pošto je tu reč o običnom $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}$-modelu.

Pretpostavimo da je M jedan $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}T$ model, odnosno da je za svaki $w \in W$, wRw. Za svaku formulu α za koju je $w \models P_{\geq 1}\alpha$, mora biti $w \models \alpha$. Da to nije slučaj, bilo bi $w \models \neg\alpha$, pa bi bilo $w \models P_{>0}\neg\alpha$ i $w \models \neg P_{\geq 1}\alpha$, što je kontradikcija. ∎

Teorema korektnosti se, suprotno očekivanju, ne može pokazati za aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ u odnosu na klasu modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, gde X označava neku od tranzitivnih ili simetričnih klasa modela.

Razmotrimo jedan tranzitivan model $M = \langle W, v, Prob, R\rangle$ u kome postoji svet w sa sledećim osobinama:

- $w \models P_{\geq 1}\alpha$
- postoji skup svetova $A \in H(w)$ takav da:
  - $\mu(w)(A) > 0$,
  - za svaki $u \in A$ je $\mu(w)(\{u\}) = 0$,
  - za svaki $u \in A$ je $u \models \neg P_{\geq 1}\alpha$

Očigledno je da $w \not\models P_{\geq 1}P_{\geq 1}\alpha$, pa i da $w \not\models (4_{\mathrm{Prob}})$. Zbog toga aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ nije korektan u odnosu na klasu modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, gde je $X \in \{D4,\ S4,\ S5\}$. Primetimo da pretpostavke o svetu w ne predstavljaju nikakvo ograničenje. Na primer, neka je $W(w) = \{w_1, w_2, \ldots\}$, neka je $\{w_{2i+1}\} \in H(w)$, $\{w_{2i}\} \notin H(w)$, $\mu(w)(\{w_i\}) = 0$, $A = \{w_{2i+1} : i = 0, 1, \ldots\}$.

Slično se može pokazati i za simetričan model $M = \langle W, v, Prob, R\rangle$ u kome postoji svet w sa sledećim osobinama:

- $w \models \alpha$
- postoji skup svetova $A \in H(w)$ takav da:
  - $\mu(w)(A) > 0$,
  - za svaki $u \in A$ je $\mu(w)(\{u\}) = 0$,
  - za svaki $u \in A$ je $u \models \neg P_{>0}\alpha$

Očigledno je da $w \not\models P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$, pa i da $w \not\models (B_{\mathrm{Prob}})$. Zbog toga aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ nije korektan u odnosu na klasu modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, gde je $X \in \{DB,\ B,\ S5\}$.

Teorema 6.6 (Jaka potpunost za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, $X \in \{D, T\}$) Aksiomatski sitem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ je jako potpun u odnosu na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$-modela, za $X \in \{D,\ T\}$.

Dokaz. U ovom dokazu sa $[\alpha]_w$ ćemo označavati skup $\{u : u \in W(w), u \models \alpha\}$.

Razmotrimo najpre slučaj logike $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}D$. Posmatrajmo proizvoljan svet w kanonskog modela za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}$ i sa w^- označimo skup formula $\{\alpha : P_{\geq 1}\alpha \in w\}$. Pretpostavimo da je w^- nekonzistentan skup, pri čemu se konzistentnost shvata u skladu sa definicijom iz odeljka 6.2.2. Tada bi za neke formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in w^-$ bilo

$$\vdash \neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$$

iz čega bi sledilo

$$\vdash (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \bot$$

$$\vdash P_{\geq 1}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to P_{\geq 1}\bot$$

$$\vdash (P_{\geq 1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge P_{\geq 1}\alpha_n) \to \bot$$

$$\vdash \neg(P_{\geq 1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge P_{\geq 1}\alpha_n)$$

pa bi i skup w bio nekonzistentan, što je kontradikcija. Dakle, skup w^- je konzistentan i može se proširiti do maksimalno konzistentnog skupa. Neka je $u \in W$, $w^- \subset u$ i α formula takva da je $u \in [\alpha]_w$, odnosno zbog potpunosti $\alpha \in u$. Ako je $\mu(w)([\alpha]_w) = 0$, onda je $\mu(w)([\neg\alpha]_w) = 1$, pa je $P_{\geq 1}\neg\alpha \in w$. Kako je $w^- \subset u$, sledilo bi da je $\neg\alpha \in u$, što je kontradikcija. Dakle, za svaki svet w kanonskog modela postoji svet u tako da je wRu, pa je aksiomatski sistem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}$ potpun u odnosu na klasu $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}D$-modela.

Pokažimo sada da prisustvo aksiome (T_{Prob}) garantuje refleksivnost kanonskog modela. Prema definiciji kanonskog modela, za svaki svet w je $w \in W(w)$. Ako postoji formula α takva da je $w \in [\alpha]_w$, odnosno $\alpha \in w$, i $\mu(w)([\alpha]_w) = 0$, onda je $\mu(w)([\neg\alpha]_w) = 1$ i $P_{\geq 1}\neg\alpha \in w$. Prema aksiomi (T_{Prob}) sledi da je $\neg\alpha \in w$, što je kontradikcija. Zato za svaki skup $A \in H(w)$ za koji je $w \in A$ mora biti $\mu(w)(A) > 0$. Dakle, $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}T$ je potpun za klasu $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}T$-modela. ∎

Iako za tranzitivne i/ili simetrične modele nismo u stanju da pokažemo korektnost, jaku potpunost možemo pokazati u odnosu na jednočlane klase modela kojima pripada kanonski model za tu logiku. Podsetimo se da se u svakom svetu kanonskog modela nalaze sve teoreme odgovarajućeg aksiomatskog sistema, pa je sistem korektan u klasi modela koje se sastoji samo od kanonskog modela. Narednom teoremom ćemo dokazati i da relacija dostižnosti u kanonskom modelu ima osobine koje očekujemo.

Teorema 6.7 Neka je $X \in \{D4, DB, S4, B, S5\}$. Aksiomatski sitem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ je jako potpun u odnosu na svoj kanonski model. Pri tome, relacija dostižnosti u kanonskom modelu za $X \in \{D4, S4, S5\}$ je tranzitivna, a za $X \in \{DB, B, S5\}$ je simetrična.

Dokaz. Kanonski model konstruišimo kao i obično. Ako je aksioma (T_{Prob}) deo sistema $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$, onda kao i u teoremi 6.6 sledi da je relacija dostižnosti u kanonskom modelu refleksivna.

Pretpostavimo da (4_{Prob}) pripada sistemu $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$. Neka su w, u, i v svetovi kanonskog modela takvi da je wRu i uRv. Ako wRv ne važi, postoji formula α takva da je $v \in [\alpha]_w$, odnosno $\alpha \in v$, i $\mu(w)([\alpha]_w) = 0$. Sledi da je $\mu(w)([\neg\alpha]_w) = 1$, $P_{\geq 1}\neg\alpha \in w$, $P_{\geq 1}P_{\geq 1}\neg\alpha \in w$, $P_{\geq 1}\neg\alpha \in u$ i $\neg\alpha \in v$ što je kontradikcija. Dakle, relacija R je tranzitivna, pa su kanonski modeli za sisteme $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}D4$ i $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}S4$ u klasi $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}D4$-modela, odnosno $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}S4$-modela.

Da bi pokazali da je relacija R simetrična ako sistem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ sadrži aksiomu (B_{Prob}), pretpostavimo da je za neke svetove kanonskog modela wRu, ali da nije uRw. To znači da postoji formula $\alpha \in w$ takva da je $\mu(u)([\alpha]_u) = 0$. Odatle, $\mu(u)([\neg\alpha]_u) = 1$, pa $P_{\geq 1}\neg\alpha \in u$, $P_{\leq 0}\alpha \in u$ i $\neg P_{>0}\alpha \in u$. Sa druge strane, pošto $\alpha \in w$, prema (B_{Prob}) sledi da je $P_{\geq 1}P_{>0}\alpha \in w$, tj. $\mu(w)([P_{>0}\alpha]_w) = 1$. Prema teoremi 6.4, pošto je wRu, mora biti $u \in [P_{>0}\alpha]_w$, tj. $P_{>0}\alpha \in u$, što je kontradikcija. Dakle, relacija R je refleksivna, pa su kanonski modeli za sisteme $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}DB$ i $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}B$ u klasama $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}DB$-modela, odnosno $LPP^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\mathrm{Meas}}B$-modela.

Ako sistem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ sadrži aksiome (T_{Prob}) i (5_{Prob}), kao i u modalnom slučaju se pokazuje da je formula $P_{>0}P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}\alpha$ teorema:

$\vdash P_{\geq 0}\neg\alpha \to P_{\geq 1}P_{>0}\neg\alpha$, aksioma (5_{Prob})

$\vdash \neg P_{\geq 1}\alpha \to \neg P_{>0}P_{\geq 1}\alpha$,

$\vdash P_{>0}P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}\alpha$

pa su formule (4_{Prob})

$\vdash P_{\geq 1}\neg\alpha \to \neg\alpha$, aksioma (T_{Prob})

$\vdash \alpha \to P_{>0}\alpha$

$\vdash P_{\geq 1}\alpha \rightarrow P_{>0}P_{\geq 1}\alpha$

$\vdash P_{\geq 1}\alpha \rightarrow P_{\geq 1}P_{>0}P_{\geq 1}\alpha$, aksioma (5_{Prob})

$\vdash P_{\geq 1}\alpha \rightarrow P_{\geq 1}P_{\geq 1}\alpha$, zbog teoreme $P_{>0}P_{\geq 1}\alpha \rightarrow P_{\geq 1}\alpha$

i (B_{Prob})

$\vdash P_{\geq 1}\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$, aksioma (T_{Prob})

$\vdash \alpha \rightarrow P_{>0}\alpha$

$\vdash P_{>0}\alpha \rightarrow P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$, aksioma (5_{Prob})

$\vdash \alpha \rightarrow P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$

$Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$-teoreme. Odatle je sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}S5$ potpun za klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}S5$. ■

6.3.2.2 Neke potklase od $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$

Neka $LPP_{1,\mathrm{Meas}}X$ i $Ax_{LPP_1}X$, za $X \in \{D,\ D4,\ DB,\ T,\ S4,\ B,\ S5\}$, označavaju restrikciju klase $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$ modela, odnosno ekstenziju sistema Ax_{LPP_1} u istom smislu kao i u odeljku 6.3.2.1.

Situacija povezana sa nekorektnošću aksiomatskih sistema se javlja kod istih verovatnosnih pandana normalnih modalnih logika kao i u odeljku 6.3.2.1.

Pored toga, ovde postoji još jedan problem u dokazivanju potpunosti u odnosu na klasu modela sa relacijom dostižnosti koja je serijska, a nije refleksivna. Rešenje ponuđemo u teoremi 6.6 ovde nije primenljivo pošto principijelno nismo u stanju da dokažemo da nekonzistentnost skupa formula w sledi iz nekonzistentnosti skupa formula w^-. Razmotrimo beskonačan nekonzistentan skup formula $w^- = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ koji je minimalan u smislu da su mu svi pravi podskupovi nekonzistentni. Takav je, recimo, skup formula T iz odeljka 2.1.8. Neka je model $M = \langle W, v, Prob\rangle$ definisan tako da je:

- W je prebrojiv skup $\{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$
- $H(w_0)$ sadrži sve konačne i ko-konačne podskupove od W i
- za konačno-aditivnu verovatnoću $\mu(w_0)$ važi $\mu(w_0)(A) = 0$ za svaki jednočlani skup $A \in H(w_0)$ i $\mu(w_0)(A) = 1$ za svaki skup $A = W \setminus \{u\}$, $u \in W$ i
- za svako $i > 0$, $w_i \models \alpha_j$ ako i samo ako $i \neq j$.

Očigledno, za svaku formulu $\alpha_i \in w^-$, $[\alpha_i]_{w_0} = W \setminus \{w_i\}$, $\mu(w_0)([\alpha_i]_{w_0}) = 1$, tj. $w_0 \models P_{\geq 1}\alpha_i$, pa je skup $\{P_{\geq 1}\alpha : \alpha \in w^-\}$ zadovoljiv i konzistentan.

Iako se ne možemo koristiti spomenutim postupkom, ipak smo za $X = D$ u stanju da pokažemo potpunost, doduše slabu. Pri tome ćemo koristiti postupak filtracije uveden u odelljku 2.1.9.

Teorema 6.8 (Slaba potpunost za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}D$) Aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}D$ je slabo potpun u odnosu na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}D$ modela.

Dokaz. Neka je α konzistentna formula. Kao i ranije konstruiše se kanonski $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$-model M u kome postoji svet w takav da je $w \models \alpha$. Filtracijom kanonskog modela se dobija konačni model $M^* = \langle W^*, v^*, Prob^*\rangle$ u kome postoji svet u takav da $u \models \alpha$. Za svaki svet $v \in W^*$ važi da je $\mu^*(v)(W^*(v)) = 1$. Pošto je model M^* konačan, a verovatnoća μ^* diskretna, za svaki svet $v \in W^*$ postoji svet u za koji je $\mu^*(v)(\{u\}) > 0$, pa je vRu. Odatle je R serijska. ■

Potpunost u odnosu na klasu refleksivnih modele se pokazuje na isti način kao i u teoremi 6.6.

Teorema 6.9 (Jaka potpunost za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}T$) Aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}T$ je jako potpun u odnosu na klasu $LPP_{1,\mathrm{Meas}}T$ modela.

Kao i u teoremi 6.7, u mogućnosti smo da dokažemo jaku potpunost u odnosu na bar refleksivne klase modela koje sadrže samo odgovarajući kanonski model. Zbog problema sa serijalnošću relacije dostižnosti kod verovatnosnih modela i činjenice da za $X \in \{D4, DB\}$ nismo uspeli da postupak filtracije garantuje dobijanje konačnog modela sa odgovarajućom relacijom dostižnosti, slično tvrđenje nismo uspeli da dokažemo za te logike.

Teorema 6.10 Neka je $X \in \{S4, B, S5\}$. Aksiomatski sitem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ je jako potpun u odnosu na svoj kanonski model. Pri tome, relacija dostižnosti u kanonskom modelu za $X \in \{S4, S5\}$ je tranzitivna, a za $X \in \{B, S5\}$ je simetrična.

Dokaz. Posle konstrukcije kanonskog modela prisustvo karakterističnih aksioma, kao i u dokazu teoreme 6.7 garantuje pripadnost odgovarajućoj klasi modela. ■

6.3.2.3 Neke potklase od $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\sigma}$

Problem sa nekorektnošću aksiomatskih sistema se pojavljuje kao i u odeljku 6.3.2.1. Jedina razlika u obrazlaganju nekorektnosti za tranzitivne i simetrične modele je da se zahteva da skup A bude neprebrojiv, a inače da ima iste osobine kao i pre. Ovo za posledicu ima da se dobijaju i analogni rezultati.

Teorema 6.11 (Jaka potpunost za $Ax^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\sigma}X$, $X \in \{D, T\}$) Neka je $X \in \{D, T\}$. Tada je aksiomatski sistem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ jako potpun u odnosu na klasu $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\sigma}X$-modela.

Dokaz. Dokaz se sprovodi u dva koraka. U prvom se primenjuje postupak konstrukcije σ-aditivnog kanonskog modela za logiku $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\sigma}$, a potom se, kao u teoremi 6.6 pokaže da prisustvo karakterističnih aksioma garantuje odgovarajuće osobine relacije dostižnosti. ■

Teorema 6.12 Neka je $X \in \{D4, DB, S4, B, S5\}$. Aksiomatski sitem $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$ je jako potpun u odnosu na svoj σ-aditivni kanonski model. Pri tome, relacija dostižnosti u kanonskom modelu za $X \in \{D4, S4, S5\}$ je tranzitivna, a za $X \in \{DB, B, S5\}$ je simetrična.

6.3.2.4 Neke potklase od $LPP_{1,\sigma}$

Za razliku od odeljka 6.3.2.2, ovde možemo pokazati da za slučaj logike $LPP_{1,\sigma}$ nekonzistentnost skupa w sledi iz nekonzistentnosti skupa w^-. Iskoristićemo pojam semantičke posledice skupa formula koji je uveden u odeljku 2.1.7.

Teorema 6.13 Neka su $T = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ i $P_{\geq 1}T = \{P_{\geq 1}\beta_1, P_{\geq 1}\beta_2, \dots\}$ skupovi formula i α formula. Ako je $T \models \alpha$ onda je $P_{\geq 1}T \models P_{\geq 1}\alpha$.

Dokaz. Neka je $T \models \alpha$ i neka je w svet nekog $LPP_{1,\sigma}$-modela M takav da je za svaku fomulu $\beta_i \in T$, $w \models P_{\geq 1}\beta_i$, ali nije $w \models P_{\geq 1}\alpha$. Sledi da je $\mu(w)([\alpha]_w) < 1$ i $\mu(w)([\neg\alpha]_w) > 0$. Pošto je $H(w)$ σ-algebra i $\mu(w)$ σ-aditivna verovatnoća, $\mu(w)(T) = \mu(w)(\{\bigcap_{\beta_i \in T}[\beta_i]_w\}) = 1 - \mu(w)(\overline{\{\bigcap_{\beta_i \in T}[\beta_i]_w\}}) = 1 - \mu(w)(\{\bigcup_{\beta_i \in T}[\neg\beta_i]_w\}) = 1 - \sum_{\beta_i \in T}\mu(w)[\neg\beta_i]_w = 1$. Kako je $\mu(w)([T]_w) = 1$ mora postojati svet u modela takav da je $u \in [T]_w \cap [\neg\alpha]_w$, pa ne bi bilo $T \models \alpha$. ■

Sada, ako u kanonskom modelu posmatramo svet w i skup formula w^- i ako je w^- nekonzistentan, imamo da je $w^- \models \alpha \wedge \neg\alpha$. Prema teoremi 6.13, sledi da je $w \models P_{\geq 1}(\alpha \wedge \neg\alpha)$, odakle je i w nekonzistentan. Zato, kao i u teoremi 6.6 svaki svet kanonskog modela ima bar jedan dostižan svet, zbog čega se za klasu $LPP_{1,\sigma}D$-modela može pokazati jaka potpunost. Teoreme potpunosti za ostale klase se dokazuju na isti način sa onima iz odeljka 6.3.2.2.

Teorema 6.14 (Jaka potpunost za $Ax_{1,\sigma}^{\mathrm{FR}(n)}X$, $X \in \{D,\ T\}$) Neka je $X \in \{D,\ T\}$. Tada je aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}X$ jako potpun u odnosu na klasu $LPP_{1,\sigma}X$-modela.

Dokaz. Kao i u dokazu jake potpunosti za $LPP_{1,\sigma}$ u teoremi 2.17 možemo dobiti σ-aditivni kanonski model. Prema teoremi 6.13, relacija dostižnosti u tom modelu je bar serijska, a prisustvo karakteristične aksiome (T_{Prob}) garantuje refleksivnost relacije dostižnosti. ∎

Teorema 6.15 Neka je $X \in \{D4,\ DB,\ S4,\ B,\ S5\}$. Aksiomatski sitem $Ax_{LPP_1}X$ je jako potpun u odnosu na svoj σ-aditivni kanonski model. Pri tome, relacija dostižnosti u kanonskom modelu za $X \in \{D4,\ S4,\ S5\}$ je tranzitivna, a za $X \in \{DB,\ B,\ S5\}$ je simetrična.

6.3.2.5 Neke potklase od $LPP_{1,c,\sigma}$ i $LPP_{1,c,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$

Dokaz sledeće teoreme suštinski zavisi od pretpostavke da su razmatrani modeli prebrojivi i σ-aditivni. Njome se tvrdi da u svakom skupu čija je verovatnoća posmatrana iz nekog sveta w verovatnosnog modela veća od nule postoji bar jedan svet dostižan iz w.

Teorema 6.16 Neka je $M = \langle W, v, Prob, R\rangle$ jedan $LPP_{1,c,\sigma}$-model ($LPP_{1,c,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$-model). Neka je $w \in W$, $A \in H(w)$ i $\mu(w)(A) > 0$. Tada postoji svet $u \in A$ takav da je wRu.

Dokaz. Neka u A ne postoji ni jedan svet $u \in A$ takav da je wRu. Tada za svaki svet $u \in A$ postoji skup $B_u \in H(w)$ koji sadrži u i za koga je $\mu(w)(B_u) = 0$. Pošto je $A \subset \cup B_u$, sledi da je $\mu(w)(A) \leq \mu(w)(\cup B_u) \leq \sum \mu(w)(B_u) = 0$. ∎

Prva posledica ove teoreme je da kontraprimeri iz odeljka 6.3.2.1 povezani sa nekorektnošću više nisu upotrebljivi pošto iz $\mu(w)(\{u\}) = 0$ za svaki $u \in A$ sledi da je $\mu(w)(A) = 0$.

Teorema 6.17 (Korektnost) Aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\mathrm{FR(n)}}X$ je korektan u odnosu na klasu modela $LPP_{1,\mathrm{Meas}}^{\mathrm{FR}(n)}X$, za $X \in \{D,\ D4,\ DB,\ T,\ S4,\ B,\ S5\}$.

Dokaz. Slučajevi za $X \in \{D,\ T\}$ se pokazuju na isti način kao i u teoremi 6.5.

Pretpostavimo da je M jedan tranzitivan model i da je za neki svet w tog modela $w \not\models P_{\geq 1}\alpha \to P_{\geq 1}P_{\geq 1}\alpha$. To znači da $w \models P_{\geq 1}\alpha$ i da $w \not\models P_{\geq 1}P_{\geq 1}\alpha$, odnosno da $\mu(w)([P_{\geq 1}\alpha]_w) < 1$. Odatle postoji svet u dostižan iz w u kome je $u \not\models P_{\geq 1}\alpha$, pa postoji svet v dotižan iz u u kome je $v \not\models \alpha$. Kako je relacija dostižnosti tranzitivna, svet v je dostižan i iz w, pa bi, suprotno pretpostavci, bilo $w \not\models P_{\geq 1}\alpha$. Dakle, za svaki svet w svakog tranzitivnog modela je $w \models (4_{\mathrm{Prob}})$.

Slično, pretpostavimo da je M jedan simetričam model i da je za neki svet w tog modela $w \not\models \alpha \to P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$. To znači da $w \models \alpha$ i da $w \not\models P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$, odnosno da $\mu(w)([P_{>0}\alpha]_w) < 1$. Zato postoji svet u dostižan iz w u kome je $u \not\models P_{>0}\alpha$. Ovo je kontradikcija, pošto je zbog simetričnosti relacije verovatnosne dostižnosti i svet w dostižan iz u, a u w važi formula α. Dakle, za svaki svet w svakog simetričnog modela je $w \models (B_{\mathrm{Prob}})$.

Konačno, neka je u modelu M relacija dostižnosti relacija ekvivalencije. Kao i ranije, u svim svetovima modela važi formula (T_{Prob}). Razmotrimo još formulu (5_{Prob}) i pretpostavimo da za neki svet w tog modela $w \not\models P_{>0}\alpha \to P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$. To znači da $w \models P_{>0}\alpha$ i da $w \not\models P_{\geq 1}P_{>0}\alpha$. Odavde moraju postojati svetovi u i v dostižni iz w takvi da $u \models \alpha$ i $v \not\models P_{>0}\alpha$. Međutim, zbog osobina relacije dostižnosti je i svet u dostižan iz sveta v, pa bi moralo važiti $v \models P_{>0}\alpha$. Dakle, za svaki svet w ovakvog modela mora biti $w \models (5_{\mathrm{Prob}})$. ∎

Još jedna posledica teoreme 6.16 je da se klase $LPP_{1,c,\sigma}$ i $LPP_{1,c,\sigma}D$ ($LPP_{1,c,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}$ i $LPP_{1,c,\sigma}^{\mathrm{FR(n)}}D$) poklapaju. Naime, pošto je za svaki svet w, $\mu(w)(W(w)) = 1$, prema teoremi 6.16, za svaki svet w

postoji dostižan svet. Primetimo da se ovo, prema iznetom u odeljku 6.3.2 razlikuje od situacije za $LPP_{1,\mathrm{Meas}}$, $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}$, $LPP_{1,\sigma}$ i $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\sigma}$ modele.

Prema teoremi 6.3 se iz skupa svetova $A \in H(w)$ mogu odstraniti svi svetovi koji nisu dostižni iz sveta w. Zbog prebrojivosti modela sada možemo dati ekvivalentnu definiciju zadovoljivosti verovatnosnih formula koja je još sličnija onoj iz modalnog okruženja pošto se u njoj razmatraju samo dostižni svetovi:

Definicija 6.18 Neka je $M = \langle W, v, Prob, R\rangle$ jedan $LPP_{1,c,\sigma}$ ($LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,c,\sigma}$) model. Relacija zadovoljivosti ispunjava sve uslove iz definicije 2.2 kao i dodatni zahtev:

- ako je $\alpha = P_{\geq s}\beta$, $w \models \alpha$ ako i samo ako $\mu(w)(\{u : wRu \text{ i } u \models \beta\}) \geq s$.

Za razliku od situacije iz prethodnih odeljaka ovde smo, iako smo pokazali korektnost aksiomatskih sistem za sve sisteme, u mogućnosti da pokažemo samo slabu potpunost za slučajeve kada je $X \in \{D,\ T\}$. Pri tome koristimo postupak filtracije (zbog čega je i data samo slaba potpunost). U preostalim slučajevima nismo uspeli da pokažemo da konačni model dobijen filtracijom ima relaciju dostižnosti sa potrebnim osobinama.

Teorema 6.19 (Slaba potpunost za $Ax_{1,c,\sigma}X$ i $Ax^{\mathrm{FR}(n)}_{1,\sigma}X$, $X \in \{D,\ T\}$) Neka je $X \in \{D,\ T\}$. Tada je aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}X$ ($Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$) slabo potpun u odnosu na klasu $LPP_{1,c,\sigma}X$ ($LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,c,\sigma}X$) modela.

Dokaz. Ponovo polazimo od konzistentne formule α i konstruišemo kanonski $LPP_{1,c,\sigma}$ ($LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,c,\sigma}$) model. Filtracijom ovog modela dobija se konačni model u kome je formula α zadovoljiva. Pošto je model konačan, on je prebrojiv i sve verovatnoće su σ-aditivne. Taj konačni model pripada klasi $LPP_{1,c,\sigma}$ ($LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,c,\sigma}$) modela. Zbog teoreme 6.16, trivijalno je da je relacija dostižnosti u dobijenom modelu bar serijska. Slično, ako u polaznom refleksivnom modelu važi wRw za svaki svet w, takođe je i wR^*w u modelu dobijenom filtracijom, pa je i on refleksivan. ■

6.3.3 Pregled ostvarenih rezultata

Zbog većeg broja logika koje se spominju u prethodnim poglavljima ovde ćemo u tabelama na slikama 6.4 i 6.5 prikazati pregled rezultata o korektnosti i potpunosti. U logikama u kojima je pokazana slaba potpunost u završnom koraku dokaza se koristi postupak filtracije. Jaka potpunost je u tabeli prikazana ako je dokazana i odgovarajuća teorema korektnosti. Sem u slučaju prebrojivih modela, jaka potpunost je pokazana u odnosu na kanonski model za koji se pokazuje da ima odgovarajuće osobine relacije dostižnosti.

6.3.4 Utapanje normalnih modalnih logika u verovatnosne logike

U ovom odeljku ćemo razmatrati verovatnosne logike za koje je pokazana korektnost i potpunost odgovarajućih aksiomatskih sistema.

Definišimo jedno prevođenje modalnih formula. Neka je α formula modalnog jezika $\mathcal{L}(\Box)$. U prevodu $\alpha^{\#}$ formule α sve pojave modalnog operatora $\Box$ se zamenjuju sa $P_{\geq 1}$.

Neka je $X \in \{D,\ T\}$ normalna modalna logika. Zbog teoreme 6.1.3 odmah se vidi da su sve aksiome sistema X teoreme aksiomatskih sistema $Ax_{LPP_1}X$ i $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$. Kako su prevodi pravila izvođenja iz sistema X pravila izvođenja u verovatnosnim sistemima, neposredno sledi sledeća teorema.

Teorema 6.20 Neka je $X \in \{D,\ T\}$. Za svaku modalnu X-teoremu α, prevod $\alpha^{\#}$ je teorema sistema $Ax_{LPP_1}X$ i $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LPP_1}X$.

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}D$	+	jaka
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}D4$	-	
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}DB$	-	
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}T$	+	jaka
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}S4$	-	
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}B$	-	
$LPP_{1,\text{Meas}}^{\text{FR(n)}}S5$	-	

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}D$	+	jaka
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}D4$	-	
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}DB$	-	
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}T$	+	jaka
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}S4$	-	
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}B$	-	
$LPP_{1,\sigma}^{\text{FR(n)}}S5$	-	

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}D$	+	slaba
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}D4$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}DB$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}T$	+	slaba
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}S4$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}B$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}^{\text{FR(n)}}S5$	+	

Slika 6.4. Pregled rezultata za aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\text{FR(n)}}X$.

Međutim, obrat teoreme 6.20 ne važi za aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}^{\text{FR(n)}}X$. Razmotrimo modalnu formulu

$$\alpha = (\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Box(\neg p_1 \vee \neg p_2)) \rightarrow \Box(p_1 \vee p_2),$$

gde su $p_1, p_2 \in \phi$ iskazna slova. Njen prevod je formula

$$\alpha^{\#} = (P_{>0}p_1 \wedge P_{>0}p_2 \wedge P_{\geq 1}(\neg p_1 \vee \neg p_2)) \rightarrow P_{\geq 1}(p_1 \vee p_2).$$

Neka je skup Range $= \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ovde je $0^+ = \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}^+ = 1$. Formula α ne važi u svetu w_1 modalnog modela $M = \langle W, \rho, v \rangle$, gde je:

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$,
- $\rho = W^2$,
- $w_1 \models \neg p_1$, $w_1 \models \neg p_2$,
- $w_2 \models \neg p_1$, $w_2 \models p_2$ i
- $w_3 \models p_1$, $w_3 \models \neg p_2$,

tako da α nije čak ni $S5$-teorema, dok je $\alpha^{\#}$ instanca aksiome 5 aksiomatskog sistema $Ax_{LPP_1}^{\text{FR(2)}}D$. Slično je za skup Range $= \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ formula

$$\alpha^{\#} = (P_{\geq 0^+}p_1 \wedge \ldots \wedge P_{\geq 0^+}p_n \wedge P_{\geq 1}(\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_n)) \rightarrow P_{\geq 1}(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$$

teorema sistema $Ax_{LPP_1}^{\text{FR(n)}}D$, dok formula α nije $S5$-teorema.

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}D$	+	slaba
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}D4$	-	
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}DB$	-	
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}T$	+	jaka
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}S4$	-	
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}B$	-	
$LPP_{1,\mathrm{Meas}}S5$	-	

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,\sigma}D$	+	jaka
$LPP_{1,\sigma}D4$	-	
$LPP_{1,\sigma}DB$	-	
$LPP_{1,\sigma}T$	+	jaka
$LPP_{1,\sigma}S4$	-	
$LPP_{1,\sigma}B$	-	
$LPP_{1,\sigma}S5$	-	

klasa modela	korektnost	potpunost
$LPP_{1,c,\sigma}D$	+	slaba
$LPP_{1,c,\sigma}D4$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}DB$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}T$	+	slaba
$LPP_{1,c,\sigma}S4$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}B$	+	
$LPP_{1,c,\sigma}S5$	+	

Slika 6.5. Pregled rezultata za aksiomatski sistem $Ax_{LPP_1}X$.

Sa druge strane, sledećim tvrđenjem se kaže da je svaka teorema sistema $Ax_{LPP_1}X$ i X teorema. Naime, zbog potpunosti pokazane u odeljku 6.3.2.4, formula je zadovoljiva ako i samo ako njena negacija nije teorema. Odatle, za svaku formulu α, tvrđenje ako je formula $\alpha^{\#}$ $Ax_{LPP_1}X$-teorema, onda je α X-teorema je ekvivalento sa tvrđenjem ako je α X-zadovoljiva formula, onda je formula $\alpha^{\#}$ $LPP_{1,\sigma}X$-zadovoljiva.

Teorema 6.21 Neka je $X \in \{D,\ T\}$. Ako je formula α X-zadovoljiva, onda je formula $\alpha^{\#}$ $LPP_{1,\sigma}X$-zadovoljiva.

Dokaz. Neka je formula α X-zadovoljiva. Normalne modalne logike imaju osobinu da u tom slučaju postoji i konačan X-model u kome je α zadovoljiva. Neka je to model $M = \langle W, \rho, v\rangle$ i neka je svet $w' \in W$ takav da $w' \models \alpha$. Razmotrimo konačnu strukturu $M^{\#} = \langle W^{\#}, v^{\#}, Prob, R\rangle$, gde je:

- $W^{\#} = W$,
- $v^{\#} = v$,
- $W(w) = \{u : w\rho u\}$,
- $H(w) = 2^{W(w)}$,
- $\mu(w)(\{u\}) = \frac{1}{2^{|W(w)|}}$ i
- za svaki skup $D \in H(w)$, $\mu(w)(D) = \sum_{u \in D} \mu(w)(u)$.

Pošto svaki svet u skupovima $W(w)$ ima pozitivnu verovatnoću, sledi da je $R = \rho$, a da je $M^{\#}$ jedan $LPP_{1,\sigma}X$-model. Indukcijom po složenosti formula pokazuje se da sve potformule formule α važe u nekom svetu w modela M ako i samo ako njihovi prevodi važe u svetu w verovatnosnog modela $M^{\#}$. Za iskazna slova ovo važi prema definiciji valuacija v i $v^{\#}$. Neka je β potformula formule α i neka je oblika $\neg\gamma$. Tada $w \models_M \beta$ ako i samo ako $w \not\models \gamma$ ako i samo ako po indukcijskoj pretpostavci $w \not\models_{M^{\#}} \gamma^{\#}$ ako i samo ako $w \models_{M^{\#}} \beta^{\#}$. Slično se dokazuje i slučaj $\beta = \gamma \wedge \delta$. Konačno, neka je

$\beta = \Box\gamma$. Tada $w \models_M \Box\gamma$ ako i samo ako za svaki u takav da je $w\rho u$, $u \models_M \gamma$ ako i samo ako po indukcijskoj pretpostavci za svaki svet u takav da wRu, $w \models_{M^\#} \gamma^\#$ ako i samo ako $w \models_{M^\#} P_{\geq 1}\gamma^\#$. Odavde neposredno sledi da je formula $\alpha^\#$ $LPP_{1,\sigma}X$-zadovoljiva. ■

Očigledno je da se teorema 6.21 može na isti način formulisati i dokazati i za ostale $LPP_{1,\sigma}X$ i $LPP_{1,c,\sigma}X$ logike.

6.3.5 Verovatnosne logike sa modalnim operatorima

U odeljku 6.3.4 je pokazano da logike $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}X$ nisu konzervativna proširenja modalnih logika X ($X \in \{D,\ T\}$), dok logike u kojima su verovatnoće realno vrednosne to jesu. Zato se operatori $\Box$ i $P_{\geq 1}$ ponašaju slično, ali ne i potpuno isto u slučaju logika $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}X$, pa može biti zanimljivo razmotriti verovatnosne logike u kojima se pojavljuju i modalni operatori. Označimo takve logike sa $LPPM^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}XY$, gde $X \in \{D,\ T\}$ označava vrstu verovatnosnog, a Y modalnog modela.

Na semantičkom nivou u definiciju verovatnosnih modela ćemo dodati još jednu relaciju dostižnosti koja će odgovarati operatoru $\Box$. Označimo tu relaciju sa ρ, dok ćemo za relaciju verovatnosne dostižnosti zadržati oznaku R. Dalje ćemo definisati relaciju zadovoljivosti tako da se operator $\Box$ ponaša na uobičajeni način.

Definicija 6.22 Neka je $\langle W, v, Prob, R\rangle$ verovatnosni $LPP^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}X$-model i neka je $\rho \subset W^2$ takva da je $w\rho u$ ako $u \in W(w)$. Tada je $\langle W, v, Prob, R, \rho\rangle$ jedan $LPPM^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}X$-model.

Definicija 6.23 Neka je $M = \langle W, v, Prob, R, \rho\rangle$ jedan $LPPM^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}X$-model. Relacija zadovoljivosti ispunjava sve uslove iz definicije 2.2 kao i dodatni zahtev:

- ako je $\alpha = \Box\beta$, $w \models \alpha$ ako i samo ako za svaki svet u za koji je $w\rho u$ važi $u \models \beta$.

Prema definiciji 6.22 je $R \subset \rho$, pa je $\Box\alpha \to P_{\geq 1}\alpha$ valjana formula. Zapravo ovde se javlja jedna hijerarhija operatora poređanih po snazi:

$$\Box\alpha \to P_{\geq 1}\alpha \to \ldots \to P_{\geq s}\alpha \to \ldots \to P_{\geq 0^+}\alpha \to \Diamond\alpha \to P_{\geq 0}\alpha$$

U definiciji 6.22 jedini semantički zahtev vezan za odnos relacija dostižnosti je da je $R \subset \rho$. Zato ove relacije ne moraju da imaju iste osobine. Jedini, očigledni, izuzeci su da:

- ρ mora biti barem serijska (jer je X bar D) i
- ako je R refleksivna, to mora biti i ρ.

Aksiomatizacija $LPPM^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}XY$ logika se postiže kombinovanjem odgovarajućih verovatnosnih (X) i modalnih (Y) sistema, gde je $X \in \{D,\ T\}$, a $Y \in \{D,\ D4,\ DB,\ T,\ S4,\ B,\ S5\}$, uz dodavanje aksiome

$$\Box\alpha \to P_{\geq 1}\alpha$$

Verovatnosna necesitacija se izvodi na osnovu pravila modalne necesitacije i ove aksiome. Primetimo da, ako sistem sadrži aksiomu (T_{Prob}), onda je odgovarajuća modalna aksioma (T) teorema:

$$\vdash \Box\alpha \to P_{\geq 1}\alpha$$

$$\vdash P_{\geq 1}\alpha \to \alpha$$

$$\vdash \Box\alpha \to \alpha$$

Dokaz jake potpunosti za logike $LPPM^{\mathrm{FR(n)}}_{1,\mathrm{Meas}}XY$ možemo dati kombinovanjem standardnog modalnog postupka i postupka iz odeljka 6.2.2. Odlučivost se može pokazati postupkom filtracije.

6.4 Verovatnosne i modalne logike prvog reda

U ovom odeljku ćemo na primeru, u modalnom okruženju, dobro poznate Barcan-formule

BF $(\forall x)\Box\alpha(x) \rightarrow \Box(\forall x)\alpha(x)$

razmotriti sličnosti i razlike verovatnosnih i modalnih formula prvog reda. Nadovezaćemo se na izlaganje iz poglavlja 3.

U [56] je pokazano da **BF** važi u klasi svih modalnih modela sa fiksnim domenima i da je nezavisna od ostalih modalnih i klasičnih aksioma. Ponašanje verovatnosnog pandana ove formule:

BF(s) $(\forall x)P_{\geq s}\alpha(x) \rightarrow P_{\geq s}(\forall x)\alpha(x)$

je, međutim, različito.

Ako je $s = 0$, **BF(0)** je valjama, jer je formula $P_{\geq 0}(\forall x)\alpha(x)$ instanca aksiome 4.

Razmotrimo sada klasu verovatnosnih modela sa fiksiranim domenom (rigidnost i merljivost sada nisu esencijalni). Neka je $0 < s < 1$ i neka je model M_1 sledećeg oblika:

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $D = \{d_1, d_2\}$,
- $w_2 \models_{M_1} P_1^1(d_1)$, $w_2 \not\models_{M_1} P_1^1(d_2)$, $w_3 \models_{M_1} P_1^1(d_1)$, $w_3 \models_{M_1} P_1^1(d_2)$, $w_4 \not\models_{M_1} P_1^1(d_1)$, $w_4 \models_{M_1} P_1^1(d_2)$,
- $\mu(w_1)(w_2) = \frac{1}{n}$, $\mu(w_1)(w_3) = s - \frac{1}{n}$, $\mu(w_1)(w_4) = \frac{1}{n}$.

Lako je videti da je $w_1 \models_{M_1} (\forall x)P_{\geq s}P_1^1(x)$, jer je $\mu(w_1)(\{w : w \models_{M_1} P_1^1(d_1)\}) = \mu(w_1)(\{w_2, w_3\}) = s$ i $\mu(w_1)(\{w : w \models_{M_1} P_1^1(d_2)\}) = \mu(w_1)(\{w_3, w_4\}) = s$. Sa druge strane, $w_1 \not\models_{M_1} (\forall x)P_1^1(x)$, $w_2 \not\models_{M_1} (\forall x)P_1^1(x)$ i $w_4 \not\models_{M_1} (\forall x)P_1^1(x)$, dok $w_3 \models_{M_1} (\forall x)P_1^1(x)$. Pošto je $\mu(w_1)(\{w_3\}) = s - \frac{1}{n}$, sledi da $w_1 \not\models_{M_1} P_{\geq s}(\forall x)P_1^1(x)$. Ako razmatramo slučaj $LFOP_1^{\mathrm{FR(n)}}$-modela, pri čemu je $s \in Range$, tada M_1 potpada pod prethodno diskutovani slučaj. Ako $s \notin Range$, onda je **BF(s)** ekvivalentno sa **BF(s^+)**, pa je ponovo isti rezultat razmatranja. Dakle, za proizvoljno $s \in (0, 1)$, **BF(s)** nije valjana ni u kojoj od ranije opisanih potklasa $LFOP_1^{\mathrm{FR(n)}}$-modela. Pošto su $LFOP_1^{\mathrm{FR(n)}}$-modeli istovremeno i $LFOP_1$-modeli, isto važi i za potklase klase $LFOP_1$-modela.

Pretpostavimo da je $s = 1$ i razmotrimo formulu **BF(1)**. Neka M_2 bude sledeći model sa fiksiranim domenom:

- W je porebrojiv skup $\{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$
- D je prebrojiv skup $\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$,
- za svaki $i \geq 0$, $w_i \models_{M_2} P_1^1(d_j)$ ako i samo ako $i \neq j$,
- algebra $H(w_0)$ sadrži sve konačne podskupove od W i sve ko-konačne podskupove od W,
- $\mu(w_0)$ je konačno aditivna verovatnoća za koju je $\mu(w_0)(A) = 0$ za svaki konačan skup $A \in H(w_0)$, $\mu(w_0)(A) = 1$ za svaki ko-konačan skup $A \in H(w_0)$.

Očigledno, za svaki $w_i \in W$, $w_i \not\models_{M_2} (\forall x)P_1^1(x)$ i $\mu(w_0)(\{w : w \models_{M_2} (\forall x)P_1^1(x)\}) = 0$. Sa druge strane, za svaki $d \in D$ je skup $\{w : w \models_{M_2} P_1^1(d)\}$ ko-konačan, pa je $\mu(w_0)(\{w : w \models_{M_2} P_1^1(d)\}) = 1$. Sledi da je $w_0 \models_{M_2} (\forall x)P_{\geq 1}P_1^1(x)$ i $w_0 \not\models_{M_2} P_{\geq 1}(\forall x)P_1^1(x)$. Odatle, formula **BF(1)** ne važi u w_0, pa nije ni valjana u odnosu na bilo koju od razmatranih klasa konačno aditivnih modela. Lako je videti da se slična konstrukcija može napraviti i za σ-aditivne modele (pri čemu bi skupovi W i D bili neprebrojivi), tako da formula **BF(1)** nije valjana čak ni u σ-aditivnim modelima.

Sa druge strane, formule

CBF(s) $P_{\geq s}(\forall x)\alpha(x) \rightarrow (\forall x)P_{\geq s}\alpha(x)$

koje odgovaraju obratu modalne Barcan-formule

CBF $\Box(\forall x)\alpha(x) \rightarrow (\forall x)\Box\alpha(x)$

jesu teoreme aksiomatskih sistema Ax_{LFOP_1} i $Ax^{\mathrm{FR(n)}}_{LFOP_1}$, kao što je to **CBF** u modalnom slučaju [56]:

$\vdash (\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(x)$, aksioma 3

$\vdash P_{\geq 1}((\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(x))$, primenom pravila 3,

$\vdash P_{\geq s}(\forall x)\alpha(x) \rightarrow P_{\geq s}\alpha(x)$, primenom teoreme 2.10.5

$\vdash P_{\geq s}(\forall x)\alpha(x) \rightarrow (\forall x)P_{\geq s}\alpha(x)$, primenom pravila izvođenja 2.

7

Dokazivač teorema u logici LPP_2

Procedura odlučivanja za iskaznu verovatnosnu logiku LPP_2 koja je opisana u odeljku 2.3.5 je pogodna za izvršavanje na računaru. Njenu programsku realizaciju - automatski dokazivač teorema Verlog 1.0 ćemo opisati u odeljku 7.1. U odeljku 7.2 ćemo ilustrovati izražajnost verovatnosnih logika. Prikazaćemo nekoliko načina definisanja binarnog operatora preferiranja [21, 70, 119] u verovatnosnoj logici. Primenom programa Verlog 2.0, unapređenja prve verzije dokazivača, ispitaćemo valjanost više formula u kojima se pojavljuje operator preferiranja.

Autori programa Verlog 1.0 su: dr Miodrag Rašković, Zoran Ognjanović, Vladimir Petrović i Uroš Majstorović. Autori programa Verlog 2.0 su: Zoran Ognjanović, dr Miodrag Rašković i Vladimir Petrović.

7.1 Program Verlog 1.0

Program Verlog 1.0 je automatski dokazivač teorema u verovatnosnoj logici LPP_2. Zasnovan je na proceduri odlučivanja za ovu logiku opisanoj u odeljku 2.3.5. Jedan programski zapis visokog nivoa te procedure je dat na slici 7.1.

procedure zadovoljivost(A);
begin
    DNF(A) := disjunktivna_normalna_forma(A);
    RESENJE(A) := $\emptyset$;
    for svaki disjunkt D $\in$ DNF(A) **do**
    begin
        SISTEM(D) := generisi_sistem(D);
        RESENJE(A) := RESENJE(A) $\cup$ resenje_sistema(SISTEM(D));
    end;
    if RESENJE(A) $\neq \emptyset$
    then write(Formula A je zadovoljiva. Resenja su: RESENJE(A).);
    else write(Formula A nije zadovoljiva.);
end.

Slika 7.1. Procedura odlučivanja za LPP_2.

Program Verlog 1.0 je realizovan korišćenjem ANSI standarda programskog jezika C, kao i alata za generisanje prevodilaca yacc i lex. Ukupna veličina izvornih datoteka je 90KB. Program je preveden i testiran upotrebom sledećih prevodilaca: GNU C 2.7 za Linux i Microsoft Visual C++ 5 za Win 95/NT. Programski zapis visokog nivoa za Verlog 1.0 je dat na slici 7.2.

```
program Verlog_1;
begin
    read(konfiguraciona datoteka);
    read(Formula);
    pretprocesiranje(Formula);
    Drvo(Formula) := generisanje_drveta_formule(Formula);
    zadovoljivost(Drvo(Formula));
end.
```

Slika 7.2. Program Verlog 1.0.

U konfiguracionoj datoteci su definisani parametri sa kojima će raditi dokazivač: ime datoteke u kojoj se nalazi formula, ime datoteke u kojoj se nalaze numeričke vrednosti simboličkih konstanti koje se javljaju u formuli, informacija o tome da li se ispisuje detaljan izveštaj o radu ili ne i ime datoteke u koju se ispisuje rezultat. Sintaksnim pravilima za pisanje formule je dozvoljeno zapisivanje izraza čiji je smisao 'verovatnoća formule A je veća do jednaka od s', gde vrednost s-a nije precizirana. Tokom pretprocesiranja formule takve simboličke konstante se zamenjuju konkretnim numeričkim vrednostima. Na ovaj način se jednostavnom zamenom numeričkih vrednosti dobijaju formule istog oblika, ali drugačijeg smisla. Postupak generisanja drveta formule prevodi formulu datu kao niz ASCII-znaka u binarno drvo u čijim čvorovima se nalaze kodovi odgovarajućih simbola. Dalja obrada se vrši na drvetu formule.

Postupak rešavanja sistema linearnih jednačina i nejednačina se izvodi metodom Furier-Motzkin. Ključni korak u ovoj metodi je eliminisanje promenljivih koje ilustrujemo na sledećem primeru. Neka je dat sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & 0,5 \\ -x_1 & + & 4x_2 & & & \geq & 0,1 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1,2 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 0,2 \end{array}$$

Prebacivanjem na desnu stranu svih promenljivih sem x_1 dobija se

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & \geq & 0,5 & - & 2x_2 & + & 3x_3 \\ x_1 & \leq & -0,1 & + & 4x_2 & & \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1,2 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 0,2 \end{array}$$

Kombinovanjem prve dve nejednačine dobija se sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 0,5 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & -0,1 & + & 4x_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 1,2 & & \\ & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 0,2 & & \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{rcrcl} -2x_2 & + & 3x_3 & \leq & -0,6 \\ x_2 & + & x_3 & \leq & 1,2 \\ 2x_2 & - & x_3 & \geq & 0,2 \end{array}$$

u kome se više ne pojavljuje promenljiva x_1.

Zanimljivu osobinu programa predstavlja mogućnost zadavanja nepoznate verovatnoće koja se označava sa x. Smisao ovog proširenja osnovne metode je da se izračuna nepoznata verovatnoća x za koju je formula zadovoljiva.

U sledećem primeru ilustrujemo rad programa Verlog 1.0 za učitanu formulu

$$(P_{\geq 0.5}(p \to q) \wedge P_{\geq x}(p \wedge \neg q)) \vee (\neg P_{\geq 0.8}(p) \wedge P_{\geq x}p).$$

Nakon izvršenja programa dobija se izveštaj sledećeg oblika:

```
Ulazna formula:
  (v%0 (p then q) and vx (p and not q)) or (not v%1 (p) and vx (p) ).
Komandni string:
  %0={0,5} %2=0,3 %1=0,8

Obradjuje se formula:
(v{0,5} (p then q) and vx (p and not q)) or (not v0,8 (p) and vx (p) ).
V{0.000*x + 0.500} ((R0() THEN R1())) AND V{1.000*x + 0.000} (R0() AND
NOT [R1()]) OR NOT [V{0.000*x + 0.800} (R0())] AND V{1.000*x + 0.000} (R0())

U prevodjenju izvrseno sledece kodiranje.

Relacija q se kodira sa R1.
Relacija p se kodira sa R0.

1. dobijeni disjunkt:
V{0.000*x + 0.500} ((R0() THEN R1())) AND V{1.000*x + 0.000} (R0() AND NOT [R1()])

a 0 odgovara disjunktu:  !R0() !R1()
a 1 odgovara disjunktu:  !R0()  R1()
a 2 odgovara disjunktu:   R0()  R1()
a 3 odgovara disjunktu:   R0() !R1()

V{0.5000 + 0.0000*x} (a 0 + a 1 + a 2) AND V{0.0000 + 1.0000*x} (a 3)


Generisani linearni sistem:

Jednacine koje odgovaraju konjuktima u dobijenom disjunktu:
  a 0    a 1    a 2    a 3             C          X
 1.000  1.000  1.000  0.000   >=   +    0.500  (  0.000 )
 0.000  0.000  0.000  1.000   >=   +    0.000  (  1.000 )
Jednacine koje odgovaraju promenljivima:
  a 0    a 1    a 2    a 3             C          X
 1.000  0.000  0.000  0.000   >=   +    0.000  (  0.000 )
 0.000  1.000  0.000  0.000   >=   +    0.000  (  0.000 )
 0.000  0.000  1.000  0.000   >=   +    0.000  (  0.000 )
 0.000  0.000  0.000  1.000   >=   +    0.000  (  0.000 )
 1.000  1.000  1.000  1.000   =    +    1.000  (  0.000 )
Jednacine koje odgovaraju nepoznatoj verovatnoci:
  a 0    a 1    a 2    a 3             C          X
 0.000  0.000  0.000  0.000   >=   +    0.000  ( -1.000 )
```

```
 0.000  0.000  0.000  0.000   <=   +    1.000  ( -1.000 )
Resenje sistema:
x >=  0.0000
x <=  0.5000


2. dobijeni disjunkt:
NOT [V{0.000*x + 0.800} (R0())] AND V{1.000*x + 0.000} (R0())

a 0 odgovara disjunktu:   R0()

NOT V{0.8000 + 0.0000*x} (a 0) AND V{0.0000 + 1.0000*x} (a 0)


Generisani linearni sistem:

Jednacine koje odgovaraju konjuktima u dobijenom disjunktu:
  a 0             C          X
 1.000   <    +    0.800  (  0.000 )
 1.000   >=   +    0.000  (  1.000 )
Jednacine koje odgovaraju promenljivima:
  a 0             C          X
 1.000   >=   +    0.000  (  0.000 )
 1.000   <=   +    1.000  (  0.000 )
Jednacine koje odgovaraju nepoznatoj verovatnoci:
  a 0             C          X
 0.000   >=   +    0.000  ( -1.000 )
 0.000   <=   +    1.000  ( -1.000 )
Resenje sistema:
x >=  0.0000
x <   0.8000

Formula ima resenja.
Uslovi za nepoznatu x:
x >=  0.0000
x <   0.8000
```

7.2 Program Verlog 2.0

Da bismo operator preferiranja prikazali u verovatnosnoj logici LPP_2 proširili smo verovatnosni jezik koji prihvata dokazivač teorema Verlog 1.0 na način opisan u odeljku 2.1.11. Sada su u formulama dozvoljene linearne kombinacije oblika

$$a_1 w(A_1) + \ldots + a_k w(A_k) \geq c$$

gde $w(A)$ označava verovatnoću iskazne formule A. Ovakvi izrazi se mogu negirati i nadovezivati uobičajenim iskaznim operatorima. U odeljku 2.1.11 je pokazano da se za proširenje logike na isti način, kao i za polaznu logiku, dokazuje teorema potpunosti. Takođe se neposrednom proverom može ustanoviti i da se dokaz odlučivosti polazne logike iz odeljka 2.3.5 prenosi na novu logiku sa bogatijim jezikom.

Pored izmena u programu Verlog 1.0 do kojih je zbog opisanog proširivanja verovatnosnog jezika moralo doći, program Verlog 2.0 sadrži i mogućnost prevođenja formula koje sadrže operator preferiranja u formule na verovatnosnom jeziku. Načini prevođenja su opisani u odeljku 7.2.2, a njihov izbor se, sa stanovišta programa, vrši upisivanjem odgovarajućeg simbola u konfiguracionu datoteku.

7.2.1 Operator preferiranja $\triangleright$

Logiku preferencija uveo je Georg Henrik von Wright u [119, 120] pokušavajući da formalizuje nejasan i višesmislen pojam preferecija. von Wright je razmatrao binarnu relaciju preferiranja između stanja koja opisuje iskaznim formulama i za koju je ponudio formalni sistem. Pored logičkog aspekta koji uključuje formalno preciziranje pojma preferiranja, nalaženje potpune aksiomatizacije itd., nesumljivo je da je relacija preferiranja zanimljiva i sa stanovišta primena, na primer u postupku donošenja odluka. Proučavanjem relacije preferiranja su se bavili mnogi, uključujući i domaće, logičare [21, 70]. Međutim, ostao je otvoren problem semantike za relaciju preferiranja što je podrobno opisano u [21]. U odeljku 7.2.2 mi ćemo ponuditi tri verzije verovatnosne semantike za ovu relaciju.

U literaturi je uobičajeno da se operator preferiranja označava sa P, ali da bi se povećala čitljivost i izbegla mogućnost mešanja sa verovatnosnim operatorima $P_{\geq s}$, mi ćemo koristiti oznaku $\triangleright$.

7.2.2 Verovatnosne interpretacije operatora preferiranja

Podsetimo se da se prošireni jezik $\mathcal{L}(LPP_2^{ext})$ sastoji iz prebrojivog skupa iskaznih slova ϕ, klasičnih operatora $\neg$ i $\wedge$, simbola w, $\geq$ i simbola racionalnih brojeva. Klasične iskazne formule se definišu na uobičajeni način. Osnovna težinska formula je izraz oblika

$$a_1 w(A_1) + \ldots + a_k w(A_k) \geq c$$

gde su $a_1, \ldots, a_k, c$ simboli racionalnih brojeva. Težinske formule se dobijaju primenom opratora $\neg$ i $\wedge$ na osnovne težinske formule. U formulama nema mešanja težinskih i klasičnih formula, niti iteriranja verovatnosnih operatora.

U definisanju operatora preferiranja ćemo koristiti tri pristupa:

1. $A \triangleright B =_{def} w(A \wedge \neg B) > 0 \wedge w(\neg A \wedge B) = 0$,

2. $A \triangleright B =_{def} w(B \rightarrow A) = 1$ i

3. $A \triangleright B =_{def} w(A) > w(B)$.

U skladu sa izloženim u odeljku 2.3, kažemo da je u nekom $LPP_{2,\mathrm{Meas}}$-modelu $M = \langle W, v, H, \mu \rangle$ formula $A \triangleright B$ zadovoljena (u odnosu na prethodne definicije operatora $\triangleright$) ako je:

1. $M \models A \triangleright B$ ako i samo ako je $\mu(\{w : w \in W, w \models A \wedge \neg B\}) > 0$ i $\mu(\{w : w \in W, w \models \neg A \wedge B\}) = 0$,

2. $M \models A \triangleright B$ ako i samo ako je $\mu(\{w : w \in W, w \models B \rightarrow A\}) = 1$ i

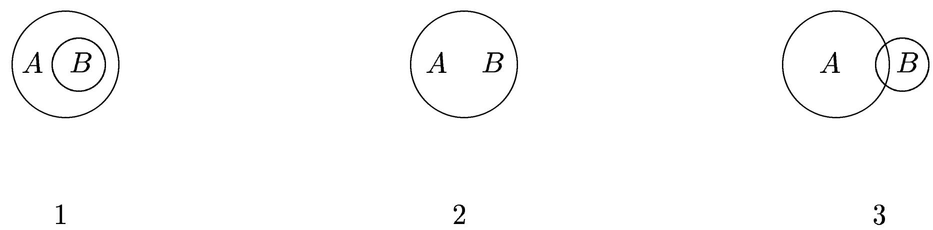
3. $M \models A \triangleright B$ ako i samo ako je $\mu(\{w : w \in W, w \models A\}) > \mu(\{w : w \in W, w \models B\})$.

U pristupu (1) formula $A \triangleright B$ važi u modelu M ako je verovatnoća skupa $[A \wedge \neg B]$ pozitivna, a verovatnoća skupa $[\neg A \wedge B]$ jednaka nuli. Intuitivno, to znači da je nije moguće da važi B, a da ne važi A, a da obrnuto jeste moguće, tj. da je skup $[B]$ pravi podskup skupa $[A]$. U istom smislu, u pristupu (2), skup $[B]$ je podskup skupa $[A]$, ali je dozvoljeno i $[A] = [B]$. U pristupu (3), skupovi $[A]$ i $[B]$ ne moraju biti uporedivi, već $A \triangleright B$ važi u modelu M ako je verovatnoća skupa $[A]$ strogo veća od verovatnoće skupa $[B]$. Vizuelan prikaz ove analize dat je na slici 7.3. Lako je videti da važi:

$$A \triangleright_1 B \rightarrow A \triangleright_2 B$$

$$A \triangleright_1 B \to A \triangleright_3 B$$

gde indeks u operatoru $\triangleright$ označava redni broj definicije operatora, dok operatori $\triangleright_2$ i $\triangleright_3$ nisu uporedivi.



Slika 7.3. Tri definicije operatora $\triangleright$.

Operator preferiranja se, definisan na načine koje smo upravo opisali, može smatrati racionalnim u smislu da se zakonima verovatnoće može opravdati doneti zaključak. Sa druge strane, kao što je u poglavlju 1 sugerisano, verovatnosne logike u kojima se koriste verovatnosni operatori formalizuju subjektivistički pristup verovatnoći. Taj iracionalni aspekt se na operator preferiranja odražava izborom konkretne distribucije verovatnoće. Bilo bi zanimljivo pronaći aksiomatizaciju $\triangleright_i$-segmenata verovatnosne logike. Međutim, u ovom delu rada mi ćemo se zadržati na prikazu izražajnosti verovatnosne logike. Kao alternativu detaljnijem proučavanju u tabeli na slici 7.4 dajemo rezultate koji govore o valjanosti nekih formula $\triangleright_i$-segmenata verovatnosne logike. Simbolom $+$ se označava valjanost formule u pristupu čiji redni broj je oznaka odgovarajuće kolone tabele, dok prazni kvadrat označava da formula nije valjana pri odgovarajućem pristupu. Sve formule, kao i njihovo označavanje, su preuzeti iz [21] i opisuju odnos operatora preferiranja i klasičnih operatora. U ispitivanju formula upotrebljen je automatski dokazivač teorema Verlog 2.0.

Broj	Formula	Pristup		
		1	2	3
1.	$(A \triangleright B) \to \neg(B \triangleright A)$	+		+
2.	$((A \triangleright B) \wedge (B \triangleright C)) \to (A \triangleright C)$	+	+	+
3.	$(A \triangleright B) \to ((A \wedge \neg B) \triangleright (B \wedge \neg A))$	+	+	+
4.	$((A \wedge \neg B) \triangleright (B \wedge \neg A)) \to (A \triangleright B)$	+	+	+
5.	$(((A \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \wedge ((A \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge D)) \wedge ((B \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \wedge ((B \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge D))) \to ((A \vee B) \triangleright (C \vee D))$	+	+	
6.	$(((A \wedge C) \triangleright (B \wedge C)) \wedge ((A \wedge \neg C) \triangleright (B \wedge \neg C))) \to (A \triangleright B)$	+	+	+
7.	$(A \triangleright B) \to (((A \wedge C) \triangleright (B \wedge C)) \vee ((A \wedge \neg C) \triangleright (B \wedge \neg C)))$	+	+	+
8.	$(A \triangleright (B \vee C)) \to ((A \triangleright B) \wedge (A \triangleright C))$	+	+	+
9.	$((A \triangleright B) \wedge (A \triangleright C)) \to (A \triangleright (B \vee C))$		+	
10.	$((A \vee B) \triangleright C) \to ((A \triangleright C) \vee (B \triangleright C))$			
11.	$((A \triangleright C) \vee (B \triangleright C)) \to ((A \vee B) \triangleright C)$	+	+	+
12.	$((A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C)) \to ((A \vee B) \triangleright C)$	+	+	+
13.	$((A \wedge B) \triangleright C) \to ((A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C))$	+	+	+
14.	$((A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C)) \to ((A \wedge B) \triangleright C)$		+	
15.	$((A \wedge B) \triangleright C) \to ((A \triangleright C) \vee (B \triangleright C))$	+	+	+
16.	$(A \triangleright B) \to (\neg B \triangleright \neg A)$	+	+	+
17.	$(\neg B \triangleright \neg A) \to (A \triangleright B)$	+	+	+
18.	$(A \triangleright (B \wedge C)) \to ((A \triangleright B) \vee (A \triangleright C))$			
19.	$((A \triangleright B) \vee (A \triangleright C)) \to (A \triangleright (B \wedge C))$	+	+	+
20.	$((A \triangleright B) \wedge (A \triangleright C)) \to (A \triangleright (B \wedge C))$	+	+	+
21.	$(\neg(B \triangleright A)) \to (A \triangleright B)$		+	
c2.	$(A \triangleright C) \to ((A \triangleright B) \wedge (B \triangleright C))$			
c5.	$((A \vee B) \triangleright (C \vee D)) \to (((A \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \wedge ((A \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge D)) \wedge ((B \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge C)) \wedge ((B \wedge \neg C \wedge \neg D) \triangleright (\neg A \wedge \neg B \wedge D)))$		+	
c6.	$(A \triangleright B) \to (((A \wedge C) \triangleright (B \wedge C)) \wedge ((A \wedge \neg C) \triangleright (B \wedge \neg C)))$		+	
c7.	$(((A \wedge C) \triangleright (B \wedge C)) \vee ((A \wedge \neg C) \triangleright (B \wedge \neg C))) \to (A \triangleright B)$			
c12.	$((A \vee B) \triangleright C) \to ((A \triangleright C) \wedge (B \triangleright C))$			
c15.	$((A \triangleright C) \vee (B \triangleright C)) \to ((A \wedge B) \triangleright C)$			
c20.	$(A \triangleright (B \wedge C)) \to ((A \triangleright B) \wedge (A \triangleright C))$			

Slika 7.4. Valjanost formula koje sadrže operator preferiranja $\triangleright$.

Dodatak A

A.1 Verovatnoća

Definicije i formulacije teorema u ovom odeljku su preuzete iz [3, 7, 46, 112]. U daljem tekstu Ω će označavati neprazan skup.

Definicija A.1 Familija H podskupova skupa Ω je *algebra* ako je ispunjeno:

1. $\Omega \in H$,
2. ako je $F_1 \in H$, tada je komplement skupa F_1, F_1^c u H i
3. ako su $F_1 \in H$ i $F_2 \in A$, tada je $F_1 \cup F_2 \in H$.

Definicija A.2 Familija H podskupova skupa Ω je σ*-algebra* ako je ispunjeno:

1. $\Omega \in H$,
2. ako je $F_1 \in H$, tada je $F_1^c \in H$ i
3. ako je $F_1, F_2, \ldots \in H$, tada je $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \in H$.

Definicija A.3 Neka je H familija podskupova skupa Ω. Familija H' podskupova skupa Ω je algebra[1] *generisana* familijom H ako je ispunjeno:

1. H' je algebra,
2. $H \subset H'$ i
3. H' je najmanja algebra koja sadrži H.

Teorema A.4 Za svaku familiju H podskupova skupa Ω postoji jedinstvena algebra (σ-algebra) generisana familijom H.

Definicija A.5 Neka je H algebra podskupova skupa Ω. *Konačno-aditivna verovatnoća*[2] je funkcija $\mu : H \to [0, 1]$ i za koju je:

1. $\mu(F) \geq 0$, za svaki $F \in H$,
2. $\mu(\Omega) = 1$ i

[1] Analogno se definiše σ-algebra generisana familijom H.
[2] U [7] konačno-aditivna verovatnoća se naziva *positive bounded probability charge.*

3. ako skupovi F_1 i F_2 pripadaju H i međusobno su disjunktni ($F_1 \cap F_2 = \emptyset$), tada je $\mu(F_1 \cup F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$.

Definicija A.6 Neka je H σ-algebra podskupova skupa Ω. *σ-aditivna verovatnoća* je funkcija $\mu : H \to [0,1]$ i za koju je:

1. $\mu(F) \geq 0$, za svaki $F \in H$,

2. $\mu(\Omega) = 1$ i

3. ako je $F_1, F_2, \ldots$ prebrojiva familija skupova koji pripadaju H i koji su međusobno disjunktni ($F_i \cap F_j = \emptyset$, za $i \neq j$), tada je $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$.

Definicija A.7 Verovatnoća μ definisana na (σ-)algebri H je *konačno-vrednosna* ako je skup $\{\mu(F) : F \in H\}$, kodomen funkcije μ, konačan.

Definicija A.8 *Konačno-aditivni verovatnosni prostor*[3] je uređena trojka $\langle \Omega, H, \mu \rangle$, gde su:

1. H algebra podskupova skupa Ω i

2. μ konačno-aditivna verovatnoća definisana na H.

Elementi algebre H su *merljivi* u odnosu na verovatnoću μ.

Definicija A.9 Neka je $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ (konačno-aditivni) verovatnosni prostor. Verovatnoća μ je *diskretna* ako su svi jednočlani podskupovi od Ω merljivi. U suprotnom verovatnoća je *neprekidna*.

Definicija A.10 Neka su $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ i $\langle \Omega, H, \nu \rangle$ verovatnosni prostori. Verovatnoća ν je *apsolutno neprekidna* u odnosu na verovatnoću μ ($\mu \ll \nu$) ako za svaki $F \in H$ iz $\mu(F) = 0$ sledi da je $\nu(F) = 0$.

Definicija A.11 Neka su $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ i $\langle \Omega, H, \nu \rangle$ verovatnosni prostori. Verovatnoće μ i ν su *singularne*[4] ($\mu \perp \nu$) ako postoje disjunktni skupovi X i Y čija je unija skup Ω tako da za svaki merljivi skup A, $\mu(X \cap A) = \nu(Y \cap A) = 0$.

Sledeće dve teorema su varijante teorema dokazanih u [7] (kao posledica 3.3.4 i iskaz 11.1.5). Prva od njih se odnosi na mogućnost proširivanja konačno-aditivne verovatnoće, a druga daje kriterijum za ispitivanje da li je verovatnoća konačno-vrednosna.

Teorema A.12 Neka je H algebra podskupova skupa Ω i neka je μ konačno-aditivna verovatnoća definisana na H. Neka je H' algebra podskupova skupa Ω koja sadrži H. Tada postoji konačno-aditivna verovatnoća $\overline{\mu}$ definisana na H' koja je proširenje od μ sa H na H' i čiji je kodomen podskup zatvorenja kodomena od μ.

Teorema A.13 Neka je H algebra podskupova skupa Ω i neka je μ konačno-aditivna verovatnoća definisana na H. Ako postoji realan broj $c > 0$ takav da je za svaki $F \in H, F \neq \emptyset$, $\mid \mu(F) \mid > c$, onda je verovatnoća μ konačno-vrednosna.

[3] Analogna definicija se daje i za slučaj σ-algebre H i σ-aditivne verovatnoće μ. σ-aditivni verovatnosni prostor se kratko naziva verovatnosni prostor.

[4] Koristi se i izraz ν je *singularna u odnosu na μ*.

Primetimo da je u teoremi A.12 H' bilo koja algebra nad Ω koja sadrži H, tako da može biti i 2^Ω, familija svih podskupova skupa Ω. Činjenica da je μ konačno-aditivna je od suštinskog značaja. U opštem slučaju σ-aditivnu verovatnoću definisanu na nekoj σ-algebri H podskupova skupa Ω nije moguće proširiti do σ-aditivne verovatnoće definisane na 2^Ω. Recimo, neka je $\Omega = [0,1]$ i neka je H σ-algebra skupova merljivih u odnosu na restrikciju Lebesgue-ove mere na $[0, 1]$. Tada postoje nemerljivi podskupovi od $[0,1]$, odnosno $H \neq 2^{[0,1]}$.

Definicija A.14 *Proizvod* dva σ-aditivna verovatnosna prostora $\langle \Omega_1, H_1, \mu_1 \rangle$ i $\langle \Omega_2, H_2, \mu_2 \rangle$ je σ-aditivni verovatnosni prostor $\langle \Omega_1 \times \Omega_2, H_1 \otimes H_2, \mu_1 \otimes \mu_2 \rangle$, gde je $H_1 \otimes H_2$ σ-algebra generisana skupom merljivih pravougaonika $X_1 \times X_2$, $X_i \in H_i$ i $\mu_1 \otimes \mu_2(X_1 \times X_2) = \mu_1(X_1) \cdot \mu_2(X_2)$.

Definicija A.15 Ako je $\langle \Omega_1 \times \Omega_2, H_1 \otimes H_2, \mu_1 \otimes \mu_2 \rangle$ proizvod dva σ-aditivna verovatnosna prostora, $X \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, $\omega_1 \in \Omega_1$, tada je skup $X_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in X\}$ *sekcija skupa* X *određena sa* ω_1. Slično, za $\omega_2 \in \Omega_2$, skup $X_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in X\}$ je *sekcija skupa* X *određena sa* ω_2.

Teorema A.16 Neka je $\langle \Omega_1 \times \Omega_2, H_1 \otimes H_2, \mu_1 \otimes \mu_2 \rangle$ proizvod dva σ-aditivna verovatnosna prostora, i $X \in H_1 \otimes H_2$. Za svaki $\omega_1 \in \Omega_1$ i $\omega_2 \in \Omega_2$ sekcije X_{ω_1} i X_{ω_2} su merljivi skupovi, tj. $X_{\omega_1} \in H_1$ i $X_{\omega_2} \in H_2$.

Međutim, obrat teoreme A.16 ne važi. Neka je Ω neprebrojiv skup i H najmanja σ-algebra podskupova od Ω koja sadrži sve jednočlane elemente iz Ω. Tada dijagonala $D = \{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\}$ ne pripada σ-algebri $H \otimes H$, iako sve njene sekcije D_ω pripadaju H. S druge strane, ako je svaki jednočlani skup iz Ω merljiv, moguće je proširiti meru proizvoda tako da i dijagonala bude merljiva.

Definicija A.17 Neka je $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ verovatnosni prostor i F proizvoljni podskup skupa Ω. Tada je *spoljna verovatnoća* $\mu^*(F)$ *skupa* F *indukovana verovatnoćom* μ definisana sa

$$\mu^*(F) = \inf\{\mu(F') : F \subset F' \in H\}$$

Analogno, *unutrašnja verovatnoća* $\mu_*(F)$ *skupa* F *indukovana verovatnoćom* μ je definisana sa

$$\mu_*(F) = \sup\{\mu(F') : F' \subset F, F' \in H\}$$

Definicija A.18 Neka je $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ prostor mere i neka su $A, B \in H$. *Uslovna verovatnoća* od B ako se dogodio A i ako je $\mu(A) > 0$, u oznaci $\mu(B \mid A)$ je

$$\mu(B \mid A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}.$$

Teorema A.19 (Bayes-ova teorema) Neka je $\langle \Omega, H, \mu \rangle$ prostor mere. Neka je $B \in H$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \in H$ međusobno disjunktni skupovi, čija je unija sam Ω takvi da $\mu(A_i) > 0$ za $i = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\mu(A_i \mid B) = \frac{\mu(B \mid A_i)\mu(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mu(B \mid A_j)\mu(A_j)}.$$

Sledeća aksioma povezuje verovatnoće višeg reda (verovatnoća nad verovatnoćama) sa običnim verovatnoćama [76].

Definicija A.20 (Miller-ov princip) Uslovna verovatnoća događaja pod uslovom da je uočeno da je verovatnoća događaja r je r:

$$\mu(\alpha \mid \mu(\alpha) = r) = r.$$

A.2 Loeb-ova konstrukcija

Loeb-ova konstrukcija je sredstvo koje se koristi u nestandardnoj teoriji mere za dobijanje rezultata o proširivanju konačno-aditivne mere do σ-aditivne mere [103]. U ovom odeljku su date osnovne definicije i tvrđenja koji rezultiraju teoremom A.30, varijantom leme 2.11 iz [55].

Definicija A.21 *Superstruktura* $V(S)$ nad skupom S se dobija iteracijom:

$$V_0(S) = S, \qquad V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup 2^{V_n(S)}, \qquad V(S) = \cup_{n<\omega} V_n(S).$$

Definicija A.22 *Ograničena formula* je formula prvog reda u kojoj su svi kvantifikatori ograničeni, odnosno oblika su $(\forall x \in y)$ i $(\exists x \in y)$.

Definicija A.23 Struktura $^*S$ je *nestandardni model* za S, a funkcija $^* : V(S) \to V(^*S)$ je ograničeno elementarno utapanje ako važi:

(E) *Princip ekstenzije.* $^*S$ je prava ekstenzija od S i restrikcija funkcije $*$ na S, $* \restriction S$, je identitet.

(T) *Princip transfera.* Funkcija $*$ očuvava istinitost ograničenih formula, odnosno za svaku ograničenu formulu $\phi(x_1, \dots, x_n)$ i $a_1, \dots, a_n \in V(S)$, $\phi(a_1, \dots, a_n)$ važi u $V(S)$ ako i samo ako $\phi(^*a_1, \dots, ^*a_n)$ važi u $V(^*S)$.

(S) *Princip ω_1-saturacije.* Ako su $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ neprazni skupovi u $^*V_n(S)$, tada je presek $\cap_{m<\omega} A_m$ neprazan.

Definicija A.24 Objekat $A \in V(^*S)$ je *internalni* ako je $A \in {}^*B$ za neki $B \in V(S)$. U suprotnom, A je *eksternalni* objekat.

Definicija A.25 $^*V(S) = \cup_{n<\omega} {}^*V_n(S)$ je kolekcija svih internalnih objekata iz $V(^*S)$.

Definicija A.26 *Internalni prostor mere* $\langle A, H, \mu \rangle$ se sastoji od internalnog skupa A, internalne algebre $H \subset 2^A$ podskupova skupa A i internalne $^*\sigma$-aditivne funkcije $\mu : H \to {}^*\mathbb{R}_+$.

Definicija A.27 Ako je $x \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ i ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\mid x \mid < n$, *standardni deo* od x je $^\circ x = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha < x\}$.

Definicija A.28 *Loeb-ov prostor* internalnog prostora mere $\langle A, H, \mu \rangle$ je jedinstveni σ-aditivni prostor mere $\langle A, L(H), L(\mu) \rangle$ gde je:

1. $L(H)$ σ-algebra generisana algebrom H i
2. $L(\mu)(F) = {}^\circ\mu(F)$ za svaki $F \in H$.

Teorema A.29 Neka je $\langle A, H, \mu \rangle$ internalni konačno-aditivni prostor mere takav da je $^\circ\mu(A) < \infty$. Tada postoji jedinstveni Loeb-ov prostor prostora $\langle A, H, \mu \rangle$.

Teorema A.30 Neka je $\langle A, H, \mu \rangle$ konačno-aditivni prostor verovatnoće. Tada je σ-aditivni prostor verovatnoće $\langle {}^*A, L(^*H), L(^*\mu) \rangle$ dobijen primenom Loeb-ove konstrukcije na $\langle {}^*A, {}^*H, {}^*\mu \rangle$ takav da za svaku ograničenu formulu $\phi(x)$ i svaki $a \in A$ važi

$$\langle A, H, \mu \rangle \models \phi(a) \text{ akko } \langle {}^*A, L(^*H), L(^*\mu) \rangle \models \phi(a).$$

A.3 Skupovi. Relacije

Definicija A.31 Neka je W skup i A njegov podskup. Tada je A *ko-konačan* ako je $W \setminus A$ konačan skup.

Definicija A.32 Neka je W skup. *Binarna relacija* R je podskup skupa W^2. Binarna relacija je:

- *Serijska* ako $(\forall x \in X)(\exists y \in X)(xRy)$.
- *Refleksivna* ako $(\forall x \in X)(xRx)$.
- *Simetrična* ako $(\forall x, y \in X)(xRy \Rightarrow yRx)$.
- *Antisimetrična* ako $(\forall x, y \in X)(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$.
- *Tranzitivna* ako $(\forall x, y, z \in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.
- *Ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.
- *Poretka* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

A.4 Transfinitna indukcija

U ovom odeljku je iskorišten materijal iz [71].

Definicija A.33 *Parcijalno uređen skup* je uređen par $\langle X, \leq \rangle$, gde je X neprazan skup, a $\leq$ relacija poretka skupa X.

Definicija A.34 Relacija $\leq$ skupa X je *kvaziporedak* ako je refleksivna i tranzitivna. Kvaziporedak $\leq$ skupa X je *totalan* (ili *linearan*) ako i samo ako važi $(\forall y, z \in X)(y \leq z \vee z \leq y)$.

Definicija A.35 Neka je $\leq$ relacija poretka skupa X. Relacija $<$ skupa X definisana sa $y < z$ akko $y \leq z$ i $y \neq z$ je relacija *strogog poretka*. *Strogo uređen skup* je uređen par $\langle X, < \rangle$, gde je X neprazan skup, a $<$ relacija strogog poretka skupa X.

Definicija A.36 Neka je X parcijalno uređen relacijom $\leq$ i neka je $a \in X$. *Strogi početni segment* je skup $st(a) = \{y \in X : y < a\}$.

Definicija A.37 Element a skupa X koji je parcijalno uređen relacijom $\leq$ je *minimum* ako za svaki $y \in X$, $a \leq y$.

Definicija A.38 Skup X parcijalno uređen relacijom $\leq$ je *dobro uređen* ako svaki njegov neprazan podskup ima minimum.

Teorema A.39 (Princip transfinitne indukcije) Neka je Y podskup dobro uređenog skupa X i neka važi:

$$(\forall z \in X)(st(z) \subset Y \Rightarrow z \in Y).$$

Tada je $X = Y$.

Definicija A.40 *Neposredni sledbenik skupa* x je skup $x^+ = x \cup \{x\}$. Skup x je *skup sledbenika* ako sadrži prazan skup i $(\forall n)(n \in x \Rightarrow n^+ \in x)$.

Aksioma A.41 *Aksioma beskonačnosti.* Postoji skup koji sadrži prazan skup i sledbenika svakog svog elementa.

Definicija A.42 Skup ω je najmanji skup sledbenika. *Prirodan broj* je element najmanjeg skupa sledbenika.

Definicija A.43 *Ordinalni broj* je dobro uređen skup α za koji važi $(\forall \xi \in \alpha)(st(\xi) = \xi)$.

Definicija A.44 Prirodni brojevi su *konačni* ordinali. Ordinali koji nisu konačni su *transfinitni*. *Ordinali sledbenici* su neposredni sledbenici nekih ordinala. *Granični ordinali* su ordinali koji nisu neposredni sledbenici.

Nekoliko prvih ordinala dato je u sledećem spisku: $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, \dots, 3\omega, \dots, n\omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \omega_1, \dots$ Sa ω se označava prvi beskonačni ordinal, tj. ordinal čiji su svi početni segmenti konačni, a ω_1 prvi neprebrojivi ordinal, tj. ordinal čiji su svi početni segmenti prebrojivi.

Teorema A.45 (Princip transfinitne indukcije za ordinale) Neka je **ON** klasa svih ordinala. Ako važi:

1. $S(0)$,
2. $(\forall \alpha \in \mathbf{ON})(S(\alpha) \Rightarrow S(\alpha^+))$ i
3. za svaki granični ordinal γ, $((\forall \beta < \gamma)S(\beta)) \Rightarrow S(\gamma)$

onda za svaki ordinal α važi $S(\alpha)$.

Definicija A.46 *Kardinal* je ordinal α sa osobinom da je $\alpha \leq \beta$ za svaki ordinal β koji je ekvipotentan sa α.

A.5 Infinitarne logike

Definicije i formulacije teorema u ovom odeljku su preuzete iz [61, 63].

Definicija A.47 Skup A je *tranzitivan* ako iz $a \in b \in A$ sledi $a \in A$. *Tranzitivno zatvorenje* skupa a je najmanji tranzitivan skup b koji je nadskup od a.

Definicija A.48 *Formula teorije skupova* je formula na jeziku prvog reda sa jednakošću i binarnim relacijskim simbolom $\in$.

Ako je α formula teorije skupova, $(\forall x \in y)\alpha$ predstavlja skraćeni zapis formule $(\forall x)(x \in y \to \alpha)$, dok $(\exists x \in y)\alpha$ predstavlja skraćeni zapis formule $(\exists x)(x \in y \wedge \alpha)$.

Definicija A.49 Δ_0 *formula* je formula teorije skupova izgrađena od atomskih formula i njihovih negacija korišćenjem konačnih $\wedge$ i $\vee$ i $(\forall x \in y)$ i $(\exists x \in y)$. Σ *formula* je formula teorije skupova izgrađena od atomski formula i njihovih negacija korišćenjem prethodne četiri operacije i $(\exists x)$. Π *formula* je formula teorije skupova izgrađena od atomskih formula i njihovih negacija korišćenjem prethodne četiri operacije i $(\forall x)$.

Definicija A.50 Skup A je *dopustiv* ako važi:

1. $A \neq \emptyset$.
2. A je tranzitivan.
3. Ako $x \in A$, onda tranzitivno zatvorenje $TC(x) \in A$.

4. Aksioma Δ_0 separacije.
   Ako je $\alpha(x, y_1, \ldots, y_n)$ Δ_0 formula i $b_1, \ldots, b_n, c \in A$, tada $\{a \in c : \langle A, \in\rangle \models \alpha(a, b_1, \ldots, b_n)\} \in A$.

5. Aksioma Σ refleksije.
   Ako je $\alpha(y_1, \ldots, y_n)$ Σ formula, $b_1, \ldots, b_n \in A$ i $\langle A, \in\rangle \models \alpha(b_1, \ldots, b_n)$, tada postoji tranzitivan skup $a \in A$ tako da $b_1, \ldots, b_n \in a$ i $\langle a, \in\rangle \models \alpha(b_1, \ldots, b_n)$.

Definicija A.51 Skup $X \subset A$ je Σ na A ako postoji Σ formula $\alpha(x, y_1, \ldots, y_n)$ i elementi $b_1, \ldots, b_n \in A$ tako da je $X = \{a \in A : \langle A, \in\rangle \models \alpha(a, b_1, \ldots, b_n)\}$. Formula $\alpha(x, b_1, \ldots, b_n)$ je Σ definicija skupa X. Analogno se definiše skup koji je Π na A. Skup $X \subset A$ je Δ na A ako je i Σ i Π na A.

Definicija A.52 HF je skup svih skupova x takvih da je kardinalnost $TC(x) < \omega$. Elementi skupa HF se nazivaju *nasledno konačni*. HC je skup svih skupova x takvih da je kardinalnost $TC(x) < \omega_1$. Elementi skupa HC se nazivaju *nasledno prebrojivi*.

Definicija A.53 Neka L označava skup formula na jeziku L i neka je A neprazan tranzitivan skup takav da važi:

- ako je $a, b \in A$, tada je $\{a, b\} \in A$, $a \cup b \in A$, $a \times b \in A$ i
- ako je $a \in A$ i α najmanji ordinal koji nije tranzitivno zatvorenje od a, tada je $\alpha \in A$.

Skup formula L_A je *fragment* skupa formula logike L ako važi:

- $L_A = L \cap A$ i
- ako je $\varphi(x, \ldots) \in L_A$ i ako je $t \in A$ term iz $L_{\omega_1 \omega}$, tada je $\varphi(t, \ldots) \in L_A$.

Ako je A fragment logike L onda $\vdash_{L_A} \varphi$ označava da $\vdash_L \varphi$ i da postoji izvođenje u L takvo da sve formule iz dokaza pripadaju L_A.

Teorema A.54 (Barwise-ova potpunost) Neka je A dopustiv skup koji sadrži ω i čiji su svi elementi prebrojivi, tj. $A \subset HC$. Skup valjanih formula na jeziku L_A je Σ na A.

Teorema A.55 (Barwise-ova kompaktnost) Neka je $A \subset HC$ prebrojivi dopustivi skup. Neka je X skup rečenica jezika L_A koji je Σ na A takav da svako $x \subset X$ za koje je $x \in A$ ima model. Tada X ima model.

Teorema A.56 (Robinson-ova konzistentnost) Neka su L_1 i L_2 dva proširenja jezika L takva da je $L_1 \cap L_2 = L$ (svi simboli koji su zajednički za L_1 i L_2 su u L). Neka je T kompletna teorija u L i neka su α_1 i α_2 rečenica na jezicima L_1, odnosno L_2. Ako su $T \cup \{\alpha_1\}$ i $T \cup \{\alpha_2\}$ konzistentni, tada je konzistentno i $T \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Ako su α i β dva beskonačna kardinala, beskonačna logika $L_{\alpha\beta}$ je logika slična logici prvog reda, sem što su dozvoljene konjunkcije i disjunkcije formula iz skupova koji sadrže manje od α formula i univerzalne i egzistencijalne kvantifikacije promenljivih iz skupova koji sadrže manje od β promenljivih. Logika $L_{\omega\omega}$ je klasična logika prvog reda. Jezik logike $L_{\omega_1\omega}$ sadrži prebrojivo mnogo relacijskih, funkcijskih i simbola konstanti, standardne logičke simbole ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $=$) i ω_1 promenljivih, $v_0, v_1, \ldots, v_\alpha, \ldots, \alpha < \omega_1$. Skup formula ove logike je najmanja klasa X takva da:

- sve atomske formule su u X

- ako je $\varphi \in X$ i $\alpha < \omega$ tada je $\neg\varphi \in X$, $(\forall v_\alpha)\varphi \in X$ i $(\exists v_\alpha)\varphi \in X$ i
- ako je ϕ najviše prebrojiv neprazan podskup od X, tada je $\wedge\phi \in X$ i $\vee\phi \in X$.

U logici $L_{\omega_1\omega}$ se mogu izraziti mnogi pojmovi koji nisu izrazivi u logici prvog reda, recimo:

- klasa svih konačnih modela se karakteriše rečenicom

$$\vee_{n<\omega}(\exists x_1 \dots x_n)(\forall y)(y = x_1 \vee \dots \vee y = x_n)$$

- klasa svih modela izomorfnih standardnom modelu aritmetike se karakteriše skupom Peano-vih aksioma na koje se dodaje formula

$$(\forall x)(x = 0 \vee x = 0' \vee \dots)$$

Sledeći primer ilustruje da teorema kompaktnosti A.63 i teorema Löwenhaim-Skolem-Tarski A.64 ne važe za logiku $L_{\omega_1\omega}$.

Primer A.57 Neka su $c_0, c_1, \dots, c_\omega$ simboli konstanti jezika $L_{\omega_1\omega}$. Neka je Σ skup sentenci

$$(\forall x) \vee_{n<\omega} (x = c_n), \quad c_\omega \neq c_0, \quad c_\omega \neq c_1, \quad \dots$$

Svaki konačan podskup skupa Σ ima model, ali Σ nema model. Prva rečenica ima model kardinalnosti ω, ali nema neprebrojivih modela.

Međutim postoji kompletna aksiomatizacija tako da važe sledeće teoreme potpunosti.

Teorema A.58 Ako je φ rečenica logike $L_{\omega_1\omega}$, tada je $\vdash_{L_{\omega_1\omega}} \varphi$ akko $\models \varphi$.

Teorema A.59 Ako je φ rečenica prebrojivog fragmenta L_A logike $L_{\omega_1\omega}$, tada je $\vdash_{L_A} \varphi$ akko $\models \varphi$.

A.6 Formulacije nekih osnovnih tvrđenja

U ovom odeljku se pretpostavlja neki fiksirani jezik L. Konzistentnost se posmatra u odnosu na neki fiksirani aksiomatski sistem.

Definicija A.60 Skup je *deduktivno zatvoren* ako sadrži sve svoje posledice, tj. iz $T \vdash \alpha$ sledi $\alpha \in T$.

Teorema A.61 (Jaka potpunost) Svaki konzistentan skup ima model.

Teorema A.62 ((Obična, slaba) potpunost) Svaka konzistentna formula ima model.

Teorema A.63 (Kompaktnost) Ako je Σ skup rečenica jezika L i svaki konačan podskup od Σ ima model, tada Σ ima model.

Teorema A.64 (Löwenhaim-Skolem-Tarski) Ako skup Σ rečenica jezika L ima beskonačan model kardinalnosti α, onda Σ ima modele svih kardinalnosti $\beta > \alpha$.

Definicija A.65 Logika L_1 je *konzervativno proširenje* logike L_2 ako važi:

- Jezik $\mathcal{L}(L_1)$ logike L_1 je nadskup jezika $\mathcal{L}(L_2)$ logike L_2 i
- sva valjane formule iz L_1 koje su na jeziku $\mathcal{L}(L_2)$ su valjane i u logici L_2.

A.7 Hijerarhije i složenost izračunavanja

Formulacije definicija i tvrđenja u ovom odeljku koje se odnose na aritmetičku i analitičku hijerarhiju skupova i na složenost izračunavanja su preuzete iz [2, 8, 20].

A.7.1 Aritmetička hijerarhija

Definicija A.66 Skup[5] A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je *rekurzivno prebrojiv* (Σ_1^0) ako postoji rekurzivna binarna relacija B tako da $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow (\exists y)B(x,y))$.

Definicija A.67 Skup A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je *korekurzivno prebrojiv* (Π_1^0) ako postoji Σ_1^0 skup B tako da je $A = \mathbb{N} \setminus B$.

Definicija A.68 Skup A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je *rekurzivan (odlučiv)* (Δ_1^0) ako je Σ_1^0 i Π_1^0.

Definicija A.69 Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *izračunljiva* u odnosu na neku apstraktnu mašinu ako postoji program za tu mašinu kojim se za dati ulaz u konačnom broju koraka rada izračunava vrednost funkcije. Funkcija je *parcijalna* ako je definisana na nekom podskupu od $\mathbb{N}$, inače je *totalna*. Skup je *odlučiv* ako je njegova karakteristična funkcija totalna izračunljiva, inače je *neodlučiv*.

Definicija A.70 Skup je *parcijalno odlučiv (rekurzivno nabrojiv)* ako je njegova karakteristična funkcija *parcijalno izračunljiva*, odnosno ako program kojim se funkcija izračunava u konačnom broju koraka staje i daje potvrdan odgovor kad god argument funkcije pripada skupu.

Definicija A.71 Skup A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je Σ_{n+1}^0 ako postoji Π_n^0 binarna relacija B tako da je $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow (\exists y)B(x,y))$. Skup A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je Π_{n+1}^0 ako postoji Σ_{n+1}^0 skup B tako da je $A = \mathbb{N} \setminus B$. Skup A prirodnih brojeva, $A \subset \mathbb{N}$, je Δ_{n+1}^0 ako je Σ_n^0 i Π_n^0.

Definicija A.72 *Aritmetički skupovi* su skupovi koji pripadaju $\Delta_n^0, \Sigma_n^0, \Pi_n^0 (n \in \mathbb{N})$ hijerarhiji.

A.7.2 Analitička hijerarhija

Definicija A.73 Π_∞^0 *formula* je formula u standardnom jeziku aritmetike[6]. Π_∞^0 *formula sa parametrima drugog reda* je Π_∞^0 formula, sem što sadrži i skupovne promenljive[7]. Π_∞^0 *formula sa parametrima drugog i trećeg reda* je Π_∞^0 formula, sem što sadrži i skupovne promenljive i promenljive koje odgovaraju skupovima skupova.

Definicija A.74 Π_1^1 *formula* je formula oblika

$$(\forall X_1)\dots(\forall X_n)\alpha$$

gde je α Π_∞^0 formula sa parametrima drugog reda i $X_1, \dots, X_n$ promenljive drugog reda.

Definicija A.75 Π_∞^1 *formula* je formula oblika

$$(Q_1 X_1)\dots(Q_n X_n)\alpha$$

gde je α Π_∞^0 formula sa parametrima drugog reda, $X_1, \dots, X_n$ promenljive drugog reda i $Q_1, \dots, Q_n$ proizvoljni kvantifikatori drugog reda.

---

[5] Odnosno, unarna relacija nad $\mathbb{N}$, ili k-arna relacija umesto koje se posmatra unarna relacija nad kodom argumenata.
[6] Jezik sadrži nelogičke simbole 0, 1, $+$, $\times$ i individualne promenljive.
[7] U izrazima oblika $t \in X$ gde je t term bez skupovnih promenljivih.

Definicija A.76 Π^2_1 *formula* je formula oblika

$$(\forall X_1) \dots (\forall X_n) \alpha$$

gde je α Π^1_∞ formula sa parametrima trećeg reda i $X_1, \dots, X_n$ promenljive trećeg reda.

Definicija A.77 Σ^2_1 *formula* je Π^1_∞ formula sa parametrima drugog i trećeg reda kojoj prethode proizvoljni parametri drugog i egzistencijalni kvantifikatori trećeg reda.

Definicija A.78 Neka je $\Sigma^1_0 =_{def} \Pi^1_0 =_{def} \Pi^0_\infty$. Σ^1_{n+1} *formula* je Π^1_n formula kojoj prethode egzistencijalni kvantifikatori drugog reda. Π^1_{n+1} *formula* je Σ^1_n formula kojoj prethode univerzalni kvantifikatori drugog reda.

U opštem slučaju u izrazu poput Π^i_n, $i+1$ je red parametara formule, n govori o broju alternirajućih blokova kvantifikatora, a Π govori da je prvi blok čitajući sa leva na desno blok univerzalnih kvantifikatora. Za svaku od tih klasa postoje odgovarajući skup skupova prirodnih brojeva i skupovi problema koji se mogu definisati formulama iz klase. Recimo, skup S je Π^1_1 ako postoji Π^1_1 formula $\alpha_S(x)$ sa jednom slobodnom promenljivom x tako da $n \in S$ ako i samo ako važi $\alpha_S(n)$, dok se odgovarajući problem sastoji od utvrđivanja da li je $n \in S$. Istinitosni problem za neku klasu formula predstavlja ispitivanje da li su rečenice te klase tačne, odnosno da li kodovi rečenica pripadaju skupu kodova istinitih rečenica. Klasa formula se identifikuje sa klasom kodova (u nekom standardnom sistemu kodiranja) za te formule.

Teorema A.79 Π^1_1 kompletni skupovi nisu rekurzivno nabrojivi i nemaju kompletnu rekurzivnu aksiomatizaciju.

A.7.3 Složenost izračunavanja

U slučaju odlučivih skupova, odnosno problema, postoji hijerarhija koja se odnosi na složenost izračunavanja odgovarajućih karakterističnih funkcija. Pri tome se procenjuje potrošnja, odnosno zauzeće, vremena i memorije.

Definicija A.80 Neka je C neka klasa složenosti. Problem P je *u* C ako postoji program za njegovo rešavanje koji ne koristi resurse koji nisu dozvoljeni definicijom klase C.

Definicija A.81 Neka je C neka klasa složenosti. Problem P je C*-težak* ako za svaki drugi problem Q koji je u klasi C postoji program koji problem Q redukuje u problem P i koristi pri tome polinomijalan broj koraka.

Definicija A.82 Neka je C neka klasa složenosti. Problem P je C*-kompletan* ako je u C i ako je C-težak.

Definicija A.83 Neka je C neka klasa složenosti. Problem P je *ko-*C*-kompletan* ako je komplement problema C-kompletan.

Sledi opis nekoliko klasa odlučivih problema i prikaz odnosa između njih. U klasi $PTIME$[8] se nalaze problemi za čije rešavanje je potreban najviše polinomijalni broj koraka, odnosno polinomijalno vreme. U klasi $NPTIME$[9] se nalaze problemi koji se rešavaju nedeterminističkim programima u polinomijalnom vremenu. NP problemi se prirodno dele na dva koraka: u prvom koraku se traži rešenje koje se proverava u drugom koraku. Nedeterminizam se odnosi na traženje rešenja. Pretpostavlja

[8] Ova klasa se označava i sa P.
[9] Ova klasa označava i sa NP.

se da je pretraživanje dugotrajno, ali se u smislu nedeterminizma pronalazi u jednom koraku. Za ispitivanje rešenja je potreban najviše polinomijalni broj koraka. Problem ispitivanja zadovoljivosti iskaznih formula je NP kompletan problem. U klasi $PSPACE$ se nalaze problemi koji se rešavaju programima koji koriste polinomijalni prostor. Problem zadovoljivosti za modalnu logiku *S4* je $PSPACE$ kompletan. U klasi $EXPTIME$ se nalaze problemi koji se rešavaju programima koji koriste eksponencijalno vreme. Problem zadovoljivosti za modalnu logiku PDL je $EXPTIME$ kompletan. U klasi $EXPSPACE$ se nalaze problemi koji se rešavaju programima koji koriste eksponencijalni prostor. Poznato je da je odnos između klasa sledećeg oblika:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq EXPSPACE$$

Pretpostavka je da je hijerarhija prava, odnosno da su klase gledano sa leva na desno pravi podskupovi.

Donja granica složenosti problema se pokazuje tako što se na taj problem svodi neki drugi problem čija je kompletnost poznata. Recimo, složenost problema zadovoljivosti formula u normalnim modalnim logikama je bar NP jer je problem zadovoljivosti iskaznog računa NP kompletan, a iskazna logika je podlogika normalnih modalnih logika. *Gornja granica* složenosti problema se pokazuje konstrukcijom programa kojim se rešava taj problem. Recimo, za ispitivanje zadovoljivosti formula u modalnoj logici *S5* postoji program koji pripada klasi NP.

A.8 Linearni sistemi

Formulacije sledećih teorema su preuzete iz [30].

Teorema A.84 Ako sistem od r linearnih jednačuna i/ili nejednačina ima nenegativno rešenje, tada ima i nenegativno rešenje sa najviše r pozitivnih koordinata.

Teorema A.85 Ako sistem od r linearnih jednačuna i/ili nejednačina sa celobrojnim koeficijentima čija dužina zapisa ne prelazi l ima nenegativno rešenje, tada ima i nenegativno rešenje sa najviše r pozitivnih koordinata čiji zapis ne prelazi dužinu $O(rl + r\log(r))$.

A.9 Supremum i infimum

U ovom odeljku koristimo formulacije definicija i tvrđenja iz [3].

Definicija A.86 Ako je A podskup skupa X uređenog relacijom $\leq$, element $b \in X$ je *majoranta* skupa A ako je za svako $a \in A$, $a \leq b$. Ako je pritom $b \in A$, onda je b *maksimum* skupa A[10].

Definicija A.87 *Supremum* skupa $A \subset X$ (u oznaci $\sup A$) je minimum skupa majoranti skupa A. *Infimum* skupa $A \subset X$ (u oznaci $\inf A$) je maksimum skupa minoranti skupa A.

Teorema A.88 Svaki skup realnih brojeva koji ima konačnu majorantu (minorantu) ima supremum (infimum).

Definicija A.89 Skup $A \subset \mathbb{R}$ je *otvoren skup* ako za svako $x \in A$ postoji $\epsilon > 0$ tako da $\{y :\mid x - y \mid < \epsilon\} \subset A$. Skup $A \subset \mathbb{R}$ je *zatvoren skup* ako je $\mathbb{R} \setminus A$ otvoren skup.

Teorema A.90 Neka je F zatvoren skup u $\mathbb{R}$, ograničen sa desna (leva). Tada $\sup F$ ($\inf F$) pripada skupu F.

[10] *Minoranta* i *minimum* skupa se definišu analogno.

Dodatak B

U ovom dodatku opisane su verovatnosne logike čiji objekt jezici sadrže verovatnosne kvantifikatore i/ili verovatnosne operatore tako da je moguće neposredno izraziti rečenice koje govore o verovatnoći.

B.1 Verovatnosni kvantifikatori - verovatnoće nad domenima

Po svemu sudeći Jerome H. Keisler je prvi razmatrao strukture u kojima je verovatnoća definisana na domenu strukture prvog reda [62] i u kojima su u objekt jezik uvedeni kvantifikatori oblika

$$Px \geq r$$

tako da $(Px \geq r)\varphi(x)$ znači: verovatnoća skupa $\{x : \varphi(x)\}$ je veća do jednaka od r. Pri tome istinitosna vrednost formule je bilo tačno, bilo netačno, kao i u klasičnoj logici. Jedan od razloga proučavanja ovakve logike je razvoj sredstva za izražavanje matematičkih pojmova koji se javljaju u teoriji verovatnoće.

Verovatnosni kvantifikatori se koriste umesto klasičnih kvantifikatora $\forall x$ i $\exists x$ čije prisustvo bi onemogućilo da projekcije merljivih događaja budu u opštem slučaju merljive. Verovatnosni kvantifikatori oblika $Px > r$, $Px < r$, $Px \leq r$, $Px = r$, $Px \in [a,b]$, ... se definišu pomoću kvantifikatora $Px \geq r$. Recimo, $Px < r = \neg Px \geq r$.

U [55] Douglas Hoover je razrađujući Keisler-ove ideje dao niz značajnih rezultata od kojih ćemo neke navesti u daljem tekstu. Hoover je proučavao logike $L_{\omega P}$, $L_{\omega_1 P}$ i L_{AP}, gde je A prebrojiv dopustiv skup, koje su verovatnosne varijante redom klasične logike prvog reda $L_{\omega\omega}$ i beskonačnih logika $L_{\omega_1\omega}$ i L_A u kojima se umesto klasičnih koriste verovatnosni kvantifikatori.

Definicija B.1 *Verovatnosni model* je struktura $\langle \mathcal{U}, \mu_n \rangle_{n<\omega}$ gde su:

1. $\mathcal{U} = \langle U, R_i, f_j, c_k \rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$ je standardni model prvog reda,
2. za svako $n < \omega$, μ_n je σ-aditivna verovatnosna mera na U^n i niz mera $\langle \mu_n : n < \omega \rangle$ zadovoljava Fubini-jeve zahteve:
   (a) za sve m i n, μ_{m+n} je proširenje proizvoda mera μ_m i μ_n,
   (b) svaka mera μ_n je invarijantna u odnosu na permutacije koordinata argumenta,
   (c) ako je $S \in \text{dom}(\mu_{m+n})$, onda je za svako $b \in U^n$ skup $\{a : (a,b) \in S\} \in \text{dom}(\mu_m)$,
   (d) ako je $S \in \text{dom}(\mu_{m+n})$, onda je za svako $r \in \mathbb{R}$, $\{b : \mu_m\{a : (a,b) \in S\} > r\} \in \text{dom}(\mu_n)$,
   (e) ako je $S \in \text{dom}(\mu_{m+n})$, onda je
   $$\mu_{m+n}(S) = \int (\int_S \mu_m(dx))\mu_n(dy)$$
3. svaka atomska formula sa n slobodnih promenljivih je merljiva u odnosu na μ_n[1].

[1] Ovo ima za posledice da je jednakost μ_2-merljiva i da su svi jednočlani skupovi μ_1-merljivi.

Hoover daje aksiomatske sisteme za svoje logike za koje dokazuje teoremu potpunosti.

Teorema B.2 Ako je φ rečenica logike $L_{\omega P}$ $(L_{AP}, L_{\omega_1 P})$, tada je φ valjana ako i samo ako je dokaziva.

U dokazu ove teoreme koristi se postupak konstrukcije modela iz dva koraka. U prvom koraku se uglavnom standardnim sredstvima kompletiranja posmatranog skupa formula izgradi konačno-aditivni verovatnosni model u kome važe sve formule iz polaznog skupa formula. U drugom koraku se sredstvima razvijenim u nestandardnoj analizi (odeljak A.2) ovaj model prevodi u pravi verovatnosni model u kome takođe važe sve formule iz posmatranog skupa. Za logiku L_{AP} je pokazana Barwise-ova potpunost A.54 i kompaktnost A.55, kao i Robinson-ova konzistentnost A.56 za logiku $L_{\omega_1 P}$.

Razmatrana je i logika L_{HFP} u kojoj su dozvoljene samo konačne formule i verovatnosni kvantifikatori $Px \geq r$ za $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Interpretiranjem standardnog modela prirodnih brojeva u konačnoj teoriji ove logike, pokazano je da je klasa teorema logike Π^1_1 kompletna, te nije rekurzivno nabrojiva. U odgovarajućem aksiomatskom sistemu koristi se beskonačno pravilo izvođenja:

$$\text{Iz } \{\psi \to (Px \geq r)(Py \geq s - \frac{1}{n})\varphi : n \in \mathbb{N}\} \text{ izvesti } \psi \to (Px \geq r)(Py \geq s)\varphi. \tag{B.1}$$

Sledeći primeri ilustruju izražajnost logike $L_{\omega_1 P}$:

- 'postoji prebrojiv skup mere jedan' se izražava sa $(Px \leq 1)(Py > 0)x = y$
- 'svi jednočlani skupovi su mere 0' se izražava sa $(Px \leq 1)(Py > 1)x \neq y$
- ako je $\mu_n(\psi(x)) > 0$ onda $\mu_n(\varphi(x) \mid \psi(x)) = r$ ako i samo ako
$$\langle \mathcal{U}, \mu \rangle \models \wedge_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} [(Px \geq rq)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (Px \geq q)\psi(x)]$$
itd.

U [63] Keisler je razmatrao nove verovatnosne logike koje su pogodne za izražavanje osobina slučajnih promenljivih, izučavanje stohastičkih procesa itd. U logici $L_{A\int}$ se integralni operatori, slično Skolem-ovim funkcijama u klasičnoj logici, koriste za elimininaciju verovatnosnih kvantifikatora. U logici $L(\int)_A$ su umesto verovatnosnih kvantifikatora uvedeni kvantifikatori oblika $\int \ldots dx$ koji vezuju promenljivu x. U logici L_{AE} uveden je operator $E[\cdot \mid \cdot]$ kojim se izražava uslovno očekivanje slučajne promenljive. U [63] je dat spisak otvorenih problema od kojih su neki rešeni u radovima naših matematičara Miodraga Raškovića [90, 91, 93, 95, 98], Miodraga Raškovića i Radeta Živaljevića [92], Miodraga Raškovića i Predraga Tanovića [94], Miodraga Raškovića i Radosava Đorđevića [96, 97] i Radosava Đorđevića [22, 23, 24, 25]. U [103] je dat pregled rezultata u oblasti, a takođe je razmatrana i iskazna logika čiji jezik sadrži verovatnosne operatore.

B.1.1 Verovatnosni termi u logici

Fahiem Bacchus je u [4] predstavio logiku L_P i odgovarajuću klasu verovatnosnih modela u kojoj je verovatnoća takođe definisana nad domenom. Bacchus-ov cilj je bio razvoj logike za potrebe veštačke inteligencije, odakle proističu razlike u odnosu na opisane verovatnosne logike $L_{\omega P}$, L_{AP} i $L_{\omega_1 P}$ i njihove modele koje su rezultat kompromisa. Naime, velika složenost logika sa verovatnosnim kvantorima u kojima su verovatnoće realno vrednosne σ-aditivne funkcije [2, 55] uslovljava određene ustupke ako se želi postići kakva-takva računarski predstavljiva procedura dokazivanja.

Jezik logike L_P je dvosortni jezik prvog reda, pri čemu se prva sorta odnosi na uobičajene logičke simbole, takozvane objekt simbole, a druga na simbole koji se interpretiraju u polju brojeva[2], takozvane poljske simbole, među kojima su i simboli konstanti 1, 0 i -1, relacija $=$ i $\leq$, aritmetičkih operacija $+$, $-$ i $\times$ i zagrada [i]. Promenljive i simboli konstanti obe sorte su termi odgovarajuće

[2]Polje brojeva je totalno uređeno polje koje ima potpolje izomorfno polju racionalnih brojeva.

sorte. Primenom objekt, odnosno poljskih, funkcijskih simbola na odgovarajući broj terama iste te vrste dobijaju se složeniji termi. Atomske formule i formule se definišu standardno. Ako je α formula i $\vec{x}$ jedna n-torka promenljivih, onda je $[\alpha]_{\vec{x}}$ poljski term. Poljski term ovog oblika se naziva i verovatnosni term.

Definicija B.3 *Verovatnosni model* je struktura $\langle \mathcal{O}, \mathcal{F}, \{\Pi_n, \mu_n : n < \omega\}\rangle$ gde su:

1. $\mathcal{O}$ prebrojivi domen,
2. $\mathcal{F}$ totalno uređeno polje brojeva,
3. za svako $n < \omega$, Π_n je algebra podskupova od $\mathcal{O}^n$ koje sadrži svaki jednočlani element i sve podskupove definabilne formulama i
4. za svako $n < \omega$, μ_n je konačno aditivna verovatnosna funkcija koja preslikava Π_n u $\mathcal{F}$ tako da je ispunjeno:
   (a) za sve $A \in \mathcal{O}^m$ i $B \in \mathcal{O}^n$, $\mu_{m+n}(A \times B) = \mu_m(A) \times \mu_n(B)$ i
   (b) sve μ_n su invarijantne u odnosu na permutacije koordinata argumenta.

U definiciji vrednosti izraza (terama i formula obe sorte) suštinska novost se odnosi na verovatnosne terme. Ako je v valuacija promenljivih i I interpretacija funkcijskih i relacijskih simbola, a $\vec{x}$ i $\vec{d}$ n-torke objekt promenljivih, odnosno elemenata domena, onda je vrednost verovatnosnog terma pri interpretaciji I i valuaciji v:

- $I([\alpha]_{\vec{x}})_v = \mu_n(\{\vec{d} : I(\alpha)_{v[\vec{d}/\vec{x}]}\}) = \top$,

gde $v[\vec{d}/\vec{x}]$ označava valuaciju koja se sa v poklapa svuda, sem možda za $\vec{x}$, pri čemu je $v[\vec{d}/\vec{x}](\vec{x}) = \vec{d}$. Intuitivno, vrednost verovatnosnog terma je mera skupa elemenata domena za koje važi α pri interpretaciji I i valuaciji v.

Neke od posledica ovakvog pristupa su:

- Domeni L_P-modela su najviše prebrojivi. Zbog toga se klasični kvantifikatori mogu zadržati u formalnom jeziku, pa je logika L_P proširenje klasične logike.
- Skup valjanih formula je rekurzivno prebrojiv skup za koji je data konačna korektna i potpuna aksiomatizacija.
- Pošto su numeričke vrednosti verovatnosnih terama deo objekt jezika njima se može manipulisati na sintaksnom nivou u dokazima.
- Zatvorene formule uvek imaju verovatnoću 0 ili 1.
- Moguće je porediti verovatnoće formula, recimo sa
  $$[\text{mlad}(x)]_x > [\text{star}(x)]_x$$
  se tvrdi da ima više mladih nego starih osoba.
- Moguće je rezonovati o vrednostima verovatnoća kao elementima objekt jezika, recimo
  $$(\forall r)(\forall s)((r \geq s) \rightarrow (([\alpha(x)]_x \geq r) \rightarrow ([\alpha(x)]_x \geq s))).$$

Poslednje dve stavke su bez sumnje praktične za primene u programima veštačke inteligencije.

B.2 Verovatnosni operatori - verovatnoće nad mogućim svetovima

Nils Nilsson je u [78, 79] razmatrao osnove verovatnosnog rezonovanja koje se koristi u veštačkoj inteligenciji. Nilsson se nije bavio logičkim aspektom problema, tj. nije ni pokušao da da nekakav aksiomatski sistem, dokaže teoremu potpunosti i sl. Njegov cilj je bio da opiše metodu kojom se verovatnoća, odnosnosno interval u kome se nalazi verovatnoća, neke rečenice izračunava na osnovu verovatnoća drugih rečenica i da na taj način da kriterijum za opravdavanje (odnosno kritiku) postupaka koji se koriste u programima veštačke inteligencije. Ipak, Nilsson-ov rad je bitan u kontekstu problematike koja se ovde razmatra iz najmanje dva razloga. Prvo, taj rad je doveo do velikog porasta interesovanja za probleme formalnog rezonovanja o verovatnoći koje do tada nije prevazilazilo relativno uzak krug istraživača u matematičkoj logici i drugo, rad je direktno inspirisao proučavanje jedne klase logika kojima pripadaju i logike prikazane u ovom tekstu.

Ukratko, Nillson posmatra skup $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ od l rečenica i skup $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ interpretacija koje se međusobno razlikuju u istinitosnoj vrednosti bar jedne od rečenica. Preciznije, svaki svet predstavlja jednu klasu interpretacija koje se poklapaju na rečenicama iz S. Verovatnoća je definisana nad skupom svetova, pri čemu p_i označava verovatnoću sveta w_i uz jasna ograničenja da je $p_i \geq 0$ za svako $i = 1, k$ i da je $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Sada je verovatnoća rečenice α_j zbir verovatnoća svetova u kojima α_j važi. Ovo se može zapisati i matričnom jednačinom

$$\Pi = V \cdot P$$

gde su:

- Π vektor, tako da je Π_i verovatnoća skupa svetova u kojima važi formula α_i,
- V matrica za koju je $v_{i,j} = 1$ ako formula α_i važi u svetu w_j i
- P vektor verovatnoća svetova.

Metod koji je Nilsson predložio se zasniva na sledećem. Ako je dat skup formula, njemu se dodaje još jedna formula i analizom matrične jednačine se određuju granice intervala verovatnoće nove formule. Recimo, neka je skupu formula $\{\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2\}$ dodata formula α_2. Tada je $l = 3$, $S = \{\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2, \alpha_2\}$, $k = 4$, $w_1 \models \{\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2, \alpha_2\}$, $w_2 \models \{\alpha_1, \neg(\alpha_1 \to \alpha_2), \neg\alpha_2\}$, $w_3 \models \{\neg\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2, \alpha_2\}$ i $w_4 \models \{\neg\alpha_1, \alpha_1 \to \alpha_2, \neg\alpha_2\}$. Neka je dalje $P(\alpha_1)$ verovatnoća skupa svetova $\{w_1, w_2\}$ u kojima važi α_1, $P(\alpha_2)$ verovatnoća skupa svetova $\{w_1, w_3\}$ u kojima važi α_2 i $P(\alpha_1 \to \alpha_2)$ verovatnoća skupa svetova $\{w_1, w_3, w_4\}$ u kojima važi $\alpha_1 \to \alpha_2$. Tada je $P(\alpha_2) \leq P(\alpha_1 \to \alpha_2)$. Analizom matrične jednačine se zaključuje da mora biti $P(\alpha_1) + P(\alpha_1 \to \alpha_2) - 1 \leq P(\alpha_2)$ odakle se dobija nejednakost

$$P(\alpha_1) + P(\alpha_1 \to \alpha_2) - 1 \leq P(\alpha_2) \leq P(\alpha_1 \to \alpha_2)$$

koja se shvata kao pravilo verovatnosnog modus ponensa za izračunavanje intervala u kome se nalazi verovatnoća formule α_2 ako su poznate verovatnoće preostale dve formule.

Aksiomatizovanjem verovatnosnog rezonovanja se nezavisno bavilo više autora od kojih neki po svemu sudeći i nisu znali za Nilsson-ov rad. Sam Nilsson nije predložio formalni jezik, ni precizno opisao odgovarajuću klasu modela. Ipak postojanje mogućih svetova koji podsećaju na modalne modele [66, 68, 69] uticalo je da se verovatnoća razmatra u formi operatora, poput modalnih operatora $\Box$ i $\Diamond$.

Hronološki, Ron Fagin, Joseph Halpern i Nimrod Megiddo su prvi prikazali logike za eksplicitno rezonovanje o verovatnoći [29, 30]. Primer rečenice koja se može iskazati je 'Ako je verovatnoća od α bar 0.5 i ako β sledi iz α sa verovatnoćom 0.8, tada je verovatnoća od β manja od 0.9.' Pri tome su α i β klasične iskazne formule. Formalni jezik je proširenje klasičnog iskaznog jezika. Ako je α klasična iskazna formula, $w(\alpha)$ je osnovni težinski term[3] koji se intuitivno interpretira kao

[3] Termin *težinski* je prevod originalnog termina koji se upotrebljava u [30]. Utisak nam je da je termin *verovatnosni* pogodniji, pa ćemo njega koristiti nakon prikaza ovog rada i radova istih autora u kojima se koristi slična terminologija.

verovatnoća od α. Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ klasične iskazne formule i $a_1, \ldots, a_k$ i c celi brojevi[4], onda je $a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k)$ težinski term, dok je $a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$ osnovna težinska formula. Težinska formula se dobija iz osnovnih težinskih formula pomoću klasičnih veznika. U logici su prisutna dva nivoa razmatranja - klasični i verovatnosni:

- verovatnoće se razmatraju samo nad iskaznim formulama, odnosno iskazi poput 'verovatnoća da je verovatnoća', tj. iteracije verovatnoća nisu dozvoljeni i
- nije dozvoljeno mešanje klasičnih i verovatnosnih formula, tj. nisu dozvoljene formule poput $\alpha \wedge w(\alpha) \geq c$.

Težinske formula oblika $t < c$, $t \leq c$, $t > c$ i $t = c$, gde je t težinski term, predstavljaju skraćene zapise, recimo $t < c$ je skraćeni zapis formule $\neg(t \geq c)$ itd.

Definicija B.4 *Verovatnosni model* je struktura oblika $M = \langle S, H, \mu, \pi \rangle$ gde su:

- S skup svetova,
- H σ-algebra podskupova skupa S,
- μ σ-aditivna verovatnoća i
- π preslikavanje koje svakom svetu $s \in S$ pridružuje iskaznu valuaciju $\pi(s)$.

Kao što se vidi u modelu postoji samo jedna verovatnoća koja skupove svetova meri na nivou celog modela. Svetovi modela se mogu shvatiti i kao iskazne interpretacije, tako da se važenje iskaznih formula u svetovima definiše na standardan način. Ako se za iskaznu formulu α sa $[\alpha]_M$ označi skup svetova modela M u kome važi α i ako se relacija 'važiti u modelu' označi sa $\models$, onda

$$M \models a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c \text{ ako i samo ako } \sum_{i=1}^{k} a_i \mu([\alpha_i]_M) \geq c$$

odnosno osnovna težinska formula $a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$ važi u modelu ako i samo ako je suma mera skupova svetova u kojima važe formule α_i pomnoženih odgovarajućim koeficijentima a_i veća do jednaka od c. Na ovom mestu se pravi podela modela na

- merljive i
- nemerljive.

U prvoj klasi se nalaze modeli u kojima je svaki skup $[\alpha]_M$ merljiv, odnosno u kojima su svi skupovi svetova definabilni iskaznim formulama merljivi, dok u modelima druge klase to ne mora biti slučaj. Za nemerljivi model $\langle S, H, \mu, \pi \rangle$ se zatim razmatra unutrašnja verovatnoća μ_* indukovana verovatnoćom μ (definicija A.17) tako da

$$M \models a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c \text{ ako i samo ako } \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_*([\alpha_i]_M) \geq c.$$

Važenje težinskih formula se definiše na standardni način: $M \models \neg A$ ako i samo ako $M \not\models A$ itd.

Za obe klase modela je data korektna i kompletna aksiomatizacija. Ovde ćemo detaljnije razmotriti merljivi slučaj zbog sličnosti sa pristupom opisanim u sledećim poglavljima. Autori su najpre pokušali da daju aksiomatizaciju za logiku u kojoj su prisutni samo osnovni težinski termi, odnosno

[4] U [29] koeficijenti su realni brojevi.

u kojoj su formule oblika $aw(\alpha) \geq c$, ali u tome nisu uspeli. Razlog za to je, verovatno, njihov pokušaj da daju konačnu aksiomatizaciju[5] ovakve logike. Tu se, međutim javlja sledeći problem. Posmatrajmo skup formula

$$\{nw(\alpha) < 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg(w(\alpha) = 0)\}.$$

Nije teško uočiti da je svaki konačan podskup ovog skupa zadovoljiv, dok ceo skup to nije. Odatle, teorema kompaktnosti (teorema A.63) ne važi. Ovo za posledicu ima da nije moguće dati aksiomatski sistem za koji važi teorema A.61 jake potpunosti, pošto bi kompaktnost onda sledila kao posledica. Dakle, eventualno je moguće dati konačnu aksiomatizaciju za koju se može dokazati slaba potpunost (teorema A.62). Sada se javlja novi problem, a to je kako definisati kanonski verovatnosni model, gde pre svega problem predstavlja definisanje verovatnoće. Fagin, Halpern i Megiddo su ovaj problem rešili uvođenjem težinskih terama u jezik, odnosno na nivou aksiomatizacije uključivanjem aksioma za rezonovanje o lineranim nejednačinama. Preciznije, aksiomatski sistem se sastoji iz tri grupe aksioma:

1. Sve instance iskaznih tautologija.

2. Sve instance valjanih formula o lineranim nejednačinama.

3. Shema aksiome za rezonovanje o verovatnoći:

   (a) $w(\alpha) \geq 0$

   (b) $w(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$

   (c) $w(\alpha \wedge \beta) + w(\alpha \wedge \neg\beta) = w(\alpha)$

   (d) $w(\alpha) = w(\beta)$ ako je $\alpha \leftrightarrow \beta$ iskazna tautologija

Teorema B.5 (Slaba potpunost) Svaka konzistentna težinska formula ima merljivi model.

Dokaz. U dokazu potpunosti se koristi sledeći metod. Neka se posmatra konzistentna težinska formula A. Bez gubitka opštosti, može se pretpostaviti da je A konjunkcija osnovnih težinskih formula. Neka su $\{p_1, \ldots, p_n\}$ sva iskazna slova u nekoj iskaznoj formuli α. Atom je konjunkcija oblika $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$, gde $\pm p_i$ označava bilo iskazno slovo, bilo njegovu negaciju. Sa $At(\alpha)$ označimo skup svih atoma δ takvih da je $\delta \to \alpha$ iskazna tautologija. Tada je dokazivo

$$w(\alpha) = \sum_{\delta \in At(\alpha)} w(\delta).$$

Primetimo da za neku iskaznu formulu α atomi, slično postupku Nilsson-a, predstavljaju opise skupova mogućih svetova čije mere utiču na meru formule α. Upravo ta činjenica se koristi u nastavku dokaza. Pokazuje se da je formula A ekvivalentna formuli A' u kojoj su svi termovi zamenjeni termovima oblika $a_1 w(\delta_1) + \ldots a_{2^n} w(\delta_{2^n})$ gde su $\{p_1, \ldots, p_n\}$ sva iskazna slova iz A i $\{\delta_1, \ldots \delta_{2^n}\}$ odgovarajući atomi. Neka je formula A'' dobijena dodavanjem formuli A' konjunkata oblika $w(\delta_j) \geq 0$ za $j = 1, 2^n$ i $w(\delta_1) + \ldots w(\delta_{2^n}) = 1$ koji redom znače da je verovatnoća nenegativna i da je mera skupa

[5] Pod konačnom aksiomatizacijom se podrazumeva da su formule i dokazi konačni.

svih svetova jednaka 1. Sada je A'' konjunkcija sledećih $1 + 2^n + r + s$ formula:

$$\begin{array}{rcl} w(\delta_1) + \ldots w(\delta_{2^n}) & = & 1 \\ w(\delta_1) & \geq & 0 \\ & \ldots & \\ w(\delta_{2^n}) & \geq & 0 \\ a_{1,1}w(\delta_1) + \ldots a_{1,2^n}w(\delta_{2^n}) & \geq & c_1 \\ & \ldots & \\ a_{r,1}w(\delta_1) + \ldots a_{r,2^n}w(\delta_{2^n}) & \geq & c_r \\ b_{1,1}w(\delta_1) + \ldots b_{1,2^n}w(\delta_{2^n}) & < & d_1 \\ & \ldots & \\ b_{s,1}w(\delta_1) + \ldots b_{s,2^n}w(\delta_{2^n}) & < & d_s \end{array} \tag{B.2}$$

gde su $a_{i,j}$ i $b_{i,j}$ neki celi brojevi. Zamenom $w(\delta_j)$ nepoznatom x_j ovom skupu formula pridružuje se sistem linearnih jednačina i nejednačina koji je zadovoljiv ako i samo ako je formula A'' zadovoljiva. Ako sistem ne bi imao rešenje, formula A'' bi bila nezadovoljiva, pa bi formula $\neg A''$ bila instanca neke valjane formule o linearnim nejednačinama. Pošto je dokazivo da je $A \leftrightarrow A''$, to bi značilo da je $\neg A$ dokazivo, odakle suprotno pretpostavci formula A ne bi bila konzistentna. ∎

Koristeći teoreme A.84 i A.85, na osnovu dokaza teoreme B.5 se lako izvode sledeće teoreme.

Teorema B.6 Neka je A težinska formula i $| A |$ broj simbola potrebnih za zapisivanje formule A. Ako je A zadovoljiva, onda je zadovoljiva u nekom modelu sa najviše $| A |$ svetova.

Dokaz. Prema teoremi A.84, sistem koji odgovara skupu formula B.2 ima rešenje sa najviše $r+s+1$ nenegativnom koordinatom koje odgovaraju nenultim merama svetova. Kako svetovi mere nula ne utiču na težinske formule i kako je $r + s + 1 \leq | A |$, to je svaka zadovoljiva formula zadovoljiva i u takozvanom malom modelu sa ne više od $| A |$ svetova. ∎

Teorema B.7 Problem zadovoljivosti za klasu merljivih verovatnosnih modela je NP-kompletan.

Dokaz. Pošto je iskazna formula α zadovoljiva ako i samo ako je $w(\alpha) > 0$ zadovoljivo, problem zadovoljivosti za merljive verovatnosne modele je bar NP. Na osnovu teorema A.84 i A.85 nedeterministički se bira jedan mali model u kome su veličine zapisa verovatnoća svetova ograničene i u kome se ispitivanje zadovoljivosti formule izvodi u polinomijalnom vremenu. Odatle je problem NP-kompletan. ∎

Fagin, Halpern i Megiddo slična tvrđenja dokazuju i za klasu nemerljivih modela. U završnom delu rada [30] uvode i težinske formule prvog reda u kojima je dozvoljeno

- množenje osnovnih težinskih terama,
- pojava izraza na jeziku $\{+, \cdot, 0, 1\}$ koji sadrže promenljive na mestima koeficijenata težinskih terama i
- kvantifikovanje takvih promenljivih.

Ovakav jezik je pogodan za formalizaciju uslovnih verovatnoća. Recimo, formulom

$$2w(p_1 \wedge p_2)w(p_2) + 2w(p_1 \wedge p_2)w(p_1) \geq w(p_1)w(p_2)$$

se zapisuje da je $2P(p_2 \mid p_1) + P(p_1 \mid p_2) \geq 1$. Potpuni aksiomatski sistem se dobija kada se na opisani sistem dodaju aksiome realno zatvorenih polja [117]. Složenost problema zadovoljivosti pripada klasi EXPSPACE.

Rezimirajmo probleme koji proističu iz opisanog pristupa:

- dokazuje se samo slaba potpunost askiomatskog sistema u odnosu na klasu merljivih modela,
- u dokazu je od suštinskog značaja upotreba aksioma za rezonovanje o lineranim jednačinama i nejednačinama i
- u dokazu je od suštinskog značaja upotreba atoma koji se mogu koristiti samo u iskaznom slučaju.

Odatle se ovaj postupak ne može koristiti za dokazivanje jake potpunosti, potpunosti logike u kojoj nema zbirova osnovnih težinskih terama, ni u slučaju kada je polazna klasična logika - logika prvog reda.

U [31] Fagin i Halpern razmatraju iskaznu logiku u kojoj su dozvoljene:

- iteracije verovatnonoće, odnosno verovatnoće višeg reda,
- mešanje iskaznih i težinskih formula i
- upotreba modalnog operatora $\Box_i$[6] koji se interpretira kao operator znanja agenta i, gde $i = 1, n$.

Tako se može pisati $w(w(\alpha) \geq c_1) \geq c_2$, što se interpretira kao 'verovatnoća da je verovatnoća od α bar c_1 je veća do jednaka od c_2', odnosno kao mera kvaliteta "obične" verovatnoće.

Definicija B.8 *Verovatnosni model* je struktura oblika $M = \langle S, \pi, K_1, \dots, K_n, P\rangle$ gde su:

- S skup svetova,
- π preslikavanje koje svakom svetu $s \in S$ pridružuje iskaznu valuaciju $\pi(s)$,
- K_i, $i = 1, n$, su relacije ekvivalencije nad S i
- P je preslikavanje koje svakom $i = 1, n$ i svakom svetu $s \in S$ pridružuje σ-aditivni verovatnosni prostor $P(i, s) = \langle S_{i,s}, H_{i,s}, \mu_{i,s}\rangle$.

Relacija zadovoljenja je sada relacija između svetova modela i formula, a ne između modela i formula kao u [29, 30]. Neki od slučajeva su ($s \in S$):

- $M, s \models w_i(\alpha) \geq c$ ako i samo ako $\mu_{i,s}(\{w \in S_{i,s} : M, w \models \alpha\}) \geq c$,
- $M, s \models \Box_i\alpha \geq c$ ako i samo ako $(\forall w \in S_{i,s})M, w \models \alpha$ itd.

Aksiomatski sistem se dobija kada se na prethodno opisani sistem za logiku bez iteracija verovatnoće dodaju *S5* aksiome za operatore $\Box_i$ imajući u vidu promenu pravila formiranja formula koja sada dozvoljavaju iteraciju verovatnoća. Dokaz slabe potpunosti se sprovodi analogno postupku iz [29, 30]. Jedinu razliku predstavlja činjenica da se u atomima pojavljuju i potformule polazne formule, a ne samo iskazna slova. Ovo utiče na povećanje složenosti logike. U slučaju da je ispunjen prirodni uslov da je za sve $i = 1, n$ i sve $s \in S$, $S_{i,s} \subset \{w \in S : sK_iw\}$, odnosno da agent i sve svetove koje meri shvata kao dostižne, složenost problema ispitivanja valjanosti je $EXPTIME$.

Martin Abadi i Joseph Halpern su u [1, 2, 47] analizirali verovatnosne logike prvog reda i to logike:

- tipa 1 - sa verovatnoćom definisanom nad domenom,
- tipa 2 - sa verovatnoćom definisane na mogućim svetovima i
- tipa 3 - sa jednim i drugim tipom verovatnoća.

[6] U radu se koristi oznaka K_i.

Jezik ovih logika je kombinacija jezika verovatnosnih formula prvog reda iz [30] u kojima su osnovne formule predikatske formule prvog reda i dozvoljene iteracije verovatnoća i jezika koji koristi Bacchus u [4]. Primeri formula koje su redom izrazive u logikama tipa 1, odnosno tipa 2, su:

$[\text{leti}(x)]_x \geq 0.3$

$(\forall x)(x \leq 0.8 \rightarrow \text{mlad}(c) \geq x)$

koje se shvataju kao 'mera skupa objekata koji lete je bar 0.3', odnosno 'za svaki x manji do jednak 0.8, verovatnoća da c leti je bar x'. Modeli tipa 1 su slični modelima iz [4]. Modeli tipa 2 su strukture oblika $\langle D, S, \pi, \mu \rangle$, gde je D domen, S skup svetova, π interpretacija i μ diskretna σ-aditivna verovatnoća definisana nad mogućim svetovima. Pokazano je da je složenost ovih logika jako velika:

- Ako jezik logike tipa 1 sadrži jednakost i bar jedan predikatski simbol, onda je problem valjanosti Π^1_∞ kompletan.

- Problem valjanosti za logike tipa 2 je bar Π^2_1 kompletan.

Skup valjanih formula, čak i za veoma male fragmente ovih logika poput logike tipa 2 čiji jezik sadrži bar jedan predikatski simbol arnosti bar jedan, nije rekurzivno prebrojiv. Problem aksiomatizacije ovih logika se, kao što smo već istakli, ne može rešiti sredstvima opisanim u radovima ove grupe autora [29, 30, 31, 47]. U [47] su date korektne i nepotpune aksiomatizacije za sva tri tipa logika. Za unarnu logiku tipa 1 pokazano je da je odlučiva i data je konačna aksiomatizacija. Pod pretpostavkom da je za neki fiksirani $n \in \mathbb{N}$ veličina domena modela ograničena sa n, date se korektne i kompletne aksiomatizacije i pokazana je odlučivost, što ne predstavlja veliko iznenađenje pošto se ove logike jednostavno svode na iskazne logike. Međutim, za domene koji su konačni, ali ne i ograničeni fiksiranom konstantom, problem valjanosti nije rekurzivno prebrojiv.

Fattarosi-Barnaba i Amati u [28], Wiebe van der Hoek u [53, 54] i Miodrag Rašković u [98] su proučavali verovatnosne logike u kojima je verovatnoća konačno aditivna i konačno vrednosna sa unapred fiksiranim kodomenom. Preciznije, svaki konačni kodomen verovatnoće proizvodi posebnu logiku. U [28, 53, 54] logika sa fiksiranim kodomenom verovatnoće F se označava sa $P_F D$. Verovatnosni modeli su definisani kao i u [31] uz već spomenuto ograničenje za kodomene verovatnoća. Zbog konačnosti kodomena u ovim logikama važi teorema kompaktnosti, tako da je ostvarljiva konačna aksiomatizacija za koju važi jaka potpunost, što se u spomenutim radovima i dokazuje. U smislu podele klasa modela iz [30] ovde se radi sa merljivim modelima. U formalnom jeziku verovatnoća se javlja u vidu operatora M_r i L_r u [28], odnosno $P_0^>$ u [53, 54] za $r \in [0,1]$. Pri tome se M_r i $P_0^>$ interpretiraju kao 'sa verovatnoćom većom od r', a L_r kao 'sa verovatnoćom većom ili jednakom sa $1-r$'.

U [28, 53, 54] naglasak je stavljen na verovatnosnu interpretaciju iskaznih modalnih sistema, tako da se modalni operator $\Diamond$ interpretira kao 'sa verovatnoćom većom od 0', gde je verovatnoća definisana nad skupom mogućih svetova. To za posledicu ima da svi merljivi neprazni skupovi imaju meru veću od 0 i da se modalni operator $\Box$ interpretira kao 'sa verovatnoćom 1'. U [54] je pokazano da za proizvoljnu modalnu formulu α i njen verovatnosni zapis $\alpha^\#$ važi

$$D \vdash \alpha \text{ ako i samo ako } P_F D \vdash \alpha^\#.$$

Po uzoru na modalne logike koriste se iteracije verovatnosnih operatora i mešanje verovatnosnih i klasičnih formula. U [98] su prikazane i iskazna verovatnosna logika LP i predikatska verovatnosna logika prvog reda LPP u kojima, kao i u [30] nisu dozvoljena iteracije verovatnosih operatora i mešanje verovatnosnih i klasičnih iskaznih formula. U jeziku se javljaju verovatnosni operatori oblika P_r za svaki r iz fiksiranog kodomena verovatnoće. P_r se interpretira kao 'sa verovatnoćom većom do jednakom sa r'. Date su aksiomatizacije za koje je dokazana jaka potpunost. Pokazana je odlučivost iskazne logike.

U aksiomatizacijama logika $P_F D$, LP i LPP postoji aksioma koja garantuje da su kodomeni verovatnoća konačni i jednaki unapred fiksiranom skupu $F = \{0 = r_0, r_1, \ldots, r_n = 1\} \subset [0,1]$. Ovde dajemo aksiomu u formi u kojoj se javlja u [53]:

$$P_{r_i}^{>}\alpha \to P_{r_{i+1}}^{\geq}\alpha, \text{ za } r_i, r_{i+1} \in F. \tag{B.3}$$

Aksioma se može interpretirati na sledeći način. Ako je verovatnoća od α veća od r_i onda je bar jednaka prvom sledećem članu kodomena F. Za razliku od aksiomatizacija u [29, 30, 31] ovde se ne koriste aksiome za rezonovanje o lineranim jednačinama i nejednačinama.

U [28, 53, 54] se priznaje da je ograničenje razmatranja na verovatnoće sa fiksiranim konačnim kodomenom kompromis u prevazilaženju problema koji nastaju zbog nevaženja kompaktnosti za logike sa realnovrednosnim verovatnoćama. U logici $P_F D$ se može rezonovati o proizvoljnim verovatnoćama (u indeksu operatora je proizvoljan realni broj iz $[0,1]$). Sa druge strane, i pored ovakvog ograničenja izražajnost logike $P_F D$ je još uvek značajna. Ako je $F = \{0,1\}$ dobija se obična modalna logika. Logika $P_F D$ je pogodna za modeliranje fazi istinitosnih vrednosti. Recimo, ako je $F = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \ldots, \frac{7}{8}, 1\}$ modeliraju se: nemoguće, sa izrazito malom šansom, sa veoma malom šansom, sa malom šansom, može biti, sa razumnom šansom, veoma moguće, sa izrazito velikom šansom i izvesno. U logici $P_F D$ je moguće direktno prikazati težinske formule iz [30]. Recimo formula $a_1 w(\alpha_1) + \ldots + a_k w(\alpha_k) \geq c$ se reprezentuje $P_F D$-formulom

$$\bigwedge_{(r_1,\ldots,r_k)\in F^{k-1}} (P^{=}_{a_1 r_1}\alpha_1 \wedge \ldots \wedge P^{=}_{a_{k-1} r_{k-1}}\alpha_{k-1}) \to P^{\geq}_{\frac{c-(a_1 r_1 + \ldots + a_{k-1} r_{k-1})}{a_k}}\alpha_k.$$

Branislav Boričić i Miodrag Rašković su u [11, 12] razmatrali proširenje Heyting-ove intuicionističke logike verovatnosnim aksiomama. Posmatrane su dve familije verovatnosnih funkcija sa fiksiranim konačnim domenom F. Svakom svetu intuicionističkog modela pridružena je po jedna funkcija iz obe familije, tako da prva funkcija odgovara unutrašnjoj, a druga spoljnoj verovatnoći. U skladu sa shvatanjem da intucionstički modeli prikazuju narastanje znanja, prilikom penjanja po modelu ove dve funkcije se približavaju. Na sintaksnom nivou verovatnosnim funkcijama odgovaraju dve liste verovatnosnih operatora π_r i π^r za $r \in F$ koje se interpretiraju kao 'sa unutrašnjom verovatnoćom većom do jednakom sa r', odnosno 'sa spoljnom verovatnoćom manjom do jednakom sa r'. U radu je data korektna i potpuna aksiomatizacija, a opisani su i odgovarajući algebarski modeli.

U [34] Alan Frish i Peter Haddaway su prikazali korektan, ali nepotpun deduktivni sistem za iskazno verovatnosno rezonovanje inspirisano Nilsson-ovim radom [78, 79]. Frish-ov i Haddaway-ev pristup je zasnovan na skupu od 32 pravila izvođenja nad uslovnim verovatnoćama, od kojih je jedno:

iz $P(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [x,y]$ izvesti $P(\alpha \mid \delta) \in [0,y]$.

U dedukciji se dobijaju intervali koji su, kako se u postupku napreduje, sve bliži intervalu koji predstavlja najbolju moguću ocenu intervala u kome se nalazi verovatnoća zaključka. Pošto se zaključivanje može zaustaviti u bilo kom trenutku, manja preciznost dobijenog odgovora može biti cena za manju složenost izračunavanja. Predloženi sistem je korektan, a potpunost je dokazana za neke uže klase problema, recimo za određivanje verovatnoće atomske formule na osnovu konačnog skupa formula oblika $P(\alpha \to \beta) \in [1,1]$ i $P(\alpha) \in [a,b]$.

Literatura

[1] Abadi, Martin, Halpern, Joseph Y., Decidability and expressivness for first-order logics of probability, Proceedings of 30th IEEE Symposium on foundations if computer science, 148 – 153, 1989. 1 – 36, 1994.

[2] Abadi, Martin, Halpern, Joseph Y., Decidability and expressivness for first-order logics of probability, Information and computation, 112, 1 – 36, 1994.

[3] Aljančić, Slobodan, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

[4] Bacchus, Fahiem, L_P, A logic for representing and reasoning with statistical knowledge, Computational intelligence, vol. 6, 209 – 231, 1990.

[5] Ben-Ari, Mordechai, Pnueli, Amir, Manna, Zohar, The temporal logic of branching time, Acta informatica, no. 20, 207 – 226, 1983.

[6] van Benthem, J. F. A. K., The logic of time, D. Reidel Publishing Comp., 1983.

[7] Bhaskara Rao, K. P. S., Bhaskara Rao, M., Theory of charges: A study of finitely additive measures, Academic Press, 1983.

[8] Blackburn, Patrick, de Rijke, Maarten, Venema, Yve, Computability and complexity in modal logic, poglavlje 6 knjige Modal logic, u pripremi.

[9] Boole, George, An investigation of the laws of thought, on which are founded mathematical theories of logic and probability (Laws of thought), Wakton and Maberley, London, 1854.

[10] Boolos, G. S., Jeffrey, R. C., Computability and logic, Cambridge University Press, 1974.

[11] Boričić, Branislav, A note on probabilistic validity measure in propositional calculi, Journal of the IGPL, vol. 3, no. 5, 721 – 724, 1995.

[12] Boričić, Branislav, Rašković, Miodrag, A probabilistic validity measure in intuitionistic propositional logic, Mathematica Balkanica, n.s. vol. 10, fasc. 4, 365 – 372, 1996.

[13] Burgess, John P., Logic and time, The journal of symbolic logic, vol. 44, no. 4, 566 – 582, 1979.

[14] Burgess, John P., Basic tense logic, poglavlje 3 u knjizi Handbook of philosophical logic, vol II, editori Gabbay, D., Guenthner, F., 89 – 133, D. Reidel Publishing Comp., 1984.

[15] Carnap, Rudolf, Logical foundations of probability, The University of Chicago Press, 1950.

[16] Carnap, Rudolf, Logical continuum of inductive methods, The University of Chicago Press, 1952.

[17] Cendrowska J., Bramer M., Inside an expert system: a rational reconstruction of the MYCIN consultation system, poglavlje 15 u knjizi Artificial intelligence, tools, techniques and applications, editori O'Shea T. i Eisenstadt M., Haper and Row, 1984.

[18] Chang, C. C., Keisler, Jerome H., Model theory, Studies in logic and the foundation of mathematics, vol. 73, North-Holland, 1977.

[19] Cross, C. B., From worlds to probabilities: a probabilistic semantics for modal logics, Journal of Philosophical Logic, 2, 169 – 192, 1993.

[20] Cutland, Nigel J., Computability: an introduction to recursive function theory, Cambridge university press, 1986.

[21] Cvetković, Dragan, The logic of preference and decision supporting systems, magistarska teza, MPI-I-93-260, Max Planck institut für informatik, Saarbrücken, 1993.

[22] Đorđević, Radosav, Barwise completeness theorems for logics with integrals, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 49, 1 – 5, 1991.

[23] Đorđević, Radosav, Analitic completeness theorem for absolutely continuous biprobability models, Z. Math. Logik Grundlag. Math., 38, 241 – 246, 1992.

[24] Đorđević, Radosav, Logics with two types of integral operators, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 54, 18 – 24, 1993.

[25] Đorđević, Radosav, Analitic completeness theorem for singular biprobability models, Math. Logic Quat., 39, 228 – 230, 1993.

[26] Dubois, Didier, Prade, Henri, What does fuzzy logic bring to AI?, ACM Computing surveys, vol. 27, nr. 3, 1995.

[27] Encyclopedic dictionary of mathematics, editori Iyanaga, Shocichi, Kawada, Yukiyosi, MIT Press, 1968.

[28] Fattarosi-Barnaba, M., Amati, G., Modal operators with probabilistic interpretations, I, Studia logica, 4, 383 – 393, 1989.

[29] Fagin, Ron, Halpern, Joseph Y., Megiddo, Nimrod, A logic for reasoning about probabilities, Proceedings of the 3rd IEEE Symposium on logic in computer science, 277 – 291, 1988.

[30] Fagin, Ron, Halpern, Joseph Y., Megiddo, Nimrod, A logic for reasoning about probabilities, Information and computation 87, 78 – 128, 1990.

[31] Fagin, Ron, Halpern, Joseph Y., Reasoning about knowledge and probability, Journal of the ACM, vol. 41, no 2, 340 – 367, 1994.

[32] Feldman, Yishai A., A decidable propositional dynamic logic with explicit probabilities, Information and Control, 63, 11 – 38, 1984.

[33] Fitting, Melvin, Basic modal logic, u: Handbook of logic in artificaial intelligence and logic programming vol. 1, Logical foundations, editori: Gabbay, D. M, Hogger, C. J., Robinson, J. A., Clarendon Press, Oxford, 1996.

[34] Frish, Alan M., Haddaway, Peter, Anytime deduction for probabilistic logic, Artificial intelligence 69, 93 – 122, 1994.

[35] Gabbay, Dov M., Decidability results in non-classical logics, Annals of mathematical logic, 8, 237 – 295, 1975.

[36] Gabbay, Dov M., Hodkinson, I. M., An axiomatization of the temporal logic with until and since over the real numbers, Journal of logic and computation, vol 1, no. 2, 229 – 259, 1990.

[37] Gaifman, Haim, Concerning measures in first order calculi, Israel journal of mathematics, vol. 2, no. 1, 1–18, 1964.

[38] Gaifman, Haim, Snir, Marc, Probabilities over rich languages, testing and randomness, The journal of symbolic logic, vol. 47, no. 3, 495–548, 1982.

[39] Gaifman, Haim, A theory of higher order probabilities, u knjizi Theoretical aspects of reasoning about knowledge, editor Halper, J. Y., 275 – 292, Morgan Kaufman, 1986.

[40] Garson, James W., Quantification in modal logic, poglavlje 5 u knjizi Handbook of philosophical logic, vol II, editori Gabbay, D., Guenthner, F., 249 – 307, D. Reidel Publishing Comp., 1984.

[41] Gnedenko, B. V., Kurs teorii verojathostei, Nauka, Moskva, 1988.

[42] Haddaway, Peter, Frish, Alan M., Modal logics of higher order probability, u: Uncertainty in artificial intelligence 4, editori Shachter, Levitt, Lemmer, Kanal, 133 – 148, Elsevier, 1990.

[43] Haddaway, Peter, A logic of time, chance, and action for representing plans, Artificial intelligence 80, 243 – 308, 1996.

[44] Haddaway, Peter, Believing change and changing belief, u Special issue IEEE System, Man, and Cybernetics on higer-order probability, 1996.

[45] Hailperin, Theodore, Boole's logic and probability: a critical exposition from the standpoint of contemporary algebra, logic and probability theory, North-Holland, 1976.

[46] Halmos, Paul R., Measure theory, Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[47] Halpern, Joseph Y., Knowledge, belief and certainty, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 4, 301 – 322, 1991.

[48] Halpern, Joseph Y., An analysis of first-order logics of probability, Artificial intelligence 46, 311 – 350, 1990.

[49] The Harper encyclopedia of science, editor Wyckoff, Jerome, Harper & Row, 1963.

[50] Hart, Sergiu, Sharir, Micha, Probabilistic temporal logics for finite and bounded models, Proceedings of XVI annual ACM symposium on theory of computing, Washington, D.C., 1 – 13, 1984

[51] Helmer, Olaf, Oppenheim, Paul, A syntactical definition of probbaility and of degree of confirmation, The journal of symbolic logic, vol. 10, 25 – 60, 1945.

[52] Henkin, Leon, The completeness of the first-order functional calculus, Jornal of Symbolic Logic 14, 159 – 166, 1949.

[53] van der Hoek, Wiebe, Some considerations on the logic $P_F D$, Lecture notes in computer science, 592, 474 – 485, 1992.

[54] van der Hoek, Wiebe, Some considerations on the logic $P_F D$: a logic combining modality and probability, Journal of applied non-classical logics, vol 7, no. 3, 287 – 307, 1997.

[55] Hoover, Douglas N., Probability logic, Annals of mathematical logic 14, 287 – 313, 1978.

[56] Hughes, G. E., Cresswell, M. J., Modal logic, Methuen, 1968.

[57] Hughes, G. E., Cresswell, M. J., A companion to modal logic, Methuen, 1984.

[58] Jäger, Manfred, Default reasoning about probabilities, doktorska disertacija, Universität Saarlandes, 1995.

[59] Jäger, Manfred, Probability logics, 10. European summer school in logic, language and information, Saarbrücken, 1998.

[60] Jocković, Miroslav, Ognjanović, Zoran, Stankovski, Stevan, Veštačka inteligencija, inteligentne mašine i sistemi, Krug, Beograd, 1997.

[61] Keisler, Jerome H., Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers, Studies in logic and the foundation of mathematics, vol. 62, North-Holland, 1971.

[62] Keisler, Jerome H., Hyperfinite model theory, u zborniku radova Logic colloquim 76, editori Gandy, R. O., Hyland, J. M. E., North-Holland, 1977.

[63] Keisler, Jerome H., Probability quantifiers, glava XIV u knjizi Model-theoretic logics, editori Barwise, J., Feferman, S., edicija Perspectives in mathematical logic, Springer-Verlag, 1985.

[64] Kolmogorov, Andrei, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechung, Berlin, 1933.

[65] Kozen, Dexter, A probabilistic PDL, Jornal of Computational System Science, 30, 162–178, 1985.

[66] Kripke, Saul A., A completeness theorem in modal logic, The journal of symbolic logic, vol 24, 1 – 15, 1959.

[67] Kripke, S. A., The undecidability of monadic modal quantification theory, Zeitschrift für Matematische Logik, vol 8, 113 – 116, 1962.

[68] Kripke, Saul A., Semantical consideration on modal logic, Acta philosophica fennica, Proceedings of a colloquium on modal and many valued logics, Helsinki, 83 – 94226, 1963.

[69] Kripke, Saul A., Semantical consideration on modal logic I, Zeitschrift für mathematische logik und grundlagen der mathematik, vol 9, 67 – 96, 1963.

[70] Kron, Aleksandar, Milovanović, Veselin, Preference and choice, Theory and decision 6, 185 – 196, 1975.

[71] Kron, Aleksandar, Elementarna teorija skupova, Matematički institut, Beograd, 1992.

[72] Kröger, Fred, Temporal logic of programs, Springer-Verlag, 1987.

[73] Lehmann, Daniel, Shelah, Saharon, Reasoning with time and chance, Information and Control, 53, 165 –198, 1982.

[74] Lee, Richard C. T., Chang, Chin-Liang, Some properties of fuzzy logic, Information and control 19, 417 – 431, 1971.

[75] Mamuzić, Zlatko P., Elementi teorije determinanata, teorije vektora i analitičke geometrije, Građevinska knjiga, 1967.

[76] Miller, David, a paradox of information, British journal for the philosophy of science, 17, 59 – 61, 1966.

[77] Morgan, C. G., Simple probabilistic semantics for propositional K, T, B, S4, and S5, Journal of Philosophical Logic, 4, 443 – 458, 1982.

[78] Nilsson, Nils J., Probabilistic logic, Artificial intelligence 28, 71 – 87, 1986.

[79] Nilsson, Nils J., Probabilistic logic revisited, Artificial intelligence 59, 39 – 42, 1993.

[80] Ognjanović, Zoran, Rašković, Miodrag, A logic with higher order probabilities, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 60 (74), 1 – 4, 1996.

[81] Ognjanović, Zoran, Rašković, Miodrag, The completeness theorem for a temporal logic with probabilistic operators, Proceedings of VIII International Conference on Logic and Computer Science LIRA '97, 1997, edt. R. Tošić, Z. Budimac, Institute of Mathematics, Novi Sad, 177 – 181, 1997.

[82] Ognjanović, Zoran, A logic for temporal and probabilistic reasoning, Workshop on probabilistic logic and randomized computation, Saarbrücken, 1998.

[83] Ognjanović, Zoran, Rašković, Miodrag, Some probability logics with new types of probability operators, biće objavljeno u časopisu Journal of logic and computation.

[84] Ognjanović, Zoran, Rašković, Miodrag, Some first order probability logics, biće objavljeno u časopisu Theoretical computer science.

[85] Ognjanović, Zoran, Some probability extensions of normal modal logics, rad se nalazi na recenziji.

[86] Pearl, Judea, Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference, Morgan Kaufmann, 1988.

[87] Prior, Arthur, N., Time and modality, Claredon Press, 1957.

[88] Prior, Arthur, N., Past, presemt and future, Claredon Press, 1967.

[89] Rabin, Michael, Decidability of second-order theories and automata on infinite trees, Transanction of American Mathematical Society, no. 1 – 35, 1969.

[90] Rašković, Miodrag, Moel theory for L_{AM} logic, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 37, 17 – 22, 1985.

[91] Rašković, Miodrag, Completeness theorem for biprobability models, The journal of symbolic logic, vol. 51, no. 3, 586 – 590, 1986.

[92] Rašković, Miodrag, Živaljević, Rade, Barwise completeness theorem for some biprobability logics, Zeitschrift f. math. logik und grundglagen d. math, 32, 133 – 135, 1986.

[93] Rašković, Miodrag, Completeness theorem for singular biprobability models, Proceedings of the american mathematical society, vol. 102, nr. 2, 389 – 392, 1988.

[94] Rašković, Miodrag, Tanović, Predrag, Completeness theorem for a monadic logic with both first-orde and probability quantifiers, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 47, 1 – 4, 1990.

[95] Rašković, Miodrag, A completeness theorem for an infinitary intuitionistic logic with both ordinary and probability quantifiers, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 50, 7 – 13, 1991.

[96] Rašković, Miodrag, Đorđević, Radosav, Finite compactness theorem for biprobability logics, Mathematica Balkanica, ns. vol. 5, 12 – 14, 1991.

[97] Rašković, Miodrag, Đorđević, Radosav, Second order probability logic, Mathematica Balkanica, ns. vol. 6, 105 – 108, 1992.

[98] Rašković, Miodrag, Classical logic with some probability operators, Publications de L'Institute Matematique, ns. vol. 53 (67), 1 – 3, 1993.

[99] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, Petrović, Vladimir, Majstorović, Uroš, LPP-logic about Probability, XXI SYM-OP-IS '94, Kotor 1994, edt. J.Petrić, M. Čangalović, M. Martić, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 179 – 182, 1994.

[100] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, A logic with a probabilistic operator, 3. International congress on industrial and applied mathematics, str. 411, Hamburg, 3. - 7. 7. 1995.

[101] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, A logic for reasoning about probability, IX Conference on Applied Mathematics, Budva 1994, edt. D.Herceg, Lj. Cvetković, Institute of Mathematics, Novi Sad, 365 – 369, 1995.

[102] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, Petrović, Vladimir, Majstorović, Uroš, Zbornik radova Konferencije YUINFO '95, Brezovica 1995, editori B. Radenković, M. Ivković, M. Stanojević, knjiga 3, str. 227 – 230, 1995.

[103] Rašković, Miodrag, Đorđević, Radosav, Probability quantifiers and operators, Vesta, Beograd, 1996.

[104] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, Some propositional probabilistic logic, Scientific review, no. 19 – 20, 83 – 90, 1996.

[105] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, A logic with higher order probabilities, X Conference on Applied Mathematics, Budva 1995, edt. D. Herceg, Lj. Cvetković, Institute of Mathematics, Novi Sad, 255 – 257, 1996.

[106] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, Petrović, Vladimir, Majstorović, Uroš, Jedan dokazivač teorema u verovatnosnoj logici, Konferencija u čast 65 godina života profesora Slaviše Prešića, Beograd, 1998.

[107] Rašković, Miodrag, Ognjanović, Zoran, A first order probability logic, rad se nalazi na recenziji.

[108] Rescher, Nicholas, A probabilistic approach to modal logic, Acta philosophica fennica, Proceedings of a colloquium on modal and many valued logics, Helsinki, 215 – 226, 1963.

[109] Rescher, Nicholas, Many-valued logic, McGraw-Hill, 1969.

[110] Savage, Leonard. J., The foundations of statistics, John Wiley and Sons, 1954.

[111] Segerberg, Krister, A model existence theorem in infinitary propositional modal logic, Jounal of philosophical logic, 23, 337 – 367, 1994.

[112] Stoyanov, Jordan, Counterexamples in probability, John Wiley & Sons, 1987.

[113] Styazhkin, N. I., Histroy of mathematical logic from Leibniz to Peano, MIT Press, 1969.

[114] Sundholm, Göran, A completeness proof for an infinitary tense-logic, Theoria, 43, 47 - -51, 1977.

[115] Szalas, Andrzej, Concerning the semantic consequence relation in first-order temporal logic, Theoretical computer science, 47, 329 – 334, 1986.

[116] Szalas, Andrzej, Holenderski, Leszek, Incompleteness of first-order temporal logic with until, Theoretical computer science, 57, 317 – 325, 1988.

[117] Tarski, Alfred, A decision method for elementary algebra and geometry, Univ. of Califormia Press, Berkeley, 1951.

[118] Turner, Raymond, Logics for artificial intelligence, John Willey and Sons, 1984.

[119] von Wright, Georg Henrik, The logic of preference, Edinburgh University Press, 1963.

[120] von Wright, Georg Henrik, The logic of preference reconsiderd, Theory and Decision, 3, 140 – 169, 1972.

[121] Zadeh, Lofty A., Fuzzy sets, Information and control 8, 338 – 353, 1965.

[122] Zadeh, Lofty A., Calculus of fuzzy restrictions, u knjizi Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Fuzzy Sets and Their Applications, held at The University of California, Berkeley, California July 1-4, 1974, editori Zadeh, Lofty A., Fu, King-Sin, i Shimura, Masamichi, Academic Press, 1975.

[123] Zadeh, Lofty A., Fuzzy logics, Computer, 83 – 92, 1988.