Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Мирјана Павловић

ПРИЛОГ РЕШЕЊУ ПРОБЛЕМА МИНИМИЗАЦИЈЕ ЈЕНСЕНОВОГ ФУНКЦИОНАЛА

Докторска дисертација

Крагујевац
2009

Садржај

1

Предговор

Полиноми како једне тако и више промењљивих (реалних или комплексних) имају важну улогу у скоро свим областима математике, на пример Анализи (комплексној и реалној), Теорији бројева, Теорији апроксимација, Теорији графова, Теорији матрица и детерминаната, Функционалној анализи са теоријом оператора, Нумеричкој Анализи, специјално. Скоро да нема математичке дисциплине где се на један или други начин не сусрећемо са појмом који је повезан са полиномима. Дугачак би био списак само врста полинома које се јављају у математици, да не говоримо о њиховој важности и применама како у самој математици тако и ван ње, на пример у техници, теоријској физици и др. Питање одређивања нула полинома и данас је актуелно и јако повезано са напредовањем како нумеричких метода са једне стране, тако и компјутерских наука са друге стране.

Историјски гледано, полиноми су били мотивација за увођење нових појмова. Довољно је поменути основне Теореме диференцијалног и интегралног рачуна, као што су Ролова ($Rolle$) теорема, Тејлорова ($Taylor$) и Маклоренова ($Maclaurin$) формула. Поменимо да су се главна имена светске математике хватала у коштац у раду са полиномима, што се огледало или у решавању алгебарских једначина (Галоа ($Galois$), Абел ($Abel$)...) или када је у питању основни став алгебре, тј. у чињеници да је број нула једнак степену полинома, рачунајући и вишеструкост (Лаплас ($Laplace$), Гаус ($Gauss$),...). Последња декада двадесетог века остаће записана када је решен један од највећих проблема математике: Велика Фермаова ($Fermat$) Теорема која је у вези са полиномима 3 промењљиве

$$f_n(x, y, z) = x^n + y^n - z^n,$$

тј. са одређивањем њихових позитивних рационалних, односно целобројних, нула. Друга половина двадесетог века остаће записана када је решен још један велики проблем који се дотиче полинома: чувена Бибербахова ($Bieberbach$) хипотеза, $|a_n| \leq n$, за сваку унивалентну функцију у диску $\{z : |z| < 1\}$ облика

$$z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n.$$

Почетком прошлог века, бројни математичари интересовали су се за нуле полинома са комплексним коефицијентима, пошто су претходно нарочито разматрали питање нула реалних полинома са реалним коефицијентима. Они су специјално тражили решење проблема о величини и позицији нула које зависе од особина коефицијената полинома, користећи изричито особине полинома са једне стране, и елементарне особине аналитичких функција са друге стране.

Један од првих проблема је био да се одреди број нула (рачунајући њихов мултиплицитет) полинома $f(z)$ у прстену

$$\{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

где су r_1 и r_2 унапред дати позитивни бројеви. Проблем је решен око 1920 године ([46], [16], [24]) конструишући од коефицијената полинома позитивно дефинитну квадратну форму.

Али колико год тачно, претходно решење се заснива на рачуну који је могуће спровести само на појединачним класама полинома. Кориснији резултат, мање потпун, али више примењлив за налажење нула полинома је резултат Кошија (*Cauchy*) [18]:

Све нуле полинома

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

садржане су у диску $|z| < r$ где је r позитивно решење једначине:

$$|a_0| + |a_1|z + \cdots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n = 0.$$

Све напред наведене особине зависе од скупа коефицијената полинома, за које се претпоставља да су познати. Природно је питати да ли се може наћи особина која зависи само од извесног броја коефицијената, не од свих. Такав је резултат Ландау-Монтелов (*Landau-Montel*) [28] из истог времена као и Шур-Конов (*Schur-Cohn*), који дају одговоре на ту врсту проблема.

Још једно од природних питања је: ако се неки коефицијенти полинома фиксирају а преостали мењају, да ли се тада може предвидети број нула у неком датом диску? Дат је позитиван одговор на то питање [47]:

Полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

има бар k нула у диску $|z| \leq r$, где је r позитивно решење једначине:

$$\binom{n}{k}|a_0| + \binom{n-1}{k-1}|a_1| + \cdots + \binom{n-k+1}{1}|a_{k-1}|z^{k-1} - |a_k|z^k = 0.$$

У свим наведеним резултатима учествује степен полинома, или сви или мањи број чланова полинома [12].

Можемо се дакле питати да ли постоји особина у скупу полинома која одбацује појам степена. Руковођен тиме у претпоследњој декади прошлог века решен је од стране француског математичара П. Енфлоа (*P. Enflo*) један од најважнијих проблема Ј. В. Њумана

($J.\ V.\ Neumann$) из функционалне анализе, о инваријантном потпростору ограниченог линеарног оператора на Банаховом ($Banach$) простору. Наиме, та особина која ће у нашем раду највише преовладавати по броју помињања, зове се **концентрација полинома у нижем степену** уведена од стране француских математичара Б. Бозамија ($B.\ Beauzamy$) и П. Енфлоа [5]. Захваљујући тој особини конструисан је, множењем променљивом z на комплетирању једног простора полинома са нормом, ограничен линеарни оператор на том простору, који нема нетривијалан инваријантан затворен потпростор.

Наводимо дефиницију те особине:

Нека је

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

полином са комплексним коефицијентима, и нека су $d \in [0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Каже се да полином $f(z)$ има концентрацију d у степену k ако је

$$\sum_{j=0}^{k} |a_j| \geqslant d \cdot \sum_{j=0}^{n} |a_j|. \tag{1.1}$$

Цена која је плаћена елиминацијом степена полинома, са једне стране, добија у последици неједнакости Ландау-Монтела [28], са друге стране: непознати коефицијенти не могу бити толико произвољни јер је њихова тотална маса контролисана. На основу тога су у [14] и [15] добијени резултати о количини нула у задатом диску у зависности само од константи d и k. Исто то је урађено и за количину нула аналитичке функције Хардијевог ($Hardy$) простора H^2 ако има концентрацију дефинисану l_2-нормом [7]. За концентрацију d полинома $f(z)$ у степену k која је дата формулом (1.1) кажемо да је мерена l_1-нормом у односу на l_1-норму. У општем случају, ако су $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ две норме дате у простору полинома, и ако су $d \in]0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}_0$ фиксирани, онда се каже да полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

има концентрацију d мерену $\|\cdot\|_{(1)}$-нормом у односу на $\|\cdot\|_{(2)}$-норму, ако је

$$\|f|^k\|_{(1)} \geqslant d \cdot \|f\|_{(2)} \tag{1.2}$$

где је $f|^k(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$. Формулом (1.2) дата је најопштија дефиниција концентрације полинома (аналитичке функције).

Не треба наведену дефиницију концентрације изједначавати, на пример, са следећом дефиницијом концентрације: кажемо да полином $f(z)$ има концентрацију d у степену k за довољно велико n ако је испуњено (1.2) за довољно велико n. Ево два примера:

(1) Нека је

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2^1} z + \frac{1}{2^2} z^2 + \cdots + \frac{1}{2^n} z^n,$$

и нека су $d \in]0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}_0$ фиксирани. Напишимо услов да $f(z)$ има концентрацију d у степену k, тј. услов (1.2):

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} \geqslant d \cdot \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right). \tag{1.3}$$

Пошто је $0 < d \leqslant 1$ то мора бити $n \geqslant k$. Ако хоћемо да полином $f(z)$ има концентрацију d у степену k за довољно велико n онда (1.3) постаје

$$1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k} \geqslant d\cdot\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \Leftrightarrow$$
$$1-\frac{1}{2^{k+1}} \geqslant d$$

што је тачно. Значи дати полином $f(z)$ има концентрацију $d\in]0,1]$ у степену k за довољно велико n.

(2) Полином $f(z)=(z+\frac{1}{2})^n$ нема концентрацију $d\in]0,1]$ у степену k, за довољно велико n. Ово је тачно ако се концентрација мери l_p-нормом у односу на l_1-норму, за $1\leqslant p\leqslant 2$. Заиста, услов (2) има облик

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}^p\left(\frac{1}{2}\right)^{p(n-j)} \geqslant d^p\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^p\left(\frac{1}{2}\right)^{p(n-j)} = d^p|f|_{l_p}^p.$$

Пошто је према (напомени 2, глава 2 и (3) Тврђење 2, глава 3)

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}|f|_{l_1} \leqslant |f|_{l_2} \leqslant |f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_1},$$

то је

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}^p(\frac{1}{2})^{n-j}}{|f|_{l_p}^p} \leqslant \frac{\sqrt{n+1}(k+1)\binom{n}{j}^p}{(\frac{3}{2})^n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \geqslant d, \quad \text{контрадикција!}$$

Слично и полином $f(z)=(z+a)^n$ не може имати концентрацију $d\in]0,1]$ у степену k за довољно велико n, ако $a\in\mathbb{C}$ и $|a|<1$.

Ако се концентрација мери l_p-нормом у односу на L_p- норму за $p>2$, онда полином из примера (2) не може имати концентрацију d у степену k за довољно велико n. Стварно, услов (1.2) гласи

$$\sum_{j=0}^{k}|a_j|^p \geqslant d^p\|f\|_{L_p}^p \geqslant d^p\|f\|_{L_2}^p \geqslant d^p\|f\|_{L_2}^2 = d^p|f|_{l_2}^2,$$

тј,

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}^p(\frac{1}{2})^{n-j}}{|f|_{l_2}^2} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \geqslant d^p, \quad \text{контрадикција!}$$

Поред коментара о две врсте концентрација полинома у нижем степену, сматрамо да је на месту и следећа примедба о вишеструкости (реду) нуле као корена полинома који има концентрацију $d\in]0,1]$ у степену k. Дакле, ако неки полином $f(z)$ задовољава (1.2), онда нула не може бити његов корен мултиплицитета већег од k. Заиста, ако је нула корен полинома $f(z)$ мултиплицитета $\geqslant k+1$ тада је

$$f(z) = a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$$

те је онда $f|^k(z) = 0$, тј. (1.2) постаје $0 \geqslant d \cdot \|f\|_{(2)}$, што је нетачно.

Наведимо још два примера где се може одбацити степен полинома. То су **Бернштајнова неједнакост** и **Гелфондова релација** (*Bernstein*, *Gelfond*). У Бернштајновој неједнакости

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty$$

природно је питати да ли се под неким условом концентрације у нижем степену може одбацити појам степен полинома. Одговарајућа неједнакост би гласила

$$\|f'\|_\infty \leqslant \lambda(d,k)\|f\|_\infty,$$

дакле, $\lambda(d,k)$ је константа која зависи само од d и k. У [14] има резултата о томе. Ако су $f(z)$ и $g(z)$ полиноми степена m и n респективно, онда Гелфондова релација каже да је

$$|fg|_\infty \leqslant e^{-(m+n)}|f|_\infty|g|_\infty$$

(видети [48]), и доста се примењује у проучавању трансцедентности бројева. Ако полиноми $f(z)$ и $g(z)$ имају концентрације d и d' у степенима k и k', респективно, природно је очекивати да Гелфондова релација добије облик

$$|fg|_\infty \geqslant \lambda(d,d',k,k')|f|_\infty|g|_\infty,$$

тј. релација у којој су одбачени степени полинома $f(z)$ и $g(z)$. Резултати о томе како о полиномима једне тако и о полиномима више комплексних променљивих дати су у [5], [8], [21].

Трећа ситуација, за нас најважнија, је примена **Јенсенове формуле** и **Јенсенове неједнакости** (*Jensen*) . Ако је $f(z)$ комплексни полином онда у Јенсеновој формули и Јенсеновој неједнакости учествује степен полинома. У [29] је доказана релација

$$log\frac{|f|_1}{2^f} \leqslant J(f) \leqslant log|f|_{l_1},$$

која важи за сваки полином степена n. Користећи концентрацију полинома и доња и горња граница Јенсеновог функционала изражавају се преко константи које зависе само од d и k а не и од степена полинома [4], [5], [6], [8]. Главно питање у овом случају је да се одреди инфимум бројног скупа $\{J(f) : f$ има концентрацију d у степену $k\}$. За сада постоје два позитивна резултата на ту тему [44], [6].

Предмет разматрања у овом докторском раду биће нелинеарни функционал дефинисан на векторском простору свих комплексних полинома или неком његовом делу, тј. на неком подскупу аналитичких функција Хардијевог простора H^1. Увек ће се претпостављати да полиноми тј. функције на којима је дефинисан Јенсенов функционал имају неку од врста концентрација коју смо дефинисали. Наша пажња биће нарочито усмерена ка асимптотском оцењивању изричито доњих граница Јенсеновог функционала. За све врсте концентрација које смо уводили значајно место добиће сегмент $[-2k, -2klog2]$ чији крајеви кад $k \to +\infty$ представљају асимптотски доње и горње ограничење најбоље доње границе Јенсеновог функционала. Разматрана концентрација биће дата у најопштијем облику (1.2).

Докторски рад се састоји из три дела.

У првој глави-предговор, поред природних разлога и мотивације за бављење овом проблематиком, истовремено смо излагали и нека тврђења и примедбе које припадају нашем доприносу у проучавању ове теме.

У другој глави су детаљно изложени познати резултати и нека запажања која ће се користити у последњој, трећој глави.

Трећа глава садржи изричито резултате који су добијени вишегодишњим радом и размишљањем о главном и сличним проблемима у вези одређивања тачне доње границе Јенсеновог функционала дефинисаног на подскупу полинома који задовољавају (1.2), тј. наћи

$$\inf \left\{ J(f) = \int_0^{2\pi} log \left| f(e^{i\theta}) \right| \frac{d\theta}{2\pi} : f(z) \ \text{задовољава} \ (1.2) \right\},$$

као и одређивања екстремалне функције.

2

Уводна глава

У овом делу рада излажемо углавном резултате које ћемо користити у наставку. Неке ћемо и доказивати. Ту ће бити изложене основе H^p-простора Хардија, спољашња и унутрашња функција, Блашке фактор и наравно све то због различитих облика и интерпретација Јенсенове неједнакости, почев од полинома до Дирихлеових алгебри.

2.1 Мебијусова трансформација и неједнакости

Овај део почиње Мебијусовом ($Möbijus$) трансформацијом и доказом добро познате двоструке неједнакости, коју користимо у наредним деловима рада.

Под **Мебијусовом трансформацијом** подразумева се свака од следеће две билинеарне функције

$$\omega_1(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z} \ \text{ и } \ \omega_2(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

где је z_0 фиксирана тачка у комплексној равни. Узимајући $z_0 = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ добијамо да се наведеним функцијама јединични круг са центром у тачки z_0 тј. $-z_0$ респективно пресликава у њега самог. Обе трансформације се доста користе, нарочито као смена променљивих код неких карактеристичних интеграла, што ће бити случај овде у наставку рада. Заједно са тим користићемо и неједнакости о којима је реч у наставку.

За свако $r \in]0, 1]$ и $|z_0| = r$, $z_0 \in \mathbb{C}$ важи:

$$\frac{1 - r}{1 + r} \leqslant \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0} e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{1 + r}{1 - r}.$$

◀ Из двоструке неједнакости $||x| - |y|| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$, и чињенице да је $z_0 = re^{i\theta} \Leftrightarrow r = \overline{z_0} e^{i\theta}$, следи

$$\left||1| - |\overline{z_0} e^{i\theta}|\right|^2 \leqslant \left|1 - \overline{z_0} e^{i\theta}\right|^2 \leqslant \left(1 + \left|z_0 e^{i\theta}\right|\right)^2.$$

Значи, имамо

$$\frac{1+r}{1-r} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1-r^2}{|1-r|^2} = \frac{1-r^2}{||1|-|\overline{z_0}e^{i\theta}||^2} \geqslant \frac{1-r^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|^2}$$
$$\geqslant \frac{1-r^2}{(1+|z_0e^{i\theta}|)^2} = \frac{1-r^2}{(1+r)^2} = \frac{1-r}{1+r}$$

чиме је неједнакост доказана.►

2.2 Норме на простору $\mathcal{P}$

У наставку наводимо основна својства о свим добро познатим нормама које се уводе у векторском простору $\mathcal{P}$ свих комплексних полинома. Посебно истичемо случајеве l_p и L_p норми за $p \in [1,2]$ и $p > 2$.

Ако је $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, полином, тада је формулама

$$|f|_{l_p} = \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ и } \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} \left|f(e^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} , \ p \geqslant 1$$

дата норма у векторском простору $\mathcal{P}$ свих комплексних полинома. Заиста, лако се проверава да је

(**1**) $|f|_{l_p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$, иначе $|f|_{l_p} > 0$ јер је $|a_j| > 0$ бар за неко $j \in \mathbb{N}_0$;

(**2**) $|\lambda f|_{l_p} = |\lambda||f|_{l_p}$;

(**3**) $|f+g|_{l_p} \leqslant |f|_{l_p} + |g|_{l_p}$, $p \geqslant 1$ користећи неједнакост Минковског (*Minkowski*)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} , \ p \geqslant 1.$$

Слично се доказује да је $\|\cdot\|_{L_p}$, $p \geqslant 1$ такође норма:

(**a**) $\|f\|_{L_p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$, иначе $\|f\|_{L_p} > 0$ јер је $|f(e^{i\theta})| > 0$ за неко $\theta \in [0, 2\pi]$;

(**b**) $\|\lambda f\|_{L_p} = |\lambda| \cdot \|f\|_{L_p}$;

(**c**) $\|f+g\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$, $p \geqslant 1$ користећи неједнакост Минковског за интеграле

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} , \ p \geqslant 1.$$

Поред l_p и L_p норме, значајне су и следеће две норме у векторском простору $\mathcal{P}$ свих комплексних полинома:

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(e^{i\theta})| \text{ и } |f|_\infty = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|.$$

Заиста,

($\mathbf{1}'$) $|f|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$, иначе $|f|_\infty > 0$ јер је $|a_j| > 0$ бар за неко $j \in \mathbb{N}_0$;

($\mathbf{2}'$) $|\lambda f|_\infty = |\lambda||f|_\infty$;

($\mathbf{3}'$) $|f + g|_\infty \leqslant |f|_\infty + |g|_\infty$;

($\mathbf{a}'$) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$, иначе $\|f\|_\infty > 0$ јер је $|f(e^{i\theta})| > 0$ за неко $\theta \in [0, 2\pi]$;

($\mathbf{b}'$) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$;

($\mathbf{c}'$) $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Веза ових норми са претходне две норме је следећа:

Тврђење 2.1. $|f|_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} |f|_{l_p}$ *и* $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_{L_p}$.

$$◀ \lim_{p\to+\infty} |f|_{l_p} = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to+\infty} \left(|a_k|^p \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{|a_j|}{|a_k|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |a_k| \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{|a_j|}{|a_k|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Како је $|a_k| = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n} |a_j|$ то је $0 \leqslant \frac{|a_j|}{|a_k|} \leqslant 1$, одакле следи $0 \leqslant \left(\frac{|a_j|}{|a_k|}\right)^p \leqslant 1$ за $p \geqslant 1$. Тада је $1 \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n} \left(\frac{|a_j|}{|a_k|}\right)^p \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n} 1 = n + 1$, тј. $1 \leqslant \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \left(\frac{|a_j|}{|a_k|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (n + 1)^{\frac{1}{p}}$. Из последње релације проистиче доказ тврђења за прву норму.

Што се тиче друге норме, нека је $M = \sup\limits_\theta |f(e^{i\theta})| = \max\limits_\theta |f(e^{i\theta})|$, за неко $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. За свако $p > 0$ важи:

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^{2\pi} M^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} = M.$$

Затим је због особине супремума (максимума) функције f задовољено $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall\theta \in [0, 2\pi])\left(|\theta - \theta_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(e^{i\theta})| \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Према томе је за $0 \leqslant \alpha \leqslant \theta_0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ и $0 < |\alpha - \beta| < \delta(\varepsilon)$ испуњено

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_\alpha^{\beta} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\int_\alpha^{\beta} \left|M - \frac{\varepsilon}{2}\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot (\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant M - \varepsilon$$

за довољно велико p. Значи, добили смо да је за довољно велико p,

$$M - \varepsilon \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M,$$

одакле проистиче тврђење. ►

Следеће тврђење је од посебног интереса јер се њиме упоређују наведене норме. Види се да је број $p = 2$ на граници.

Тврђење 2.2. *Ако је $p \in]1,2[$, тада за свако $f \in \mathcal{P}$ важи*

$$|f|_\infty \leqslant \|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_2} = |f|_{l_2} \leqslant \begin{cases} |f|_{l_p} \\ \|f\|_\infty \end{cases} \leqslant |f|_{l_1}.$$

За $p \in]1,2]$ норме $|f|_{l_p}$ и $\|f\|_\infty$ су неупоредиве у смислу да постоје два полинома f и g таква да је $|f|_{l_p} < \|f\|_\infty$ и $|g|_{l_p} > \|g\|_\infty$. Такви полиноми су на пример $f(z) = 1 + z$ и $g(z) = z^2$.

◄ Једнакост $\|f\|_{L_2} = |f|_{l_2}$ следи из чињенице да је

$$\left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 = f(e^{i\theta}) \cdot \overline{f(e^{i\theta})} = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 + \sum_{j \neq k} a_j \overline{a_k} e^{i(j-k)\theta},$$

те је

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j \neq k} a_j \overline{a_k} e^{i(j-k)\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 + \sum_{j \neq k} a_j \overline{a_k} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2. \end{aligned}$$

Како из $|f(e^{i\theta})| \leqslant \sup\limits_\theta |f(e^{i\theta})|$ следи $|f(e^{i\theta})|^2 \leqslant \left(\sup\limits_\theta |f(e^{i\theta})| \right)^2$, то је

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi} \left(\sup_\theta \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \right)^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \left(\sup_\theta \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \right)^2$$

одакле даље проистиче

$$\left(\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sup_\theta \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \text{ односно,} \|f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_\infty.$$

Затим имамо да важи

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup_\theta \left| f\left(e^{i\theta}\right)\right| = \sup_\theta \left|a_0 + a_1 e^{i\theta} + \cdots + a_n e^{in\theta}\right| \\ &\leqslant \sup_\theta (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) = \sum_{j=0}^{n} |a_j| = |f|_{l_1}.\end{aligned}$$

Докажимо да је $\|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_2}$ за $p \in]1,2[$. Стварно, бирајући p_1 и p_2 тако да је $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2$, и користећи Хелдерову ($H\ddot{o}lder$) неједнакост:

$$\int_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\ ,\ p>1\ ,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p_1}\cdot 1\frac{d\theta}{2\pi} &\leqslant \left(\int_0^{2\pi}\left(\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1^{\frac{1}{1-\frac{p_1}{p_2}}}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}} \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p_2}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\ ,\ \text{где је}\frac{p_2}{p_1} > 1.\end{aligned}$$

Дакле, имамо да је

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p_1}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p_2}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

односно,

$$\|f\|_{L_{p_1}} \leqslant \|f\|_{L_{p_2}}\ \ \text{за}\ \ 1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2.$$

Значи,

$$\|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_2}\ \ \text{за}\ \ p \in]1,2[,$$

односно $\|\cdot\|_{L_p}$ је растућа функција од p.

За $p \in]1,2[$ имамо да је $|\cdot|_{l_p}$ опадајућа функција од p, тј, за свако $f \in \mathcal{P}$ важи $|f|_{l_2} \leqslant |f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_1}$.

Нека је $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2$. Тада је $|f|_{l_2} \leqslant |f|_{l_1}$ ако је $|f|_{l_1} = 1$, јер је тада због $|a_j| \leqslant 1\ ,\ j = \overline{0,n}\ ,\ |a_j|^{p_2} \leqslant |a_j|^{p_1}$ те је

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j|^{p_2} \leqslant \sum_{j=0}^{n} |a_j|^{p_1}\ ,\ \text{тј.}\ \left(\sum_{j=0}^{n}|a_j|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n}|a_j|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

зато што је $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p_2} < \frac{1}{p_1} \leqslant 1$.

Нека је сада $f(z)$ произвољан полином. Тада полином $\left(\frac{1}{|f|_{l_1}} \cdot f\right)(z)$ односно, $\frac{1}{|f|_{l_1}} \cdot f(z)$ има јединичну l_1-норму. Због тога даље имамо импликације:

$$\left|\frac{1}{|f|_{l_1}} \cdot f\right|_{l_{p_2}} \leqslant \left|\frac{1}{|f|_{l_1}} \cdot f\right|_{l_{p_1}} \Rightarrow \frac{|f|_{l_{p_2}}}{|f|_{l_{p_1}}} \leqslant 1 \Rightarrow |f|_{l_{p_2}} \leqslant |f|_{l_{p_1}}$$

за било који полином f ако је $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2$, тј. $|\cdot|_{l_p}$ је опадајућа функција од p за $p \geqslant 1$.

Нека је $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_j z^j + \cdots + a_n z^n$ полином степена н. Тада је за $z \neq 0$

$$\frac{f(z)}{z^{j+1}} = \frac{a_0}{z^{j+1}} + \frac{a_1}{z^j} + \cdots + \frac{a_j}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^{j+1-n}}.$$

Узимањем комплексног интеграла леве и десне стране по контури $C_r = \{z : |z| = r\}$, $0 < r < 1$, добијамо

$$\int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{C_r} \frac{a_k}{z^{j+1-k}} dz \text{ где је}$$

$$\int\limits_{C_r} \frac{a_j}{z} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{a_j}{z} = 2\pi i \cdot \lim_{z \to 0} \left(z \cdot \frac{a_j}{z}\right) = 2\pi i a_j \text{ и}$$

$$\int\limits_{C_r} \frac{a_k}{z^{j+1-k}} dz = 0 \text{ за } k \neq j.$$

Узимајући $z = re^{i\theta}$ добијамо да је $\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{j+1} e^{i(j+1)\theta}} \cdot rie^{i\theta} d\theta = 2\pi i a_j$ одакле је $a_j = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^j e^{ij\theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$. Ако је $z = e^{i\theta}$ тј. $|z| = 1$, тада је $a_j = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{ij\theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$. Отуда имамо $|a_j| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$. Узимањем максимума по $j = \overline{0,n}$ имамо $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$, односно, важи неједнакост $|f|_\infty \leqslant \|f\|_{L_1}$. ►

Напомена 1. Успут смо доказали формулу $a_j = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^j e^{ij\theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$, $0 < r < 1$, за израчунавање коефицијената a_j, $j = \overline{0,n}$ комплексног полинома $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$.

Тврђење 2.3. *За $p > 2$ важи*

$$|f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_2} = \|f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_p}.$$

◄ За $p > 2$ ако је $|f|_{l_2} = 1$ следи $|f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_2}$, доказ као у случају $p \in]1, 2[$. Нека је сада $f(z)$ произвољан полином. Тада полином $\left(\frac{1}{|f|_{l_2}} \cdot f\right)(z) = \frac{1}{|f|_{l_2}} f(z)$ има јединичну l_2-норму. Зато имамо

$$\left|\frac{1}{|f|_{l_2}} \cdot f\right|_{l_p} \leqslant \left|\frac{1}{|f|_{l_2}} \cdot f\right|_{l_2} \Rightarrow \frac{|f|_{l_p}}{|f|_{l_2}} \leqslant 1 \text{ , тј. } |f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_2}$$

за било који полином f, ако је $p > 2$.

Показали смо раније да је $|f|_{l_2} = \|f\|_{L_2}$. Остаје да се покаже да је $\|f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_p}$ за $p > 2$. Слично као што смо доказали за $p \in]1,2[$ следи, користећи Хелдерову неједнакост, да је

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \cdot 1 \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left(\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1^{\frac{1}{1-\frac{2}{p}}} \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1-\frac{2}{p}}$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{2}{p}} \quad \text{где је } \frac{p}{2} > 1.$$

Узимањем квадратног корена леве и десне стране добијамо

$$\left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ тј. } \|f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_p} \text{ за } p > 2. \blacktriangleright$$

Напомена 2. Из свега реченог и доказаног у претходна два тврђења закључимо да је за фиксирано $p \in \mathcal{P}$:

$(\mathbf{1})$ функција $p \mapsto |f|_{l_p}$ са доменом $[1,+\infty[$ и скупом вредности $]|f|_\infty, |f|_{l_1}]$ је опадајућа;

$(\mathbf{2})$ функција $p \mapsto \|f\|_{L_p}$ са доменом $[1,+\infty[$ и скупом вредности $[\|f\|_{L_1}, \|f\|_\infty[$ је растућа.

За успостављање сагласности алгебарских и тополошких структура често су квазинорме делотворније од норми. Наводимо њихову дефиницију и неке особине.

Дефиниција 2.1. *Квазинормом зовемо реално-вредносну функцију $\|\cdot|$ дефинисану на векторском простору V са следећим особинама:*

1^0 $\|0| = 0$ *и* $\|x| > 0$ *за* $x \neq 0$*;*

2^0 $\|\lambda x| = |\lambda|^p \|x|$ *за свако* $x \in V$ *и за сваки скалар* λ*;*

3^0 $\|x+y| \leqslant \|x| + \|y|$ *за свако* $x, y \in V$.

Формулама

$$\|f|_p = \sum_{j=0}^n |a_j|^p, \;\; 0 < p < 1 \text{и} \|f|_{L_p} = \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}, \;\; 0 < p < 1$$

дате су квазинорме у простору $\mathcal{P}$ свих комплексних полинома. Особине квази норме се лако проверавају. Проверићемо једино да ли је $\|f|_{L_p} \leqslant \|f|_{l_p}$ за $0 < p < 1$. У ту сврху имамо

$$\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p = \left|a_0 + a_1 e_{i\theta} + \cdots + a_n e^{in\theta}\right|^p \leqslant \left(\sum_{j=0}^n |a_j|\right)^p \leqslant \sum_{j=0}^n |a_j|^p, \;\; 0 < p < 1.$$

Последња неједнакост следи према [36], Тврђење 5. Значи,

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{n} |a_j|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{j=0}^{n} |a_j|^p$$

тј. важи $\|f|_{L_p} \leqslant \|f|_{l_p}$ за $0 < p < 1$.

Ако је $f(x) = \|x\|$ једна норма на векторском простору V, тада је са $\|x| = \|x\|^p, \; 0 < p < 1$, дата квазинорма на V. Заиста, лако се проверава да важе све особине квазинорме за $\|x| = \|x\|^p, \; 0 < p < 1$. Значи, квазинорма проистиче из норме, што се често користи код степена глаткости разних простора функција.

2.3 Хурвицови полиноми

Међу реалним и комплексним полиномима значајно место заузимају Хурвицови (*Hurwitz*) полиноми (разликују се од осталих по доњим границама Јенсеновог функционала, Бернштајнове неједнакости и др). За полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \;\; a_n \neq 0 \tag{2.1}$$

се каже да је Хурвицов полином ако све његове нуле z_k имају особину да је

$$Re z_k < 0, \;\; k = \overline{1, n}.$$

Они се у литератури краће зову H-полиноми.

Наводимо неке особине H- полинома чији су коефицијенти реални.

(a) Ако је полином (2.1) са реалним коефицијентима и H- полином тада су сви његови коефицијенти истог знака. Важи и обрнуто ако је $n = 1$ и $n = 2$.

На основу (a) имамо да су полиноми $2 + 3z + \sqrt{2} z^2$ и $-\frac{\pi}{2} - 4z$ Хурвицови полиноми.

(b) Ако је $h(z) = h_1(z) h_2(z)$, онда је $h(z)$ Хурвицов полином ако и само ако су $h_1(z)$ и $h_2(z)$ Хурвицови полиноми.

Није једноставно за сваки полином утврдити да ли је или није Хурвицов полином. Постоји поступак за то који се зове Шуров поступак. Наводимо теорему о томе.

Теорема 2.1 (Шуров критеријум). *Полином степена n, са реалним коефицијентима**,

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \;\; a_0 > 0$$

представља H-полином ако и само ако су испуњени услови:

$$D_1 = a_1 > 0, \;\; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

*Једино су овде коефицијенти написани супротним редоследом него у целом раду због начина формирања детерминаната

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

$\vdots$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

где треба ставити $a_j = 0$ *ако је* $j > n$.

Ако је $f(z)$ комплексан полином степена n онда се под $f^*(z)$ подразумева полином који се добија када се у комплексном полиному $f(z)$ сви коефицијенти замене њиховим коњугованим вредностима и поред тога промени знак коефицијената непарних степена од z. Операција $*$ има особину $(f^*)^* \equiv f$. Операција $*$ зове се **паракон јункција**. Лако се проверава да је $(f(z)g(z))^* = f^*(z)g^*(z)$. За комплексне полиноме (полиноми чији су коефицијенти комплексни бројеви) наводимо особину.

$(\mathbf{c})$ Када је комплексан број z_0 такав да је $Rez_0 < 0$, комплексан полином (2.1) је Хурвицов полином ако и само ако је $|f(z_0)| < |f^*(z_0)|$ и ако је

$$g(z) = \frac{f^*(z_0)f(z) - f(z_0)f^*(z)}{z - z_0}$$

Хурвицов полином. Проблем да ли је полином са комплексним коефицијентима H-полином познат је као Рут-Хурвицов (*Routh-Hurwitz*) проблем. Године 1868. то питање поставио је Максвел (*Maxwell*). Рут 1877, Хурвиц 1895. и Шур 1921. су свако на свој начин решили наведени проблем.

2.4 Јенсенова формула

Радећи на проблему Риманове (*Riemann*) хипотезе, тј. покушавајући да одреди дистрибуцију нетривијалних нула Риманове зета-функције, Ј.Л.Њ.В.Јенсен [25], је 1899. године доказао следећу теорему:

Теорема 2.2. *Нека је* f *аналитичка функција у диску* $D = \{z : |z| < r\}$ *у коме има полове* $p_i \neq 0, \quad i = \overline{1,n}$. *Нека је затим* f *аналитичка на кругу* $K_r = \{z : |z| = r\}$. *Ако су* $n_i \neq 0, \quad i = \overline{1,m}$ *нуле функције у* D *и ако је* $f(z) \neq 0$ *за* $z \in K$, *тада је*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_r} \frac{\log f(z)}{z} dz = \log f(0) + \sum_{k=1}^{m} \log \frac{r}{n_k} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{r}{p_k}. \tag{2.2}$$

Ако у једнакости (2.2) ставимо $z = re^{i\theta}$, и затим изједначимо реалне делове израза на левој и десној страни ове једнакости, добијамо

$$\int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{m} \log \frac{r}{|n_k|} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{r}{|p_k|}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) назива се Јенсенова формула и она је као и сама теорема уопштавана у више праваца (видети [17], [31], [33]). Њен значај састоји се у томе што повезује вредности функције на периферији круга са модулима њених нула и полова који се налазе у кругу, и затим, што се помоћу ње израчунава вредност важног интеграла $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta,\ |z| = r$.

Ако је f полином степена n такав да је $f(0) \neq 0$, тада постоји $r > 0$ тако да свих n нула припада диску $D = \{z : |z| < r\}$. Пошто полином нема полова онда Јенсенова формула за f гласи

$$\int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{m} \log \frac{r}{|n_k|}, \tag{2.4}$$

где $\frac{d\theta}{2\pi}$ представља нормализовану Харову меру на $[0, 2\pi]$.

У формули (2.2) тј. у (2.3) учествују поред нула функције и полови. Природно је питати да ли постоји аналогна формула ако у диску D функција f поред нула и полова има и есенцијалне сингуларитете. Једно уопштење у том правцу, овде формулишемо и наводимо његов доказ. У тврђењу које следи решава се следећи проблем: Како гласи релација која повезује модул функције на периферији круга са модулима њених есенцијалних сингуларитета који се налазе у кругу? Другим речима треба изградити такву формулу, аналогну Јенсеновој, која ће истовремено бити примењива не само на униформне функције које имају само нуле и полове већ и на функције које имају само есенцијалне сингуларитете.

Формулишемо главну теорему о томе:

Теорема 2.3. [31] *Нека је функција $f(z)$ униформна и регуларна свуда у области $D = \{z : |z| < r\}$ и на њеном рубу $K_r = \{z : |z| = r\}$, осим у есенцијалним сингуларитетима $a_\nu \in D,\ \nu = \overline{1,k}, |a_\nu| \neq 0$. Претпоставља се да је $f(z) \neq o$ на скупу $D \cup K_r$. Тада је*

$$(*)\quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} B_{1,\nu} \log \frac{r}{|a_\nu|} + Re \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1,\nu}}{n a_\nu^n},$$

где су $B_{n,\nu}$ коефицијенти главног дела у Лорановом развоју функције $\frac{f'(z)}{f(z)}$ у тачкама a_ν.

За доказ ове теореме користи се следећи помоћни став:

Означићемо са $\triangle$ унутрашњост затворене Жорданове криве ($Jordan$) e.

Лема 2.1. *Нека је функција $f(z)$ униформна и регуларна свуда у области $\triangle \cup e$, осим у есенцијалној сингуларној тачки $a \in \triangle$. Претпоставља се да $\triangle$ не садржи координатни почетак и да је $f(z) \neq 0$ на $\triangle \cup e$. Тада је*

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_e \frac{f'(z)}{f(z)} \log z dz = B_1 \log a - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n}, \tag{2.5}$$

где су B_n коефицијенти главног дела у Лорановом (Laurent) развоју функције $\frac{f'(z)}{f(z)}$ у тачки $z = a$.

◀ Према Лорановом развоју је

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \cdots \tag{2.6}$$

или у краћем облику

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = P(z-a) + Q\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Сада је

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_e P(z-a) \log z dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_e Q\left(\frac{1}{z-a}\right) \log z dz,$$

где се под логаритмом подразумева једна од његових грана. Функција $P(z-a)\log z$ је регуларна у области $\triangle \cup e$. Зато је први интеграл према фундаменталној Кошијевој теореми једнак нули. Што се тиче другог интеграла може се рачунати члан по члан. Примењујући Кошијеву формулу за извод регуларне функције - унашем случају на функцију $\log z$ - после једноставног рачуна добијамо

$$J_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_e \frac{B_n \log z}{(z-a)^n} dz = B_1 \log a - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n}.$$

Релација (2.5) је доказана.

На аналоган начин као у доказу релације (2.5) долази се до нове релације

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_e \frac{f'(z)}{f(z)} dz = B_1, \tag{2.7}$$

где је B_1 цео број (позитиван, негативан или нула). Да се докаже ова једноставна али важна чињеница, довољно је интегралити (2.6) и затим проучити варијацију функције $f(z)$ кад тачка z описује затворену путању око тачке $z = a$ у области $\triangle$. Како је према претпоставци функција $f(z)$ униформна, B_1 мора бити цео број. Због тога, тачка $z = a$ или је пол реда већег од 1 или есенцијална сингуларна тачка функције $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

Сада ћемо помоћу (2.7) одредити варијацију аргумената функције $f(z)$ дуж криве e. Ако са витичастом заградом означимо варијацију аргумената функције $\log f(z)$ на e, тада је

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_e d(\log f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\{\log f(z)\}_e$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\{\log|f(z)| + i arg f(z)\}_e = \frac{1}{2\pi}\{arg f(z)\}_e$$

тј.

$$\{arg f(z)\}_e = 2\pi B_1. \tag{2.8}$$

На основу (2.8) доказује се и релација

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\log z \log f(z)\}_{|z-a|=\varepsilon} = 2\pi i B_1 \log a. \quad \blacktriangleright \tag{2.9}$$

Доказ Теореме 2.3.

◀ Претпоставимо, ради једноставности, да је функција $f(z)$ регуларна свуда у $D\cup K_r$, осим у једној есенцијалној сингуларној тачки $z=a$. У општем случају, функција $\log f(z)$ је мултиформна у $D\cup K_r$. Али, кад се рубу K_r, на коме смо за почетну тачку узели $z=r$, придружи петља око тачке $z=a$, како се то обично ради у теорији функција, функција $\log f(z)$ постаје униформна и регуларна у области D_1, која преостаје кад се из D издвоји произвољно мали круг $|z-a|\leqslant\varepsilon$ и сегмент $[a+\varepsilon e^{i\alpha}, r]$, где је α фиксирано. Такође, функција $\frac{\log f(z)}{z}$ је униформна и регуларна свуда у D_1 осим у тачки $z=0$, где има пол са остатком $\log f(0)$. Под $\log f(z)$ подразумевамо једну одређену грану логаритма. Према томе, кад применимо теорему о остацима на руб L области D_1, имамо једнакост

$$\int\limits_L \frac{\log f(z)}{z}dz = 2\pi i \log f(0), \tag{2.10}$$

која наравно важи и онда кад $\varepsilon\to 0$.

С друге стране, у вези са (2.8) због примене логаритма функције $f(z)$ дуж руба $|z-a|=\varepsilon$, имамо једнакост

$$\int\limits_L \frac{\log f(z)}{z}dz = \int\limits_C \frac{\log f(z)}{z}dz + \int\limits_r^{a+\varepsilon e^{i\alpha}} \frac{\log f(z)}{z}dz$$
$$- \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\log f(z)}{z}dz + \int\limits_{a+\varepsilon e^{i\alpha}}^{r} \frac{\log f(z)-2\pi i B_1}{z}dz,$$

и после једноставног рачуна

$$\int\limits_L \frac{\log f(z)}{z}dz =$$
$$\int\limits_C \frac{\log f(z)}{z}dz + 2\pi i B_1(\log(a+\varepsilon e^{i\alpha}) - \log r) - \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\log f(z)}{z}dz. \tag{2.11}$$

Помоћу парцијалне интеграције из (2.11) добијамо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_L \frac{\log f(z)}{z} dz = \\
&\int\limits_C \frac{\log f(z)}{z} dz + 2\pi i B_1(\log(a+\varepsilon e^{i\alpha}) - \log r) - \\
&\{\log z \log f(z)\}_{|z-a|=\varepsilon} + \int\limits_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} \log z dz.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Водећи рачуна о (2.5), (2.9) и (2.10) кад $\varepsilon \to 0$, једнакост (2.11) прелази у једнакост

$$\begin{aligned}
2\pi i \log f(0) = &\int\limits_C \frac{\log f(z)}{z} dz + 2\pi i B_1(\log a - \log r) \\
&- 2\pi i B_1 \log a + 2\pi i \left(B_1 \log a - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n} \right),
\end{aligned}$$

одакле на крају добијамо

$$\int\limits_C \frac{\log f(z)}{z} dz = 2\pi i \log f(0) + 2\pi i \left(B_1 \log \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n a^n} \right). \tag{2.13}$$

Добијена формула важи у случају када функција $f(z)$ има само један есенцијални сингуларитет. Међутим, помоћу теореме о остацима лако је модификовати формулу (2.13) и у случају када функција $f(z)$ има есенцијалне сингуларне тачке $a_\nu, \nu = \overline{1,k}$. Формула (2.12) тада очевидно прелази у формулу

$$\int\limits_C \frac{\log f(z)}{z} dz = 2\pi i \log f(0) + 2\pi i \left(\sum_{\nu=1}^{k} B_{1,\nu} \log \frac{r}{a_\nu} + \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1,\nu}}{n a_\nu^n} \right). \tag{2.14}$$

где су $B_{n,\nu}$ коефицијенти главног дела у Лорановом развоју функције $\frac{f'(z)}{f(z)}$ у тачкама a_ν.

Када леву и десну страну у (2.14) после смене $z = re^{i\theta}$ раставимо на реалне и имагинарне делове и затим реалне делове изједначимо, добијамо формулу $(*)$ у којој је сада све одређено. Теорема 2.3 је доказана. ►

Једна провера формуле (*). Нека је функција $u(x,y)$ хармонијска у кругу $|z| \leqslant r$. Тада је

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(r,\theta) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\theta.$$

Ова релација позната је као Пуасонова формула. Она изражава вредност хармонијске функције у кругу $|z| \leqslant r$ помоћу њених рубних вредности.

Специјално, ако је $u = const$, тада је

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta = 1. \tag{2.15}$$

Функција под знаком интеграла зове се Пуасоново ($Poisson$) језгро. Само језгро је такође хармонијска функција. Желимо да покажемо да се (2.15) може добити и из формуле $(*)$.

Посматрајмо функцију $f(z) = e^{\frac{z+a}{z-a}} (a = \rho e^{i\varphi})$. У овом случају је

$$\log f(z) = \frac{z+a}{z-a},\ \log|f(z)| = Re\left(\frac{z+a}{z-a}\right),\ \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2a}{(z-a)^2},$$

те је $B_1 = 0, B_2 = -2a, B_3 = B_4 = \cdots = 0$. Зато је после смене у $(*)$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Re\left(\frac{z+a}{z-a}\right)d\theta = \log e^{-1} + Re\frac{(-1)B_2}{a},$$

тј.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta = -1+2 = 1.$$

Напомена 1. Истакнимо да ако је тачка a_ν нула или пол функције $f(z)$, тада је $B_{2,\nu} = B_{3,\nu} = \cdots = 0$, док је $B_{1,\nu}$ ред те нуле или пола. У првом случају је $B_{1,\nu} > 0$, у другом < 0. Заиста, ако је тачка $z = a_\nu$, на пример, нула реда m функције $f(z)$, тада је

$$f(z) = (z-a_\nu)^m f_1(z), \tag{2.16}$$

где је $f_1(z) \neq 0$ у околини тачке $z = a_\nu$. Логаритмовањем, а затим диференцирањем једнакости (2.16) имамо

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a_\nu} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)},$$

одакле се види да је $B_{1,\nu} = m$. На сличан начин може се показати да је $B_{1,\nu} = -m$ ако је тачка a_ν пол реда m функције $f(z)$.

После ових напомена може се показати да се из формуле $(*)$ добија формула (2.2). Довољно је, на пример, претпоставити да тачке a_ν нису есенцијалне сингуларне тачке функције $f(z)$, већ да су њене нуле. У овом случају, како је горе показано, бројеви $B_{1,\nu}$ означавају редове ових нула, док двострука сума у $(*)$ нестаје. Дакле,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \log|f(0)| + \sum_{\nu=1}^{k} \log\frac{r}{|a_\nu|},$$

где сваку нулу треба узети у обзир онолико пута колики је њен ред.

2.5 Јенсенова неједнакост и H^p простори

Нека је $f(z)$ аналитичка функција у диску $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$. Ставимо

$$M_p(r,f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ за } 0 < p < +\infty \text{ и } 0 \leqslant r < 1;$$
$$M_\infty = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|, \text{ за } 0 \leqslant r < 1.$$

Као у [17] за $0 < p \leqslant +\infty$, нека је

$$H^p := \{g(z) : g \text{ је аналитичка у } |z| < 1 \text{ и } M_p(r,g) \text{ је ограничена кад } r \to 1-\}.$$

Ако $g(z) \in H^p$ из [17] се зна да се $g(z)$ може продужити на кружницу $|z| = 1$ вредношћу функције $\widehat{g}(e^{i\theta})$, дефинисане на $[0, 2\pi]$, за коју је

$$\widehat{g}(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-} g(re^{i\theta}) \text{ с.с. на } [0,2\pi],$$
$$\widehat{g}(e^{i\theta}) \in L^p[0,2\pi], \text{ и, ако } g(z) \text{ није идентички } 0, \text{ тада}$$
$$\log\left|\widehat{g}(e^{i\theta})\right| \in L^1[0,2\pi].$$

Последња особина значи да је функција $\log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|$ интеграбилна у Лебеговом ($Lebesgue$) смислу за сваку функцију $f \in H^p$, $p \geqslant 1$, што може да се искаже следећим низом еквиваленција:

$$\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant C > -\infty \Leftrightarrow$$
$$\log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \text{ је интеграбилна } \Leftrightarrow$$
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\alpha = \alpha(\varepsilon, C) > 0) \text{ мес } \left\{\theta : \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| > \varepsilon\right\} \geqslant \alpha,$$

мес означава Лебегову меру.

Из реченог о H^p простору значи у ствари да се H^p простор дефинише као скуп класа аналитичких функција f у отвореном јединичном кругу, за које је функција $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ ограничена по L_p-норми раније уведеној у простор полинома. Ако је $1 < p \leqslant +\infty$ простор H^p се може идентификовати са простором оних L_p-функција на кружници, за које је

$$\int e^{in\theta} f(\theta)d\theta = 0, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

При том се користи само хармоничност функција из H^p. У случају $p = 1$, чињеница да је функција из H^1 хармонијска омогућава нам да изједначимо функцију f са коначном мером μ на кружници (тј. f је Пуасонов интеграл мере μ). Чињеница што је f аналитичка, говори у ствари да је мера μ "аналитичка", тј. да је

$$\int e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Према Рисовој теореми о репрезентацији, имамо да је $d\mu = \frac{1}{2\pi}\widetilde{f}d\theta$, где $\widetilde{f} \in L^1$, и коначно, f је Пуасонов интеграл функције $\widetilde{f}$. Функције f_r конвергирају функцији $\widetilde{f}$ по норми простора L^1, и гранични однос за нетангентни смер

$$\widetilde{f}(\theta) = \lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$$

важи с.с. за све θ. На основу реченог можемо изједначити H^1 са простором L^1-функција на кружници, које су "аналитичке" тачно тако као што смо радили са простором $H^p, p > 1$.

Сада смо у позицији да формулишемо више важних особина H^p-функција на кружници, али ми ћемо се задржати на једном главном за наша даља разматрања: **ЈЕНСЕНОВОЈ НЕЈЕДНАКОСТИ**.

Теорема 2.4. *Нека је f произвољна функција из H^1 за коју је*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \neq 0.$$

Тада је функција $\log|f(\theta)|$ интеграбилна у Лебеговом смислу и важи

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(\theta)|d\theta \geqslant \log|f(0)|. \tag{2.17}$$

Последице.
$(\mathbf{1})$ За произвољну ненулту функцију из H^1 важи да је функција $\log|f(\theta)|$ интеграбилна, и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(\theta)|d\theta \geqslant \log|f(0)|.$$

◀ Можемо ставити да је $f(z) = z^n g(z), g(0) \neq 0$. Јасно је да g припада H^1 и да је $|g(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$ с.с. и остаје да се примени Теорема 2.4▶
$(\mathbf{2})$ Ако $f \in H^1$ онда f не може узимати вредност 0 на подскупу кружнице позитивне мере, осим ако је $f \equiv 0$.
◀ У супротном функција f није интеграбилна. Контрадикција.▶

Напомена 1. Неједнакост (2.17) је напросто уопштење Јенсенове неједнакости са случаја аналитичких граничних вредности на случај интеграбилних граничних вредности. Користећи претпоставку у Теореми 2.4 неједнакост (2.17) се може записати и као

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(\theta)|\frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}\right|,$$

што представља неку комутативност интеграла и логаритма.

2.6 Јенсенова неједнакост и Дирихлеове алгебре

Из претходног знамо да је за сваку ненулту функцију простора H^p функција $\log|f(\theta)|$ интеграбилна. Лакши доказ те чињенице се може добити у оквиру Дирихлеових ($Dirichlett$) алгебри. Наведимо дефиницију Дирихлеове алгебре и неколико примера.

Нека је X компактан Хауздорфов ($Hausdorff$) простор и A равномерно затворена комплексна линеарна алгебра непрекидних комплексно-вредносних функција на X, која садржи константну функцију. Кажемо да је A Дирихлеова алгебра, ако је реални део функција из A густ у смислу равномерне конвергенције на X у простору реалних непрекидних функција на X. Коначно, већ смо имали пример једне Дирихлеове алгебре-алгебра непрекидних функција на јединичној кружници, код којих су Фуријеови ($Fourier$) коефицијенти са негативним индексом једнаки нули. Ево још једног примера који укључује претходни. Нека је X компактна абелова група, чија група карактера $\widehat{X}$ садржи такву подгрупу S, да S потпуно уређује $\widehat{X}$, тј.

(I) нула (јединица) групе $\widehat{X}$ припада S;

(II) за сваки ненулти елемент $y \in \widehat{X}$ или y или $-y$ припада S, али не оба истовремено.

Нека је A-алгебра непрекидних функција на X, код које је Фуријеова трансформација једнака нули на елементима који не припадају S. Тада је A-Дирихлеова алгебра.

Нека је A Дирихлеова алгебра на компактном простору X. Ако је μ коначна позитивна беровска мера на X, онда се са $H^p(d\mu)$ означава затварање у простору $L^p(d\mu)$ функција из A. Ако је X кружница, а A наш стандардни пример, то за простор H^p имамо да је $H^p = H^p(\frac{1}{2\pi}d\theta)$. Специјални однос између алгебре A и мере $\frac{1}{2\pi}d\theta$, састоји се у томе што је мера мултипликативна на A, тј.

$$\frac{1}{2\pi}\int fgd\theta = \frac{1}{2\pi}\int fd\theta \cdot \frac{1}{2\pi}\int gd\theta,\ f, g \in A.$$

У општем случају у Дирихлеовој алгебри A се може увести произвољна ненулта позитивна беровска мера m на X, која је мултипликативна на A. Онад се прелази на изучавање простора $H^p = H^p(dm)$. Означимо са A_0 скуп функција f из A за које је $\int fdm = 0$. Следећи списак особина овако генерисаног H^p простора је од посебног интереса у функционалној анализи и теорији мере и интеграла.

$(\mathbf{1})$ Нека је μ позитивна мера на X, таква да 1 не припада затвореном потпростору $L^2(d\mu)$ који је генерисан са A_0. Нека је F-ортогонална пројекција од 1 на тај потпростор. Тада је мера $|1-F|^2 d\mu$ ненулти мултипл мере dm; функција $(1-F)^{-1}$ припада $H^2(dm)$, и ако је $h = \frac{d\mu}{dm}$, онда функција $(1-F)h$ припада простору $L^2(dm)$.

$(\mathbf{2})$ Ако је μ позитивна мера на X и $d\mu_a = \left(\frac{d\mu}{dm}\right) dm$, то је

$$\inf_{f\in A_0}\int |1-f|^2 d\mu = \inf_{f\in A_0}\int |1-f|^2 d\mu_a.$$

Специјално, ако је мера μ узајамно сингуларна са мером m, онда 1 припада затвореном потпростору $L^2(d\mu)$, генерисаном са A_0.

($\mathbf{3}$) Ако је μ коначна комплексна мера на X, ортогонална на A_0, онда су апсолутно непрекидни и сингуларни део мере μ (у односу на m) одвојено ортогонални на A_0.

($\mathbf{4}$) Ако је μ позитивна мера на X, то је

$$\inf_{f\in A_0}\int |1-f|^2 d\mu = e^{\int \log\left(\frac{d\mu}{dm}\right)dm}.$$

($\mathbf{5}$) Ако је функција f из $H^1(dm)$, таква да је $\int f dm \neq 0$, онда је функција $\log|f|$ интеграбилна по мери m и важи

$$\int \log|f| dm \geqslant \log\left|\int f dm\right|.$$

($\mathbf{6}$) Свака функција $f\in H^1(dm)$, за коју је $\int f dm\neq 0$, јесте производ две функције из $H^2(dm)$.

($\mathbf{7}$) Нека је h ненегативна функција из $L^1(dm)$. Функција h је представљива у облику $h=|f|^2$, где $f\in H^2(dm)$ и $\int f dm\neq 0$, ако и само ако, $\log h\in L^1(dm)$.

За нас је од посебног интереса особина ($\mathbf{5}$) која представља Јенсенову неједнакост за функције из простора $H^1(dm)$.

Иначе, важно је напоменути, да интеграбилност логаритма произвољне ненулте функције не следи у случају произвољне Дирихлеове алгебре. Особина ($\mathbf{5}$) каже да је

$$\log\left|\int f dm\right| \leqslant \int \log|f| dm,$$

одакле следи да је $\log|f|$ интеграбилна функција уколико је $\int f dm \neq 0$. Али ако је $\int f dm = 0$ а $f\neq 0$, то може да се догоди да $\log|f|$ није интеграбилна. У случају Дирихлеових алгебри доказ Јенсенове неједнакости је доста једноставнији, скоро елементаран, у односу на случај простора H^1. У наставку ћемо изложити тај доказ. [48], [51], [52].

◄ Нека су X, A и m као горе. Нека је f произвољна функција из A. Означимо са $\widehat{F}(m)$ интеграл $\int f dm$. Желимо да покажемо да је

$$\int \log|f| dm \geqslant \log\left|\widehat{f}(m)\right|.$$

Узмимо $\varepsilon > 0$; тада је $\log(|f|+\varepsilon)$-реална непрекидна функција на X. Следи, можемо наћи такву функцију $g = u+iv$ из A, да буде

$$|u-\log(|f|+\varepsilon)| < \varepsilon \text{ на} X,$$

тј.

$$u-\varepsilon < \log(|f|+\varepsilon) < u+\varepsilon.$$

Нека је $h = e^{-g}$, онда је $h\in A$ и $|h| = e^{-u}$. На X онда имамо

$$|fh| = |fe^{-g}| = |f|e^{-u} < e^{\varepsilon}$$

за наш избор функције g. Пошто је мера m мултипликативна на A, то такође имамо

$$\widehat{f}(m)\widehat{h}(m) = \widehat{(fe^{-g})}(m) \text{ и}$$

$$\left|\widehat{f}(m)\right| \cdot \left|\widehat{h}(m)\right| \leqslant \sup_X |fe^{-g}| < e^{\varepsilon}.$$

Зато је

$$\log\left|\widehat{f}(m)\right| + \log\left|\widehat{h}(m)\right| < \varepsilon,$$

или

$$\log\left|\widehat{f}(m)\right| - \widehat{u}(m) < \varepsilon.$$

Даље, на X имамо $u < \varepsilon + \log(|f| + \varepsilon)$; следи,

$$\widehat{u}(m) < \varepsilon + \int \log(|f| + \varepsilon)dm,$$

тј. добијамо

$$\log\left|\widehat{f}(m)\right| < 2\varepsilon + \int \log(|f| + \varepsilon)dm.$$

Узимајући граничну вредност кад $\varepsilon \to 0$ долазимо до Јенсенове неједнакости за произвољну функцију f из A.

За доказ неједнакости кад функција f припада простору $H^1(dm)$, треба само апроксимирати f у $L^1(dm)$ функцијом из A. ►

2.7 Уопштена Јенсенова формула

Вратимо се опет фамозном простору $H^p\,(0 < p \leqslant +\infty)$ и једној функцији $f(z)$ из тог простора. Означимо са $Z_\triangle(f)$ све нуле дате функције у скупу $\{z : 0 < |z| < 1\}$ рачунајући њихову вишеструкост. Тада

$$B(z) := \begin{cases} z^N \displaystyle\prod_{z_j \in Z_\triangle(f)} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j}z}, & ako\;\; Z_\triangle(f) \neq 0\;\;, \\ z^N, & ako\;\; Z_\triangle(f) = 0\;\;, \end{cases}$$

је **Блашкеов производ** ($Blaschke$) придружен функцији $f(z)$, и $B(z) \in H^\infty$, где је N вишеструкост 0 као нуле функције $f(z)$. Ако је $f(0) \neq 0$, тада узимамо да је $N = 0$.

Даље

$$F(z) := e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log\left|\widehat{f}\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta}$$

је **спољашња** функција придружена функцији $f(z)$, и $F(z) \in H^p$. Настављајући даље

$$S(z) := \frac{f(z)}{B(z)F(z)}$$

зове се **сингуларна унутрашња** функција придружена функцији $f(z)$. Напоменимо да су једине нуле функције $f(z)$ у скупу $\{z : 0 \leqslant |z| < 1\}$ управо нуле Блашкеовог производа, $B(z)$. Производ, $B(z)F(z)$, зове се **унутрашња** функција придружена функцији $f(z)$ [45].

Теорема о факторизацији гласи:

Нека је $f(z) \neq 0$ функција из H^1 у јединичном кругу. Тада се f на јединствен начин представља као $f = BSF$, где је B Блашкеов производ, S сингуларна функција, и F спољашња функција (из H^1).

Користећи горе речено и теорему о факторизацији поред многих других последица које се могу добити, за нас је од интереса најважнија **уопштена Јенсенова формула:**

Ако је $f(0) \neq 0$, онда је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta = \log|f(0)| + \sum_n p_n \log|\alpha_n|^{-1} + \int d\mu,$$

где су: α_n-нуле функције $f(z)$ у отвореном јединичном диску, p_n-њихова вишеструкост респективно и на крају μ-позитивна сингуларна мера.

Од наведених врста аналитичких функција спољашње функције су најближе интегралу $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta$ и зато за њих наводимо поближу карактеризацију [3].

Теорема 2.5. *Нека је F ненулта функција из H^1. Следећи услови су еквивалентни:*

($\mathbf{a}$) *F је спољашња функција;*

($\mathbf{b}$) *Ако је f произвољна функција из H^1 таква да је $|f| = |F|$ с.с. на јединичној кружници, то је $|F(z)| \geqslant |f(z)|$ у свакој тачки z отвореног јединичног круга;*

($\mathbf{c}$) $\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log\left|F\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta.$

Значи функције код којих Јенсенова неједнакост прелази у једнакост су једине спољашње функције. Између осталих, такве су константе различите од нуле и оне функције које немају нула у јединичном диску.

2.8 Јенсенов функционал и Малерова мера

Ако је f ненулта функција из Хардијевог простора H^1 онда је функција $\log|f(e^{i\theta})|$ интеграбилна у Лебеговом смислу и важи неједнакост

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log|f(0)| \tag{2.18}$$

(у литератури се зове класична Јенсенова неједнакост). Интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi}$ зове се и Јенсенов функционал и означава са $J(f)$, тј. записује се $J(f) = \int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi}$. Функција J је нелинеарна реално вредносна функција за коју је $J(\lambda f) - J(f) = \log|\lambda|$, $\lambda \neq 0$.

Оцена дата Јенсеновом неједнакошћу има важну улогу, на пример у вези са Малеровом ($Mahler$) мером:

$$M(f) = e^{J(f)},$$

која је важна нарочито у теорији бројева (видети [27] и [48]).

Једна од слабости оцене (2.18) је што узима у обзир само први члан $a_0 = f(0)$ функције $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$.

2.9 Доње и горње границе Јенсеновог функционала

Из саме природе логаритамске функције реалног аргумента и Јенсенове неједнакости очигледно је да можемо игнорисати скуп на коме $|f(e^{i\theta})|$ постиже велику вредност. Интересантни су скупови на којима је функција $|f(e^{i\theta})|$ мала, јер на њима Јенсенов функционал узима негативне вредности. Другим речима, за Јенсенов функционал дефинисан на неком скупу аналитичких ненултих функција или само полинома, дефинитивно је јасно да је од велике важности испитивати његове **доње границе**.

Нека је X неки подскуп ненултих аналитичких функција Хардијевог простора H^1. За сваку функцију $f \in X$ функција $\log|f(e^{i\theta})|$ је интеграбилна у Лебеговом смислу и важи неједнакост

$$\int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log|f(0)|,$$

која се у литератури најчешће зове класична Јенсенова неједнакост. За функције $f \in X$ природно се уводе

$$i = \inf_{f\in X} J(f) \ \text{ и } \ s = \sup_{f\in X} J(f)$$

који могу бити и $-\infty$ и $+\infty$, где је $J(f) = \int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi}$ Јенсенов функционал. За функције $g(z)$ и $h(z)$ из скупа X се каже да су екстремалне ако је $i = J(g)$ и $s = J(h)$.

Пример 2.1. *Нека је X скуп константи C различитих од нуле, тј. скуп свих комплексних бројева осим* 0*. Онда је*

$$J(f) = \int\limits_0^{2\pi} \log|C| \frac{d\theta}{2\pi} = \log|C|$$

те је $i = \inf\limits_{f\in X} J(f) = \inf\limits_{0\neq C\in\mathbb{C}} \log|C| = -\infty$ и $s = \sup\limits_{f\in X} J(f) = \sup\limits_{0\neq C\in\mathbb{C}} \log|C| = +\infty$. Овде екстремалне функције не постоје.

Пример 2.2. *Нека је* $X = \{z^n; n \in \mathbb{N}\}$. *Онда је*

$$J(f) = \int_0^{2\pi} \log\left|e^{in\theta}\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log 1 \frac{d\theta}{2\pi} = 0, \text{ за свако} n \in \mathbb{N},$$

те је $i = s = 0$. *Примећујемо да је десна страна у класичној Јенсеновој неједнакости* $-\infty$, *што показује да ниједна од функција* z^n *није спољашња. У овом примеру је свака функција и екстремална.*

Пример 2.3. *Наводимо први нетривијални пример за одређивање инфимума и супремума Јенсеновог функционала. Нека је* $\mathcal{P}_n$ *скуп свих комплексних полинома тачно степена* n. *Из* [29] *знамо да је*

$$\log \frac{|f|_{l_1}}{2^n} \leqslant J(f) = \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \log |f|_{l_1}.$$

Наведена двострука неједнакост је еквивалентна са

$$-n \log 2 \leqslant \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{|f|_{l_1}} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant 0,$$

што показује да је за све полиноме $f(z)$ *из* $\mathcal{P}_n$ *чија је* l_1*-норма једнака јединици испуњено*

$$-n \log 2 \leqslant J(f) \leqslant 0.$$

За тај скуп полинома (функција) постоје екстремалне функције у којима је постигнут инфимум $i = -n \log 2$ *и супремум* $s = 0$. *Заиста, узимајући* $g(z) = \frac{1}{2n}(1+z)^n$ *и* $h(z) = z^n$, *добијамо да је* $J(g) = -n \log 2$ *и* $J(h) = 0$. *Каже се да је* $-n \log 2$ *најбоља (највећа) доња граница Јенсеновог функционала на скупу полинома степена* n *и јединичне* l_1*-норме и да је постигнута у полиному* $g(z)$. *Због раније наведене природе логаритамске функције најмања горња граница се ретко истиче, али у овом случају је и постигнута у полиному* $h(z)$.

3

Концентрација полинома у нижем степену

Последњи пример показује да у наведеним доњим и горњим границама поред функције учествује степен полинома, што у многим практичним проблемима отежава посао. Зато је од интереса изналазити доње и горње границе Јенсеновог функционала које не зависе од степена полинома и онда одређивати инфимум и супремум бројног скупа $\{J(f)\ :\ f$ задовољава неко својство$\}$. У примерима 2.1 и 2.2 својства су таква да се обичним рачуном налазе најбоље границе Јенсеновог функционала. Пример 2.3, видеће се касније, је последица такве особине уведене у скупу полинома или неком подскупу аналитичких функција која се показала јако делотворном у решавању неких проблема инваријантности у теорији ограничених линеарних оператора на Банаховим ($Banach$) и Хилбертовим ($Hilbert$) просторима. Та особина зове се **"КОНЦЕНТРАЦИЈА ПОЛИНОМА У НИЖЕМ СТЕПЕНУ"**. Увели су је пре двадесетак година француски математичари П. Енфло [21] и Б. Бозами [5], решавајући проблем нетривијалног инваријантног потпростора ограниченог линеарног оператора на бесконачно димензионалном сепарабилном Банаховом простору. Напоменимо да је користећи то својство решење проблема негативно. Још увек је отворено аналогно питање за Хилбертове просторе. Као што се обично дешава у математици, уведеним појмом "рађају" се нови појмови и нова интересантна а и тешка питања. Такав је случај и са концентрацијом полинома у нижем степену.

Дефиниција 3.1. *Нека су $d \in]0,1]$ и $k \in \mathbb{N}_0$ фиксирани бројеви и нека је $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j \neq 0$ комплексан полином. Каже се да полином $f(z)$ има концентрацију d у највише степену k ако је*

$$\sum_{j\leqslant k} |a_j| \geqslant d \sum_{j\geqslant 0} |a_j|. \tag{3.1}$$

Услов (3.1) очигледно има смисла и у граничном случају броја $d = 1$, одакле проистиче да је тада полином тачно степена k. То значи ако је $d = 1$, из (3.1) директно следи $n = k$. Ако је испуњено (3.1) рећи ћемо да полином f има концентрацију d у степену k мерену l_1-нормом у односу на l_1-норму. Услов (3.1) је особина у скупу $\mathcal{P}$ свих комплексних полинома која не зависи од степена полинома. Наравно, замена за то су две константе d

и k. Да би смо случај усагласили са претходним разматрањима доњих и горњих граница Јенсеновог функционала, узећемо да је $X = \mathcal{P}_{d,k}$. Онда имамо следећа два проблема: наћи

$$i = \inf_{f \in \mathcal{P}_{d,k}} J(f) \ \text{ и } \ s = \sup_{f \in \mathcal{P}_{d,k}} J(f).$$

Јасно је да бројни скуп $\{J(f)\}$ постоји јер је за сваки полином $f(z)$ функција $\log|f(e^{i\theta})|$, $\theta \in [0, 2\pi]$ интеграбилна у Лебеговом смислу. Узимајући полиноме чија је l_1-норма једнака 1, тј. за које је

$$|f|_1 = 1 \tag{3.2}$$

што у суштини не утиче на општост разматрања главних питања, услов (3.1) постаје

$$\sum_{j \leqslant k} |a_j| \geqslant d. \tag{3.3}$$

Вратимо се сада за тренутак случају $d = 1$. Тада је користећи (3.2) и (3.3) $X = \mathcal{P}_{d,k} = \mathcal{P}_{1,n}$, тј. X је скуп полинома тачно степена k и онда је према примеру 2.3 претходне секције

$$i = -k \log 2 \ \text{ и } \ s = 0.$$

Иако је [29] из 1966. године, пример 2.3 је једна примена (специјалан случај) ново-уведеног појма доста касније.

Појам "концентрација полинома" је у блиској вези са класичном Јенсеновом неједнакошћу. Заиста, узимајући $k = 0$, тада због $a_0 = f(0)$, (3.3) постаје

$$|a_0| \geqslant d \Leftrightarrow |f(0)| \geqslant d \Leftrightarrow \log|f(0)| \geqslant \log d,$$

што значи да за полиноме из скупа $\mathcal{P}_{d,0}$ важи

$$0 \geqslant J(f) \geqslant \log|f(0)| \geqslant \log d.$$

Одатле следи да су инфимум i и супремум s скупа $\{J(f)\}$ коначни. Питање екстремалне функције за овај случај (иако је $k = 0$ мало), биће расправљено касније у једној од опсервација.

Постоје и други корисни начини увођења концентрације полинома или аналитичке функције али користећи друге норме или чак квази-норме. И тада је једно од главних питања одређивање тачне (најбоље) доње и горње границе Јенсеновог функционала тј. бројног скупа $\{J(f) : f \text{има неку концентрацију}\}$. Испоставило се да је у општем случају како екстремалне функције тако и те тачне границе "тешко" одређивати. Зато се посегло за њиховим асимптотским понашањем када $k \to +\infty$ што нас на неки начин "приближава" тачној доњој и горњој мећи. Поред наших резултата у вези са тим најпре ћемо изложити два позитивна резултата о тачним границама.

У првом случају [44] посматра се скуп $X = \mathcal{P}^H_{d,k}$ Хурвицових полинома који задовољавају (3.1). Благодарећи добрим особинама H-полинома одређена је тачна доња граница и показано да постоји екстремална функција.

Наводимо те резултате.

Теорема 3.1. [44] *Нека је* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_j z^j \neq 0$*, аналитичка функција у* $|z| < 1$*, и нека* $d \in]0,1[$*, и претпоставимо да важи*

$$|a_0| \geqslant d \sum_{j=0}^{+\infty} |a_j|. \tag{3.4}$$

Тада $f \in H^\infty$ *и*

$$J(f) \geqslant \log d = i. \tag{3.5}$$

Једнакост у (3.5) важи (тј. f је екстремална функција) ако и само ако $f(z)$ је њена придружена спољашња функција помножена константом модула 1 и у (3.4) важи једнакост. То другим речима значи да је аналитичка функција у $|z| \leqslant 1$ (затворен диск) екстремална ако и само ако нема нула у $|z| < 1$ (отворен диск) и једнакост важи у (3.4).

Напомена 1. Овом теоремом је дефинитивно расправљен случај најбоље доње границе i Јенсеновог функционала тј. бројног скупа $\{J(f)\}$ у случају да $f(z)$ има концентрацију $d \in]0,1[$ у степену $k = 0$.

Теорема 3.2. [44] *За* $d \in]0,1[$ *и за позитиван цео број* k *ако је* $f(z)$ *Хурвицов полином тако да је испуњено* (3.1) *онда бројни скуп* $\{J(f)\}$ *има коначан инфимум који зависи од* d *и* k *и постоји екстремални полином у коме је тај инфимум постигнут.*

Другим речима најбоља доња граница Јенсеновог функционала на скупу Хурвицових полинома који задовољавају (3.1) је постигнута у неком таквом полиному.

Описаћемо укратко главне кораке конструкције доње међе и екстремалне функције.

I корак: Најпре за дате d и $k > 0$ постоји јединствен природан број m такав да је

$$\frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \leqslant d < \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{m-1}{j}.$$

II корак: За такво m дефинише се

$$\rho := \frac{\binom{m-1}{k}}{\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m-1}{j} - d2^{m-1}} - 1.$$

III корак: Тада је $J(f) \geqslant \log \frac{\rho}{(\rho+1)2^{m-1}} = i$ за сваки H-полином који задовољава (3.1).

IV корак: Дефинишимо $g(z) := \left(1 + \frac{z}{\rho}\right)(1+z)^{m-1}$ која је очигледно H-полином. Сада имамо: H-полином $f(z)$ који задовољава (3.1) је екстремалан ако и само ако $f(z) = g(z)$.

Истакнимо да су случајеви $k = 0$ и $k > 0$ одређивања екстремалних функција битно различити. Наиме, за $k = 0$, ако постоји екстремална функција онда их има бесконачно много; за $k > 0$ екстремална функција постоји и она је јединствена.

За доказивање првог корака аутори користе низ

$$\left\{ \frac{1}{2^l} \sum_{j=0}^{k} \binom{l}{j} \right\}_{l=k}^{+\infty}$$

и за њега доказују да строго опада и користећи централну граничну теорему да конвергира ка нули. Да наведени низ конвергира нули, може се доказати и елементарно-применом Штолцовог ($Stolz$) става. Заиста,

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{l+1}{j} - \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{l}{j}}{2^{l+1} - 2^l} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{l}{j}}{2^l},$$

затим опет по Штолцовом ставу

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{l+1}{j} - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{l}{j}}{2^{l+1} - 2^l} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-2} \binom{l}{j}}{2^l},$$

итд. јер се именилац не мења а број сабирака у бројиоцу се у сваком следећем кораку смањи за један; коначно се добија да је гранична вредност датог низа једнака

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{\binom{l}{0}}{2^l} = 0.$$

У другом случају [6] разматрају се функције из простора H^∞ са нормом $\|f\|_\infty = \sup\limits_\theta |f(e^{i\theta})| = 1$ (што обухвата и полиноме), које задовољавају

$$\sum_{j \leqslant k} |a_j| \geqslant d\|f\|_\infty = d. \tag{3.6}$$

За разлику од првог случаја где су нађене најбоља доња граница и екстремална функција за фиксиране $d \in]0, 1[$ и $k \in \mathbb{N}$, у овом случају је решен проблем само за $k = 1$. Дакле, X је скуп свих аналитичких функција из H^∞ са нормом $\|f\|_\infty = 1$ за које је

$$|a_0| + |a_1| \geqslant d. \tag{3.7}$$

Теорема 3.3. [6] *За свако $f \in X$ и f задовољава* (3.7) *бројни скуп $\{J(f)\}$ има коначан инфимум c који је једнак јединственом решењу c једначине*

$$e^c(1 - 2c) = d.$$

Нема екстремалних функција овог случаја, али постоји низ F_n спољашњих функција за које је

$$\int \log|F_n| \to c = i.$$

Описаћемо укратко конструкцију:

1^0 Најпре се функција из x на јединствен начин представи у облику

$$f = B \cdot S \cdot F$$

производа Блашкеовог фактора B, сингуларне функције S и спољашње функције F.

2^0 Докаже се да на доњу међу не утиче Блашкеов фактор B, тј. i не зависи од B.

3^0 Затим се докаже да је инфимум i исти ако се склони и сингуларна функција S, тј. довољно је претпоставити да X садржи само спољашње функције.

Из ова два позитивна резултата проистиче неочекивана разлика како за доње међе, тј. најбоље доње границе, тако и за екстремалне функције, без обзира што је у другом случају $k = 1$, дакле, мали природан број у односу на било које позитивно k. Није тешко проверити да је случај $k = 0$ исти и за концентрацију мерену l_1-нормом у односу на l_1-норму, тј. концентрацију мерену l_1-нормом у односу на $\|\cdot\|_\infty$-норму.

3.1 Резултати

У овој секцији и њеним подсекцијама изложићемо наше резултате, опсервације и напомене које смо добили разматрајући најбоље доње и горње границе Јенсеновог функционала дефинисаног на таквим подскуповима $X \subseteq \mathcal{P}$ чији елементи имају концентрације дефинисане у односу на познате норме или квази норме које се у тим просторима природно уводе. Тиме смо употпунили неке наше доприносе у расветљавању појма "концентрација полинома у нижем степену" дате у предговору и уводној глави.

Наводимо најпре једну опсервацију која је сама по себи интересантна и која боље одсликава појам концентрације полинома у нижем степену.

Опсервација 3.1. *Ако комплексни полином* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$ *има концентрацију* $d \in [\frac{1}{2}, 1]$ *у* $k = 0$ *тада он нема нула у отвореном јединичном диску.*

◄ Наведени услов значи да је

$$|a_0| \geqslant d(|a_0| + |a_1| + \cdots |a_n|). \tag{3.8}$$

Ако постоји $|z_0| < 1$ тако да је $f(z_0) = 0$, тада је

$$|a_0| = |-a_1 z_0 - a_2 z_0^2 - \cdots - a_n z_0^n| < |a_1| + \cdots + |a_n|$$

тј.

$$2|a_0| < |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

са једне стране; са друге стране из (3.8) проистиче

$$2|a_0| \geqslant 2d(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|). \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следи $2d < 1$, тј. $d < \frac{1}{2}$. Контрадикција! ►

Примери полинома $z \mapsto 2z - 1$ и $z \mapsto 1 + z + z^2$ показују да у случају $d \in]0, \frac{1}{2}[$ претходна опсервација није тачна, наиме, може да буде и једно и друго.

3.1.1 Упоређивање "концентрација"

У овој подсекцији упоређујемо "концентрације" тј. услове како је појединa концентрација дефинисана, и добијамо која је најопштија.

Тврђење 3.1. *Нека су $d \in]0, 1[$ и $k \in \mathbb{N}$ фиксирани и нека је $f(z)$ аналитичка функција тј. полином, тако да је:*

(**a**) $\sum\limits_{j \leqslant k} |a_j| \geqslant d \sum\limits_{j \geqslant 0} |a_j| = d|f|_{l_1}$;

(**b**) $\left(\sum\limits_{j \leqslant k} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant d \left(\sum\limits_{j \geqslant 0} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = d|f|_{l_2}$;

(**c**) $\sum\limits_{j \leqslant k} |a_j| \geqslant d\|f\|_\infty$.

Тада $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$.

◄ $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$ у смислу да ако f има неку концентрацију у неком степену мерену l_1-нормом у односу на l_1-норму, тада f има неку (не обавезно исту) концентрацију у неком (не мора истом) степену мерену l_2-нормом, и слично за $(c) \Rightarrow (b)$. Напоменимо најпре да из услова (a)

$$\sum_{j \leqslant k} |a_j| \geqslant d \sum_{j \geqslant 0} |a_j| = d|f|_{l_1}$$

следи

$$\sum_{j \leqslant l} |a_j| \geqslant d \sum_{j \geqslant 0} |a_j| = d|f|_{l_1},$$

за свако $l > k$, и тако за услове (b) и (c). Одатле проистиче да је услов "имати концентрацију у нули" најјачи. Из сва три услова следи да концентрација d повлачи концентрацију d' кад год је $0 < d' < d$. Докажимо сада да $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$. Пошто је $|f|_{l_1} \geqslant \|f\|_\infty$ то $(a) \Rightarrow (c)$ са истим d и истим k.

Докажимо најпре да је $|f|_{l_2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}|f|_{l_1}$. То следи из чињенице да је аритметичка средина ненегативних бројева мања или једнака од њихове квадратне средине, тј.

$$\frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|}{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}{n+1}}$$
$$\Rightarrow |f|_{l_2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}|f|_{l_1}. \tag{3.10}$$

Сада претпоставимо да је (c) тачно, тј. $\sum\limits_{j\leqslant k}|a_j|\geqslant d\|f\|_\infty$. Тада је према (3.10)

$$\left(\sum_{j\leqslant k}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{k+1}}\sum_{j\leqslant k}|a_j|\geqslant\frac{d}{\sqrt{k+1}}\|f\|_\infty\geqslant\frac{d}{\sqrt{k+1}}|f|_{l_2}$$

јер је $\|f\|_\infty\geqslant|f|_{l_2}$, што значи да је (b) тачно. Доказ је завршен. ►

Напомена 2. Из примера $f(z)=1+z+z^2,\ k=0,\ d\geqslant\frac{1}{2}$ се види да из (b) не следи (a). Из свега реченог и доказаног у претходном тврђењу проистиче да је услов (b) најопштији начин мерења концентрације у односу на $l_1,\ l_2$ и ∞-норму. Зато је и најцелисходније испитивати најбоље доње границе и екстремалне функције Јенсеновог функционала у случају када је концентрација мерена l_2-нормом.

Следећу опсервацију треба имати на уму:

Опсервација 3.2. *Ако Ако је $f(z)$ аналитичка функција тј. полином са $\|f\|_\infty=1$, тада су следећи услови еквивалентни:*

(**1**) $\sum\limits_{j\leqslant k}|a_j|\geqslant d\|f\|_\infty=d;$

(**2**) $\left(\sum\limits_{j\leqslant k}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant d\|f\|_\infty=d,\ p\in]1,2[;$

(**3**) $\left(\sum\limits_{j\leqslant k}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant d\|f\|_\infty=d.$

Сада је време за опсервацију која се односи на гранични случај концентрације $d=1$. Ако је у (3.1) или (3.3) $d=1$ тада је очигледно функција тј. полином $f(z)$ тачно степена k и онда је питање доњих граница и екстремалних функција дато у [29].

Опсервација 3.3. *Ако функција $f(z)$ има концентрацију $d=1$ у степену k мерену l_1-нормом у односу на $\|\cdot\|_\infty$-норму функција тј. полином не мора бити тачно степена k.*

У ту сврху имамо пример. Нека је $f(z)=1-2z-z^2$. Имамо да је

$$f(e^{i\theta})=1-2e^{i\theta}-e^{2i\theta}=(1-2\cos\theta-\cos2\theta)+i(-2\sin\theta-\sin2\theta)$$

одакле је

$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^2&=(1-2\cos\theta-\cos2\theta)^2+(-2\sin\theta-\sin2\theta)^2\\&=6-2\cos2\theta\Rightarrow\max_\theta\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Сада услов за концентрацију $d=1$ у степену $k=1$ гласи

$$|1|+|-2|\geqslant1\cdot2\sqrt{2}\Leftrightarrow3\geqslant2\sqrt{2}\Leftrightarrow9\geqslant8,$$

што је тачно. Међутим, није степен функције $f(z)$ једнак 1, јер је $1-2z\neq1-2z-z^2$.

Опсервација 3.4. *Овде ћемо детаљније расправити питање најбоље доње границе и екстремалне функције када је дата концентрација у степену* $k = 0$. *Нека је дат скуп аналитичких функција или само полинома јединичне норме који имају концентрацију* $d \in]0,1[$ *у степену* $k = 0$ *мерену на пример* l_1*-нормом у односу на* l_1*-норму. Услов за концентрацију у степену* $k = 0$ *гласи:*

$$|a_0| \geqslant d. \tag{3.11}$$

Тада је због Јенсенове класичне неједнакости

$$J(f) \geqslant \log|f(0)| = \log|a_0| \geqslant \log d = i. \tag{3.12}$$

Ако је у (3.11) *испуњена једнакост, тада према* (3.12) *следи*

$$J(f) \geqslant \log|a_0| = \log d = i.$$

◄ Одавде закључујемо да ли постоји или не постоји екстремална функција. Ако $d \in [\frac{1}{2}, 1[$ функција $f(z)$ према опсервацији 3.1 нема нула у отвореном јединичном диску и за њу Јенсенова неједнакост постаје једнакост, те је екстремална. Она остаје екстремална и када се помножи комплексном константом модула 1. Значи, ако у (3.11) важи једнакост и ако $d \in [\frac{1}{2}, 1[$ тада је свака спољашња функција помножена константом модула 1 екстремална функција и најбоља доња граница је J (такве фамилије)$= \log d = i$. Значи, тада има бесконачно екстремалних функција и лако их је добити. Нека сада $d \in]0, \frac{1}{2}[$. Користимо [44]: постоји природан број $m \geqslant 2$ тако да је $2^{-m} \leqslant d < 2^{-m+1}$. Онда дефинишемо $\rho := \frac{d2^{m-1}}{1-d2^{m-1}}$ и функцију $f(z) = (z+\rho)(z+1)^{m-1}$. Ако у (3.11) важи једнакост онда је опет $i = \log d$ и $J(f) = \log d$. Заиста, због

$$1 = |f|_{l_1} = f(1) = (1+\rho)2^{m-1}$$

и једнакости у (3.11) проистиче $|a_0| = d\rho(1+\rho)2^{m-1} = d$ и $a_0 = f(0) = \rho$, те је (f је спољашња функција)

$$J(f) = \log|f(0)| = \log|a_0| = \log|\rho| = \log d.$$

Доказ конструкције екстремалне функције у овом случају је завршен. У случају да у (3.11) не важи једнакост тада очигледно проблем нема екстремалну функцију. ►

У наставку излажемо један од аналитичких метода како се доказује коначност инфимума бројног скупа $\{J(f) : f \text{ има неку концентрацију}\}$.

Теорема 3.4. *Нека је* $f(z) = \sum\limits_{j\geqslant 0} a_j z^j \neq 0$ *аналитичка функција или само полином који има концентрацију* $d \in]0,1[$ *у највише степену* $k \in \mathbb{N}$ *мерену* l_p*-нормом у односу на* l_p*-норму, ако је* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Тада је*

$$\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \sup_{1<t\leqslant 3} f_{d,k}(t),$$

где је

$$f_{d,k}(t) = \begin{cases} t\log d\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{k+1} - \frac{1}{2}t^2, & 1 < p \leqslant 2 \\ t\log d\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{k+1}, & p = 1 \end{cases},$$

дакле, функција која генералише доње границе не зависи од $p \in]1,2]$.

Теорема 3.5. *Нека је* $f(z)$ *аналитичка функција или полином као у Теореми* 3.4. *Тада је*

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \sup_{1<t\leqslant 3} f_{d,k,p}(t),$$

где је

$$f_{d,k,p}(t) = \begin{cases} \frac{t}{p}\log d^p \frac{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^p - 1}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{p(k+1)} - 1} - \frac{1}{2}t^2, & 1 < p \leqslant 2 \\ t\log \frac{2d}{(t-1)\left(\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{k+1} - 1\right)}, & p = 1 \end{cases},$$

За случај $p = 1$ видети [4], Теорема 1.

За доказе наведених теорема користимо следеће добро познате чињенице: формулу за произвољни коефицијент функције (полинома) $a_j = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^j e^{ij\theta}} \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$ за $0 < r < 1$, оцену $|a_j| \leqslant |f(z_0)| \frac{1}{r^j}$, где је $|f(z_0)| = \max_{|z|=r} |f(z)|$ и класичну Јенсенову неједнакост са познатом трансформацијом

$$\log|f(z_0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\frac{z_0 + e^{i\theta}}{1 + \overline{z_0}e^{i\theta}}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{1-r^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$$

где је $|z_0| = r$. Користимо затим познату двоструку неједнакост наведену на почетку рада: за $0 < r < 1$ следи

$$\frac{1-r}{1+r} \leqslant \frac{1-r^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{1+r}{1-r},$$

као и трик растављање на два карактеристична сабирка Лебеговог интеграла

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\log|f|<0} + \int_{\log|f|>0},$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\log|f|>0} &= \frac{1}{2}\int_{\log|f|>0} \log|f|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \frac{1}{2}\int_{\log|f|>0} |f|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &< \int_0^{2\pi} |f|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2}|f|_{l_2}^2 < \frac{1}{2}|f|_{l_p}^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

јер је l_p-норма опадајућа по p. Наведене функције се онда добијају увођењем смене $t = \frac{1+r}{1-r}$.

Стављајући $t = 2$ и $1 < p \leqslant 2$, добијамо оцену из [5]:

$$J(f) = \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant 2\log\frac{d}{e\cdot 3^{k+1}}.$$

Значај ове оцене је што се уместо првог члана у класичној Јенсеновој неједнакости јавља $k+1$ члан. Овај резултат показује да бројни скуп $\{J(f)\}$ где $f(z)$ има неку концентрацију, има коначан инфимум $i = i_{d,k,p}$, који зависи само од d, k и p.

Узимајући $p = 2$ у функцији $f_{d,k,p}(t)$ добијеној у Теореми 3.5 добијамо функцију

$$f_{d,k,2}(t) = t\log\frac{2d}{t-1}\sqrt{\frac{t}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{2k+2}-1}} - \frac{1}{2}t^2,$$

као одговор на питање постављено у [4], страна 223. Ова функција је добијена када се претпостави да полином има најопштију концентрацију (погледати Напомену 2).

Из следеће теореме и последица 10, 11 и 12 следи да та оцена није најбоља могућа.

Теорема 3.6. *Нека је $f(z)$ полином као у Теореми* 3.4. *Тада постоји $t_k \in]1,3]$ тако да је*

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant f_{d,k}(t_k) \geqslant \begin{cases} 2\log\frac{d}{e\cdot 3^{k+1}}, & 1 < p \leqslant 2 \\ 2\log\frac{d}{3^{k+1}}, & p = 1 \end{cases}.$$

◀ Најпре видимо да је $\lim\limits_{t\to 1+} f_{d,k}(t) = -\infty$ и да функција $f_{d,k}(t)$ има облик

$$f_{d,k}(t) = t\log d + t(k+1)\log(t-1) - t(k+1)\log(t+1) - \frac{t^2}{2},\ \ 1 < p \leqslant 2.$$

Налазимо први, други и трећи извод:

$$\begin{aligned} f'_{d,k}(t) &= \log d + (k+1)\log(t-1) - (k+1)\log(t+1) \\ &\quad - t + t(k+1)\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) \\ f''_{d,k}(t) &= \frac{2(k+1)}{t-1} - \frac{2(k+1)}{t+1} - 1 + t(k+1)\left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2}\right) \\ f'''_{d,k}(t) &= \frac{3(k+1)}{(t+1)^2} - \frac{3(k+1)}{(t-1)^2} + 2t(k+1)\left(\frac{1}{(t-1)^3} - \frac{1}{(t+1)^3}\right). \end{aligned}$$

Јасно је да је $\lim\limits_{t\to 1+} f''_{d,k}(t) = -\infty$ и $f''_{d,k}(3) < 0$. Пошто је $f'''_{d,k}(t) > 0$, $t \in]1,3]$, следи да је $f''_{d,k}(t) < 0$, што значи да $f'_{d,k}(t)$ опада. Такође видимо да је $\lim\limits_{t\to 1+} f'_{d,k}(t) = +\infty$. Значи, постоји тачно једна вредност $t_k \in]1,3]$ тако да је $f'_{d,k}(t_k) = 0$ или $f'_{d,k}(t) > 0$ за све $t \in]1,3]$. Тиме је теорема доказана. Случај $p = 1$ се може слично разматрати. ►

Последица 3.1. *Нека је* $f(z)$ *полином као у Теореми* 3.4. *Тада за свако* $d\ \in]0,1]$ *и* $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ *постоји* $t_k\ \in]1,2[$*, тако да је*

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant f_{d,k}(t_k) > 2\log\frac{d}{e\cdot 3^{k+1}},\quad 1 < p \leqslant 2.$$

За случај $p = 1$ *сличан резултат не важи.*

◀ Пошто је

$$f'_{d,k}(3) = \frac{4}{3}k - \frac{2}{3} - (k+1)\log 3 + \log d = 0,235k - 1,773 + \log d,\quad \log 3 = 1,098$$

следи да је $f'_{d,k}(2) < 0$, за свако $d\ \in]0,1]$ и $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Дакле,

$$\max_{1<t\leqslant 3} f_{d,k}(t) > f_{d,k}(2) = 2\log\frac{d}{e\cdot 3^{k+1}}.$$

Ако је $p = 1$, имамо

$$f'_{d,k}(2) = \left(\frac{4}{3} - \log 3\right)k + \left(\frac{4}{3} - \log 3\right) + \log d = 0,235k + 0,235 + \log d,$$

што је промењивог знака. ▶

Последица 3.2. *Нека је* $f(z)$ *полином као у Теореми* 3.4. *Тада за свако* $d\ \in]0,1]$ *постоји* $k_1 \in \mathbb{N}$ *тако да је за* $k > k_1$*:*

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant f_{d,k}(3) = \left\{\begin{array}{ll} 3\log\frac{d}{e^{\frac{3}{2}}2^{k+1}}, & 1 < p \leqslant 2 \\ 3\log\frac{d}{2^{k+1}}, & p = 1 \end{array}\right.,$$

$$> \left\{\begin{array}{ll} 2\log\frac{d}{e\cdot 2^{k+1}}, & 1 < p \leqslant 2 \\ 2\log\frac{d}{3^{k+1}}, & p = 1 \end{array}\right..$$

◀ Пошто је

$$f'_{d,k}(3) = \frac{3}{4}k - \frac{9}{4} - (k+1)\log 2 + \log d = 0,057k - 2,943 + \log d,$$

то је $\max\limits_{1<t\leqslant 3} f_{d,k}(t) = f_{d,k}(3)\ \ (1 < p \leqslant 2)$ ако и само ако $f'_{d,k}(3) \geqslant 0$. Дакле, следи да је

$$k_1 = \left[\frac{\frac{9}{4} + \log 2 - \log d}{\frac{3}{4} - \log 2}\right] = [51,634 - 17,543\log d].$$

Аналогно за $p = 1$ постоји одговарајуће k_1. ▶

Последица 3.3. *Нека је* $f(z)$ *полином као у Теореми* 3.4. *Тада за свако* $d \in]0,1]$ *и* $k \in \{0,1,2,3,\dots,50,51\}$, *постоји* $t_k \in]1,3]$, *тако да је*

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant f_{d,k}(t_k) > f_{d,k}(3) = 3\log\frac{d}{e^{\frac{3}{2}}2^{k+1}}, \quad 1 < p \leqslant 2.$$

◄ То очигледно следи из једнакости

$$f'_{d,k}(3) = \frac{3}{4}k - \frac{9}{4} - (k+1)\log 2 + \log d = 0,057k - 2,943 + \log d, \quad 1 < p \leqslant 2.$$

Пошто за $p = 1$ имамо

$$f'_{d,k}(3) = 0,057k + 0,057 + \log d,$$

следи да закључак није исти као у случају $1 < p \leqslant 2$. ►

3.1.2 Асимптотске оцене доње међе

У теоремама 3.4, 3.5 и 3.6 нашли смо неколико врста функција које доказују да бројни скуп $\{J(f)\}$ има коначну доњу међу i под условом да $f(z)$ има концентрацију $d \in]0,1[$ у степену k мерену l_p-нормом у односу на l_p-норму. Још смо претпоставили (што не утиче на општост) да је l_p- норма сваког полинома једнака један. Наравно, доња међа $i = i_{d,k,p}$ зависи само од фиксираних константи d, k и p. У овој подсекцији оценићемо асимптотски са обе стране величину $i_{d,k,p}$, $d \in]0,1[$, $p \in]1,2]$, и $k \to +\infty$. Наиме, доказаћемо следећу теорему.

Теорема 3.7. *За најбољу константу тј. најбољу доњу границу* $i_{d,k,p}$ *за довољно велико* k *важи:*

$$-2k \leqslant i_{d,k,p} \leqslant -2k\log 2.$$

◄ Најпре, представимо функцију $f_{d,k,p}(t)$ у облику

$$f_{d,k,p}(t) = h_{d,p}(t) + g_k(t) - \frac{t}{p}\cdot\log\left(1 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{p(k+1)}\right),$$

где су

$$h_{d,p}(t) = t\cdot\log d - \frac{1}{2}t^2 + \frac{t}{p}\cdot\log((t+1)^p - (t-1)^p)$$
$$g_k(t) = kt\cdot\log(t-1) - (k+1)t\cdot\log(t+1).$$

Очигледно је $f_{d,k,p}(t) > h_{d,p}(t) + g_k(t)$, $t > 1$. Показаћемо да функција $h_{d,p}(t) + g_k(t)$ узима своју максималну вредност у јединственој тачки t_k таквој да $t_k \to +\infty$ ако и само ако $k \to +\infty$. Рачунамо максимум само функције $h_{d,p}(t) + g_k(t)$, јер када $t_k \to +\infty$

$(k \to +\infty)$ преостали сабирак $\frac{t}{p} \cdot \log((t+1)^p - (t-1)^p)$ је занемарљив. У наведену сврху, нађимо изводе функција $h_{d,p}(t)$ и $g_k(t)$. Имамо

$$\begin{aligned}
g_k'(t) &= -(k+1)\cdot\log(t+1) + k\cdot\log(t-1) - \frac{(k+1)t}{t+1} + \frac{kt}{t-1};\\
g_k''(t) &= -\frac{(t-1)^2(t+2)+4k}{(t^2-1)^2} < 0\\
h_{d,p}'(t) &= \log d - t + \frac{1}{p}\cdot\log((t+1)^p - (t-1)^p) + t\cdot\frac{(t+1)^{p-1}-(t-1)^{p-1}}{(t+1)^p-(t-1)^p};\\
h_{d,p}''(t) &= -1 + 2\cdot\frac{(t+1)^{p-1}-(t-1)^{p-1}}{(t+1)^p-(t-1)^p}\\
&\quad + \frac{t(p-1)}{A^2(t)}\left(\left[(t+1)^{p-2}-(t-1)^{p-2}\right]A(t) - p\left[(t+1)^{p-1}-(t-1)^{p-1}\right]^2\right),
\end{aligned}$$

где је $A(t) = (t+1)^p - (t-1)^p$.

Пошто $p \in]1,2]$, $t > 1$, стога је

$$h_{d,p}''(t) < 0 \Leftrightarrow -1 + 2\cdot\frac{(t+1)^{p-1}-(t-1)^{p-1}}{(t+1)^p-(t-1)^p} < 0.$$

Али то је тачно $\Leftrightarrow \varphi_p(t) < 0$, где је

$$\varphi_p(t) = 2(t+1)^{p-1} - 2(t-1)^{p-1} - (t+1)^p + (t-1)^p.$$

Сада налазимо да је

$$\varphi_p'(t) = 2(p-1)\left[(t+1)^{p-2}-(t-1)^{p-2}\right] + p\left[(t-1)^{p-1}-(t+1)^{p-1}\right] < 0.$$

То показује да је $h_{d,p}''(t) + g_k''(t) < 0$. Пошто је

$$\lim_{t\to 1+}(h_{d,p}'(t) + g_k'(t)) = +\infty \ \text{ и } \ \lim_{t\to+\infty}(h_{d,p}'(t) + g_k'(t)) = -\infty,$$

једначина $h_{d,p}'(t) + g_k'(t) = 0$ има тачно једно решење t_k. Из ње добијамо са $t = t_k$,

$$k = \frac{(t^2-1)\cdot\log(t+1) + t^2 - t - (t^2-1)h_{d,p}'(t)}{2t + (t^2-1)\cdot\log(t-1) - (t^2-1)\cdot\log(t+1)},$$

одакле и следи да $t_k \to +\infty \Leftrightarrow k \to +\infty$.

Записујући $\log(t\pm 1) = \log t + \log(1 \pm \frac{1}{t})$, $(t\pm 1)^p = t^p(1\pm\frac{1}{t})^p$ и развијајући по Тејлоровој формули бар до степена 3 кад $k \to +\infty$, добијамо асимптотску оцену

$$k \sim \frac{3}{4}t_k^4. \tag{3.13}$$

Све што треба да покажемо је да су вредности функција $f_{d,k,p}(t)$ и $h_{d,p}(t)+g_k(t)$ у тачки t_k асимптотски једнаке. Да бисмо се у то уверили израчунајмо $f_{d,k,p}(t_k)$ користећи оцену (3.13) и асимптотске развоје за $\log(1\pm\frac{1}{t})$ и $(1\pm\frac{1}{t})^p$. Имамо

$$\begin{aligned} f_{d,k,p}(t_k) \sim h_{d,p}(t_k)+g_k(t_k) &= \left(-\frac{1}{2}t_k^2\right)(1+o(1))+(-2k)(1+o(1)) \\ &= (-2k)\left(1+o(1)+\frac{t_k^2}{4k}\right) = (-2k)(1+o(1)) \sim -2k, \end{aligned}$$

јер је $\frac{t_k^2}{4k} \sim \frac{t_k^2}{4\cdot\frac{3}{4}t_k^4} = \frac{1}{3t_k^2} \to 0,\ k\to+\infty$. Ово доказује асимптотску оцену

$$i_{d,k,p} \geqslant f_{d,k,p}(t_k) \sim -2k,\ k\to+\infty$$

за свако фиксирано $d\in]0,1[$ и свако фиксирано $p\in]1,2]$. Ако је $p=1$, из [4], знамо да је $k\sim\frac{3}{4}t_k^3\log t_k,\ k\to+\infty$. Примећујемо да су за довољно велико k константе d и p "испале" из игре.

Остаје да дођемо до горње оцене доње међе $i_{d,k,p}$ кад $k\to+\infty$. Зато посматрајмо полином $g(z)=\frac{1}{|g_1|_{l_p}}\cdot g_1(z)$ где је $g_1(z)=(\frac{1}{2}+\frac{z}{2})^{2k+1}$. Користећи особине биномних коефицијената, добијамо да полином $g(z)$ има концентрацију $d\leqslant 2^{-\frac{1}{p}}$ у степену k, мерену l_p-нормом у односу на l_p-норму и има јединичну l_p-норму. Дакле, задовољава услове Теореме 3.5. Заиста, из услова за ту концентрацију

$$\sum_{j\leqslant k}\frac{1}{|g_1|_{l_p}^p\cdot 2^{(2k+1)p}}\binom{2k+1}{j}^p \geqslant d^p\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{|g_1|_{l_p}^p\cdot 2^{(2k+1)p}}\binom{2k+1}{j}^p,$$

следи

$$\sum_{j\leqslant k}\frac{1}{2^{(2k+1)p}}\binom{2k+1}{j}^p \geqslant d^p 2\cdot\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{2^{(2k+1)p}}\binom{2k+1}{j}^p,$$

тј. $0<d<2^{-\frac{1}{p}}$. Међутим, константни члан је $\frac{1}{|g_1|_{l_p}^p\cdot 2^{(2k+1)p}}$, једина нула је -1, тако да Јенсенова формула даје

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\log\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|\frac{d\theta}{2\pi} &= -(2k+1)\log 2-\log|g_1|_{l_p} \\ &= (-2k\log 2)(1+o(1)) \sim -2k\log 2, \end{aligned}$$

кад $k\to+\infty$. Дакле, имамо асимптотски: $i_{d,k,p}\leqslant -2k\cdot\log 2$, кад $k\to+\infty$, за свако $d\in\left]0,2^{-\frac{1}{p}}\right]$ и за свако $p\in]1,2]$. Иста оцена је тачна и у случају $p=1$, али без ограничења за d ([4]). Теорема је у потпуности доказана. ►

Напомена 3. Ако је $k=0$ онда у претходном случају добијамо да је

$$f_{d,0,p}(t)=t\log d-\frac{1}{2}t^2,\ 1<p\leqslant 2,\ d\in]0,1[,\ t>1.$$

Ова функција има максималну вредност $\log d - \frac{1}{2}$, дакле, зависи само од d, k и p али то није најбоља доња граница. Боља вредност је $\log d$ али њу не репродукује функција $f_{d,k,p}(t)$ као у случају $p = 1$. Што се тиче екстремалне функције, максимум $\log d$ достигнут је ако и само ако је $|a_0| = d$ (погледати опсервацију 3.4).

Напомена 4. У случају да полином има концентрацију мерену l_p-нормом у односу на l_p-норму за $p > 2$ нисмо за сада нашли погодну функцију као у случају $p \in [1, 2]$. Још једном се показује утицај броја 2 на однос l_p- и L_p-норми. У следећој теореми нашли смо адекватну функцију али је концентрација мерена у односу на две различите норме. Наводимо резултат о томе.

Дефиниција 3.2. *Нека је $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j \neq 0$ полином са комплексним коефицијентима и са L_p-нормом: $\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$. Нека су даље $d \in]0, 1[$ и $k \in \mathbb{N}$ фиксирани. Кажемо да $f(z)$ има концентрацију d у највише степену k, мерену l_p-нормом у односу на L_p-норму, $p > 2$, ако важи следеће:*

$$\left(\sum_{j \leqslant k} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant d \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} = d \cdot \|f\|_{L_p}. \tag{3.14}$$

Услов (3.14) је могућ због релација $\|f\|_{L_p} \geqslant |f|_{l_p} \geqslant \left(\sum\limits_{j \leqslant k} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ кад год је $p > 2$. У наставку ћемо испитивати најбоље доње границе Јенсеновог функционала $J(f) = \int\limits_0^{2\pi} \log\left|\frac{f(e^{i\theta})}{\|f\|_{L_p}}\right| \frac{d\theta}{2\pi}$ за полиноме који задовољавају (3.14). Зато ћемо у наставку претпоставити да је

$$\|f\|_{L_p} = 1. \tag{3.15}$$

Теорема 3.8. *Нека је $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j \neq 0$ полином који задовољава* (3.14) *и* (3.15). *Тада постоји функција*

$$f_{d,k,p}(t) = t \log d \left(\frac{1 - \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^p}{1 - \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{p(k+1)}}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} t^2,\ t > 1 \tag{3.16}$$

таква да је

$$J(f) = \int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant f_{d,k,p}(t) \ \text{ за свако } \ t > 1.$$

◀ За доказ ове теореме користићемо следеће добро познате чињенице:

1^0 $j = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow a_j = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^j e^{ij\theta}} \frac{d\theta}{2\pi}$ за неко $r \in]0, 1[$;

2^0 $|a_j| \leqslant |f(z_0)| \cdot \frac{1}{r^j}$, $\forall j$, где је $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$;

3^0 Класична Јенсенова неједнакост и добро позната трансформација:

$$\log|f(z_0)| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(\frac{z_0 + e^{i\theta}}{1 + \overline{z_0}e^{i\theta}}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \cdot \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

где је $|z_0| = r$;

4^0 За $0 < r < 1$ следи $\frac{1-r}{1+r} \leqslant \frac{1-r^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \leqslant \frac{1+r}{1-r}$, где је $|z_0| = r$;

5^0 Често коришћено разбијање $\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\log|f|<0} + \int_{\log|f|>0}$ без кога би се тешко дошло до погодне функције као доњег ограничења;

Сада имамо

$$d \leqslant \left(\sum_{j \leqslant k} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |f(z_0)| \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{r^{p(k+1)}}}{1 - \frac{1}{r^p}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.17}$$

Из 3^0 закључујемо

$$\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(\frac{z_0 + e^{i\theta}}{1 + \overline{z_0}e^{i\theta}}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log|f(z_0)|,$$

тј.

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \cdot \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log|f(z_0)| \tag{3.18}$$

Пошто $f(z)$ задовољава (3.15), тада је

$$\int\limits_{\log|f|>0} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{p} \int\limits_{\log|f|>0} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \frac{1}{p} \int\limits_{\log|f|>0} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p = \frac{1}{p}.$$

Користећи 4^0 и 5^0 у релацији (3.18), добијамо:

$$\log|f(z_0)| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \cdot \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int\limits_{\log|f|>0} \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \cdot \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} + \int\limits_{\log|f|<0} \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0}e^{i\theta}|^2} \cdot \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1+r}{1-r} + \frac{1-r}{1+r} \int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Из последње релације и релације (3.17) проистиче

$$\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \frac{1+r}{1-r} \cdot \log d \left(\frac{1-\frac{1}{r^p}}{1-\frac{1}{r^{p(k+1)}}}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 .$$

На крају, стављајући $t = \frac{1+r}{1-r}$ у претходној неједнакости добијамо тврђење Теореме (3.8).

Напомена 5. Стављајући, на пример, $t = 2$, добијамо грубу оцену:

$$J(f) = \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant 2 \cdot \log d \left(\frac{3^p-1}{3^{p(k+1)}-1}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{4}{p}$$

која је нека генерализација класичне Јенсенове неједнакости за полиноме који задовољавају (3.14) и (3.15). Одатле следи да постоји

$$i_{d,k,p} := \inf\left\{\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} : \text{ф задовољава } (3.14)\text{и } (3.15)\right\}.$$

За $k = 0$, функција $f_{d,0,p} = t \cdot \log d - \frac{1}{p}t^2$, има максимум $\log d - \frac{1}{p}$. Дакле, $i_{d,0,p} \geqslant \log d - \frac{1}{p}$, али као у напомени 3 имамо да тај максимум није доња међа. На снази су и овде чињенице из наведене напомене. ►

Теорема 3.9. *Најбоља константа $i_{d,k,p}$ задовољава*

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{i_{d,k,p}}{-2k} \leqslant 1,$$

тј. $-2k \leqslant i_{d,k,p}$ асимптотски кад $k \to +\infty$, за свако $d \in]0,1[$ и свако $p > 2$.

◄ Очигледно је $\lim\limits_{t\to 1+} f_{d,k,p}(t) = -\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} f_{d,k,p}(t) = -\infty$; зато максимум постоји.

Запишимо затим функцију $f_{d,k,p}(t)$ у облику:

$$f_{d,k,p}(t) = \varphi_{d,k,p}(t) - \frac{t}{p}\log\left(1-\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{p(k+1)}\right)$$

где је

$$\varphi_{d,k,p}(t) = t\log d - kt\log(t+1) + kt\log(t-1) + \frac{t}{p}\log\left(1-\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^p\right) - \frac{1}{p}t^2.$$

Пошто је $0 < \frac{t-1}{t+1} < 1$, стога је $\log\left(1-\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{p(k+1)}\right) < 0$ и тада је

$$f_{d,k,p}(t) > \varphi_{d,k,p}(t)\,,\ t > 1.$$

Сада ћемо доказати да функција $\varphi_{d,k,p}(t)$ узима максималну вредност у тачки t_k тако да $t_k \to +\infty$, када $k \to +\infty$.

Нека је

$$g_k(t) = kt\log(t-1) - kt\log(t+1),$$
$$h_{d,p}(t) = t\log d + \frac{t}{p}\log\left(1 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^p\right) - \frac{1}{p}t^2.$$

Узимајући први и други извод функција $g_k(t)$ и $h_{d,p}(t)$ добијамо:

$$g'_k(t) = k\log(t-1) - k\log(t+1) + \frac{2kt}{t^2-1},$$
$$g''_k(t) = -\frac{4k}{(t^2-1)^2}, \tag{3.19}$$

$$h'_{d,p}(t) = \log d + \frac{1}{p}\log(1-u^p) - \frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{u^p}{1-u^p} - \frac{2}{p}t,$$
$$h''_{d,p}(t) = \frac{4}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{u^p}{1-u^p}\cdot\frac{1-u^p-pt}{1-u^p} - \frac{2}{p},$$

где је $u = \frac{t-1}{t+1}$, $0 < u < 1$.

Означавајући $A(t) = 1 - u^p - pt$ следи $A'(t) = -p\left(u^p \cdot \frac{2}{t^2-1} + 1\right) < 0$. Пошто је $\lim\limits_{t\to 1+} A(t) < 0$, стога је $A(t) < 0$ за свако $t > 1$. Одатле и из (3.19) добијамо $\varphi''_{d,k,p}(t) < 0$ за свако $t > 1$.

Како је $\lim\limits_{t\to 1+}\varphi'_{d,k,p}(t) = +\infty$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi'_{d,k,p}(t) = -\infty$, то постоји $t_k > 1$ такво да је $\varphi'_{d,k,p}(t) = 0$. Из једначине $\varphi'_{d,k,p}(t) = 0$ за $t = t_k$, добијамо

$$k = \frac{(t^2-1)h'_{d,p}(t)}{(t^2-1)\log(t+1) - (t^2-1)\log(t-1) - 2t},$$

одакле се лако закључује да $t_k \to +\infty$ ако и само ако $k \to +\infty$.

Записујући $\log(t\pm 1) = \log t + \log\left(1 \pm \frac{1}{t}\right)$, $(t\pm 1)^p = t^p\left(1\pm\frac{1}{t}\right)^p$ и примењујући развој по Тејлоровој формули бар до трећег степена, кад $t \to +\infty$, добијамо:

$$\log(t+1) - \log(t-1) - \frac{2t}{t^2-1} = -\frac{4}{3t^3}(1+o(1)) \sim -\frac{4}{3t^3},$$
$$h'_{d,p}(t) = -\frac{2t}{p}(1+o(1)) \sim -\frac{2t}{p}.$$

Следи да је $k \sim \frac{3t^4}{2p}$ кад $t \to +\infty$.

Одатле проистиче да се члан $\dfrac{t}{p}\log\left(1 - \left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^{p(k+1)}\right)$ може заменити за $t = t_k$, кад $k \to +\infty$. Остаје да покажемо да су вредности функција $f_{d,k,p}(t)$ и $\varphi_{d,k,p}(t)$ у тачки t_k асимптотски исте. У ту сврху израчунајмо $f_{d,k,p}(t_k)$:

$$f_{d,k,p}(t_k) \sim \varphi_{d,k,p}(t_k) = g_k(t_k) + h_{d,p}(t_k)$$

$$
\begin{aligned}
=&kt_k\log\left(1-\frac{1}{t_k}\right)-kt_k\log\left(1+\frac{1}{t_k}\right)+t_k\log d\\
&+\frac{t_k}{p}\log\left(\left(1+\frac{1}{t_k}\right)^p-\left(1-\frac{1}{t_k}\right)^p\right)-t_k\log\left(1+\frac{1}{t_k}\right)-\frac{1}{p}t_k^2\\
=&-2k\cdot\left(1-\frac{t_k}{2k}\log d+\frac{1}{3t_k^2}-\frac{t_k}{2kp}\log 2p+\frac{t_k}{2kp}\log t_k-\frac{(p-1)(p-2)}{12kpt_k^2}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2k}-\frac{1}{4kt_k^2}+\frac{1}{6kt_k^2}+\frac{t_k^2}{2kp}+o\left(\frac{1}{t_k^2}\right)\right)\\
=&-2k(1+o(1))\sim-2k,
\end{aligned}
$$

јер је $t\sim\left(\frac{2kp}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ кад $t\to+\infty$.

Тиме смо доказали асимптотску оцену $i_{d,k,p}\geqslant f_{d,k,p}(t_k)\sim-2k$, $k\to+\infty$, за свако $d\in]0,1[$ и за свако $p>2$, тј.

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{i_{d,k,p}}{-2k}\leqslant 1.$$

У наставку ћемо добити и горњу границу за најбољу доњу међу $i_{d,k,p}$:

Теорема 3.10. *Најбоља константа $i_{d,k,p}$ задовољава:*

$$\underline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{i_{d,k,p}}{-2k}\geqslant\log 2,$$

тј. $i_{d,k,p}\leqslant-2k\log 2$, асимптотски, кад $k\to+\infty$.

◀ Узмимо полином $f(z)=\dfrac{1}{\|f\|_{L_p}}\cdot f_1(z)$, где је $f_1(z)=\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^{2k+1}$. Он задовољава (3.15) и према особинама биномних коефицијената добија се да има концентрацију $d\leqslant\frac{1}{\sqrt[p]{2}}$ у степену k, мерену l_p-нормом у односу на L_p-норму ($p>2$). Заиста, из

$$\left(\sum_{j\leqslant k}\left|\frac{1}{\|f\|_{L_p}\cdot 2^{2k+1}}\binom{2k+1}{j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant d\cdot\|f\|_{L_p}$$

$$=d\geqslant d\cdot\left(\sum_{j\geqslant 0}\left|\frac{1}{\|f\|_{L_p}\cdot 2^{2k+1}}\binom{2k+1}{j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$\big(p>2\Rightarrow\|f\|_{L_p}\geqslant|f|_{l_p}\big)$, следи

$$\sum_{j\leqslant k}\left|\frac{1}{\|f\|_{L_p}\cdot 2^{2k+1}}\binom{2k+1}{j}\right|^p\geqslant 2\cdot d^p\sum_{j\leqslant k}\left|\frac{1}{\|f\|_{L_p}\cdot 2^{2k+1}}\binom{2k+1}{j}\right|^p,$$

тј. $d\leqslant\frac{1}{\sqrt[p]{2}}$.

Али константни члан је $\frac{1}{\|f\|_{L_p}} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}}$, једина нула је -1, тако да Јенсенова формула даје:

$$\int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} = -(2k+1)\log 2 - \log \|f\|_{L_p}$$

$$= (-2k\log 2)(1+o(1)) \sim -2k\log 2,\ k \to +\infty.$$

Дакле, имамо асимптотски: $i_{d,k,p} \leqslant -2k\log 2$, кад $k \to +\infty$, за свако $d \in \left]0, \frac{1}{\sqrt[p]{2}}\right]$, и за свако $p > 2$. ►

Напомена 6. На основу Теорема 3.9 и 3.10 следи:

За свако фиксирано $d \in]0,1[$ и фиксирано $p > 2$ имамо

$$-2 \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant -2\log 2.$$

До сада смо испитивали најбољу доњу границу Јенсеновог функционала ако аналитичка функција Хардијевог простора H^1 или само неки полином има концентрацију првенствено мерену неком нормом у односу на ту исту или неку другу норму. За такве случајеве доказали смо да одговарајући бројни скуп $\{J(f)\}$ има коначну доњу међу у ознаци $i_{d,k,p}$ или $i_{d,k}$ у зависности од тога колико фиксираних константи учествује у дефиницији концентрације. Осим у случају $k = 0$ који је детаљно расправљен нисмо били у стању да у осталим случајевима (мисли се за $k > 0$) да експлицитно нађемо $i_{d,k,p}$ које би зависило само од тих константи. Међутим, доказали смо да постоји интервал $[-2k, -2k\log 2]$ који садржи i за све врсте концентрација које смо разматрали, у случају да је k довољно велико. То другим речима значи да је

$$-2 \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{i_{d,k,p}}{k} \leqslant -2\log 2.$$

У наставку ћемо истражити како стоје "ствари" у случају да се концентрација полинома мери неком квази-нормом (коју смо раније увели), тј. ако је за полином $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \neq 0$, испуњено:

$$\sum_{j\leqslant k} |a_j|^p \geqslant d \cdot \sum_{j\geqslant 0} |a_j|^p,\ 0 < p < 1. \tag{3.20}$$

Као и код осталих случајева, можемо полином нормирати, тј. узећемо да је

$$\|f|_{l_p} = \sum_{j\geqslant 0} |a_j|^p = 1. \tag{3.21}$$

За ову ситуацију имамо теорему:

Теорема 3.11. *Нека је* $f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \neq 0$ *полином који задовољава* (3.20) *и* (3.21). *Тада постоји функција* $f_{d,k,p}(t)$ *тако да је*

$$J(f) = \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant i_{d,k,p} = \max_{t>1} f_{d,k,p}(t),$$

где је

$$f_{d,k,p}(t) = t \cdot \log \left(\frac{d\left(\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^p - 1\right)}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^p - 1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

◄ За доказ теореме користимо најпре формулу за a_j, затим неједнакост $|a_j| \leqslant |f(z_0)| \frac{1}{r^j}$, где је $|f(z_0)| = \max_{|z|=r} |f(z)|$, класичну Јенсенову неједнакост и познату трансформацију

$$\log |f(z_0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(\frac{z_0 + e^{i\theta}}{1 + \overline{z_0} e^{i\theta}} \right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0} e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{3.22}$$

где је $|z_0| = r$, познату двоструку неједнакост коришћену и у случају норме и корисно разлагање Лебеговог интеграла као

$$\int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\log|f|<0} + \int_{\log|f|>0}.$$

Даље имамо

$$d \leqslant \sum_{j \leqslant k} |a_j|^p \leqslant \sum_{j \leqslant k} \frac{1}{r^{jp}} \cdot |f(z_0)|^p = \frac{1 - r^{-p(k+1)}}{1 - r^{-p}} \cdot |f(z_0)|^p. \tag{3.23}$$

Из (3.22) (класичне Јенсенове неједнакости) добијамо

$$\log |f(z_0)| \leqslant \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(\frac{z_0 + e^{i\theta}}{1 + \overline{z_0} e^{i\theta}} \right) \right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

тј.

$$\int_0^{2\pi} \log \left| f\left(e^{i\theta}\right) \right| \frac{1 - r^2}{|1 - \overline{z_0} e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \log |f(z_0)|. \tag{3.24}$$

Пошто је

$$\left| f\left(e^{i\theta}\right) \right|^p = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j e^{ij\theta} \right|^p \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j| \right)^p \leqslant \sum_{j=0}^{n} |a_j|^p = 1,$$

стога је $|f(e^{i\theta})| \leqslant 1$, тј. $\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\log|f|<0}$ (значи други сабирак ишчезава).

Одатле и пошто је $\frac{1-r}{1+r} \leqslant \frac{1-r^2}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|^2}$ то из (3.20),(3.23),(3.24) следи

$$\int\limits_0^{2\pi} \log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \frac{1+r}{1-r} \cdot \left(\frac{d1-r^{-p}}{1-r^{-p(k+1)}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Коначан облик функције $f_{d,k,p}(t)$ добијамо после смене $t = \frac{1+r}{1-r}$. ►

3.2 Јенсенова формула и полиноми више промењљивих

На крају ћемо се осврнути на концентрацију полинома више промењљивих. Најпре наводимо основне појмове таквих полинома и нека питања у вези са тим. Нека су

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_\alpha a_\alpha x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n} \text{ и } g(x_1,\ldots,x_n) = \sum_\beta b_\beta x^{\beta_1}\cdots x^{\beta_n}, \tag{3.25}$$

$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, полиноми са n промењљивих $x_1,\ldots,x_n$, и са комплексним коефицијентима. Поред уобицајених норми које се уводе за полиноме једне промењљиве, наводимо и норме карактеристичне за ову врсту полинома. Ако је на пример f полином n-промењљивих из (3.25) тада је са

$$|f|_{l_p} = \left(\sum_\alpha \left(\frac{\alpha!}{m!}\right)^{p-1} |a_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где је m тотални степен од f, и $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$. Однос ове норме и класичне l_p-норме је

$$\left(\frac{1}{m!}\right)^{1-\frac{1}{p}} |f|_{l_p} \leqslant [f]_{l_p} \leqslant |f|_{l_p}. \tag{3.26}$$

Истакнимо сада која су питања највише од интереса када се разматрају разне норме у простору полинома без обзира да ли су са једноом или више промењљивих.

Знамо да је $|\cdot|_{l_p}$- норма опадајућа функција промењљиве $p \geqslant 1$ а $\|\cdot\|_{L_p}$- норма је растућа функција, тј. ако је f полином степена m, тада

$$p < q \Rightarrow \begin{cases} |f|_{l_q} \leqslant |f|_{l_p} \\ \|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_q} \end{cases}.$$

Важно је даље знати да ли у сваком од ових случајева постоје константе $C_{m,p,q}$ и $D_{m,p,q}$ које зависе само од степена m и бројеба $p, q \geqslant 1$ такве да је

$$p < q \Rightarrow \begin{cases} C_{m,p,q}|f|_{l_p} \leqslant |f|_{l_q} \leqslant |f|_{l_p} \\ D_{m,p,q}\|f\|_{L_q} \leqslant \|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_q} \end{cases}.$$

Одговор је позитиван у случају $\|\cdot\|_{L_p}$-норме а негативан када је у питању $|\cdot|_{l_p}$-норма. Та и слична питања су од посебне важности за полиноме више промењљивих. На пример оцењивање било које од познатих норми производа два полинома. Рецимо, јасна је оцена

$$\|f \cdot g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

која је карактеристика сваке Банахове алгебре. Међутим, оцена одоздо није очигледна, тј.

$$\lambda\|f\| \cdot \|g\| \leqslant \|f \cdot g\|, \tag{3.27}$$

где λ зависи од броја промењљивих (случај полинома више промењљивих) или од неких специфичних претпоставки за полиноме f и g (случај једне промењљиве).

За решење чувеног проблема "инваријантног потпростора" П.Енфло је користећи концентрацију полинома више промењљивих доказао неједнакост типа (3.27) за $|\cdot|_{l_1}$-норму. Најпре, нека је f полином из (3.25) где је $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Тада се каже да полином f има концентрацију $d \in]0, 1[$ у степену k ако је

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |a_\alpha| \geqslant d \sum_{\alpha} |a_\alpha|. \tag{3.28}$$

Тада је једна од Теорема из [21]:

Теорема 3.12. *Постоји константа $\lambda(d, d', k, k') > 0$ таква да за било која два полинома f и g, са концентрацијама d у степену k, тј. d' у степену k', респективно, важи*

$$|fg|_{l_1} \geqslant \lambda |f|_{l_1} |g|_{l_1}. \tag{3.29}$$

Важност релације (3.29) је што λ не зависи од степена полинома нити од броја промењљивих. Релација (3.29) студирана је и за друге норме и добијена су различита ограничења одоздо. Навешћемо неке од тих резултата.

Теорема 3.13. *Постоји константа $C_{m,n} > 0$ таква да за било која два хомогена полинома f и g више променљивих, редом степена m и n, и за било које p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ важи*

$$C_{m,n} |f|_{l_p} |g|_{l_p} \leqslant |f \cdot g|_{l_p} \leqslant 2^{(m+n)\left(1-\frac{1}{p}\right)} |f|_{l_p} |g|_{l_p}.$$

У овој Теореми о константи $C_{m,n}$ нема нарочитих података. У случају $[\cdot]_{l_2}$-норме имамо прецизну информацију:

Теорема 3.14. *Нека су f и g хомогени полиноми степена m и n респективно. Тада је*

$$[f \cdot g]_{l_2} \geqslant \sqrt{\frac{m!n!}{(m+n)!}} [f]_{l_2} [g]_{l_2},$$

и ова оцена је најбоља могућа.

Овај део завршавамо стварно лепом оценом одоздо l_1-норме производа:

Теорема 3.15. *Нека су f и g хомогени полиноми степена 1, са реалним коефицијентима. Тада је*
$$|f\cdot g|_{l_1} \geqslant |f|_{l_1}|g|_{l_1}$$
и ова оцена је најбоља могућа.

Враћамо се полиномима више променљивих који имају концентрацију, тј. који задовољавају (3.28). Слично као у случају једне променљиве, за такве полиноме испитиваћемо коначност најбоље доње границе Јенсеновог функционала. Исто као у случају једне променљиве, ако је f полином више променљивих, као у (3.25), онда је
$$J(f)=\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\frac{d\theta_n}{2\pi}$$
његов Јенсенов функционал. Видећемо у наставку да постојање доње границе проистиче из ограничености Јенсеновог функционала одоздо неком функцијом више променљивих, аналогно случају једне променљиве.

Дефиниција 3.3. *Нека је $f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n}$ полином од n променљивих и нека су $d\in]0,1[$, $k\in\mathbb{N}$ и $p\geqslant 1$ фиксирани бројеви. Тада f има концентрацију d у највише степену k мерену l_p-нормом у односу на l_p-норму, ако је*
$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}|a_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant d\cdot\left(\sum_{\alpha}|a_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.30}$$

У наставку ћемо претпоставити да је l_p-норма полинома f јединица, тј. претпоставићемо
$$|f|_{l_p}=\left(\sum_{\alpha}|a_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1, \tag{3.31}$$
што не утиче на општост испитивања доњих граница.

Теорема 3.16. *Нека је $f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_n}$ полином који задовољава* (3.30) *и* (3.31)*. Тада постоји функција $f_{d,k,p}(t_1,\dots,t_n)$ таква да је*
$$J(f)\geqslant \sup_X f_{d,k,p}(t_1,\dots,t_n),$$
где је $X=\{(t_1,\dots,t_n): t_i>1, i=\overline{1,n}\}$.

◀ За било које $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $0<r_i<1$, $i=\overline{1,n}$ имамо
$$a_\alpha=\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}}{r_1^{\alpha_1}\cdots r_n^{\alpha_n}} f\left(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}\right)\frac{d\theta_1}{2\pi}\cdots\frac{d\theta_n}{2\pi}$$

(слично као за полиноме једне промењљиве), тј.

$$|a_\alpha| \leqslant \prod_{i=1}^{n} r_i^{-\alpha i} |f(z_1, \dots, z_n)|$$

за неко $z_i, i = \overline{1, n}$ тако да је $|z_i| = r_i$. Одатле следи да је

$$\left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} |a_\alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |f(z_1, \dots, z_n)| \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \prod_{i=1}^{n} r_i^{-p\alpha_i} \right)^{\frac{1}{p}},$$

тј. на основу (3.31)

$$d \leqslant |f(z_1, \dots z_n)| \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \prod_{i=1}^{n} r_i^{-p\alpha_i} \right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \frac{1}{p} \log \frac{d^p}{\sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \prod\limits_{i=1}^{n} r_i^{-p\alpha_i}} \leqslant \log |f(z_1, \dots z_n)|. \tag{3.32}$$

Сада применом класичне Јенсенове неједнакости (понављањем примене) и познате трансформације следи:

$$\begin{aligned}
\log |f(z_1, \dots z_n)| &\leqslant \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\frac{e^{i\theta_1} + z_1}{1 + \overline{z_1} e^{i\theta_1}}, z_2, \dots, z_n \right) \right| \frac{d\theta_1}{2\pi} \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\frac{e^{i\theta_1} + z_1}{1 + \overline{z_1} e^{i\theta_1}}, \frac{e^{i\theta_2} + z_2}{1 + \overline{z_2} e^{i\theta_2}}, z_3, \dots, z_n \right) \right| \frac{d\theta_1}{2\pi} \frac{d\theta_2}{2\pi} \\
&\vdots \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\frac{e^{i\theta_1} + z_1}{1 + \overline{z_1} e^{i\theta_1}}, \dots, \frac{e^{i\theta_{n-1}} + z_{n-1}}{1 + \overline{z_{n-1}} e^{i\theta_{n-1}}}, z_n \right) \right| \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_{n-1}}{2\pi} \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\frac{e^{i\theta_1} + z_1}{1 + \overline{z_1} e^{i\theta_1}}, \dots, \frac{e^{i\theta_n} + z_n}{1 + \overline{z_n} e^{i\theta_n}} \right) \right| \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n} \right) \right| \frac{1 - r_1^2}{|1 - \overline{z_1} e^{i\theta_1}|^2} \cdots \frac{1 - r_n^2}{|1 - \overline{z_n} e^{i\theta_n}|^2} \frac{d\theta_1}{2\pi} \cdots \frac{d\theta_n}{2\pi} \\
&= \int \cdots \int_{\log|f|>0} + \int \cdots \int_{\log|f|<0} \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - r_i}{1 + r_i} \int \cdots \int_{\log|f|<0} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + r_i}{1 - r_i} \int \cdots \int_{\log|f|>0} \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - r_i}{1 + r_i} \int \cdots \int_{\log|f|<0} + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + r_i}{1 - r_i}.
\end{aligned}$$

Пошто је $1 < p \leqslant 2$ доказ да је $\int \cdots \int_{\log|f|>0} \leqslant \frac{1}{2}$ је исти као код полинома једне промењљиве. Дакле,

$$\frac{1}{p}\log\frac{d^p}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}\prod i=1^n r_i^{-p\alpha_i}} \leqslant \prod_{i=1}^n \frac{1-r_i}{1+r_i}\cdot J(f) + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^n\frac{1+r_i}{1-r_i},$$

тј. после смене промењљивих $t_i = \frac{1+r_i}{1-r_i}$, $i=\overline{1,n}$, добијамо функцију

$$f_{d,k,p}(t_1,\ldots,t_n) = \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)\left(\frac{1}{p}\log\frac{d^p}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)^{p\alpha_i}} - \frac{1}{2}\prod_{i=1}^n t_i\right)$$

тако да је $J(f)\geqslant f_{d,k,p}(t_1,\ldots,t_n)$, где је $t_i>1$, $i=\overline{1,n}$. Тиме је Теорема доказана. ►

Последица 3.4. *Нека је $f(x_1,\cdots,x_n)$ полином као у* Теореми 3.16*. Тада постоји константа $i_{d,k,p}$ која зависи само од d, k и p таква да је*

$$J(f)\geqslant i_{d,k,p},$$

тј. бројни скуп $\{J(f)\}$ има коначну најмању доњу границу, тј. инфимум.

Последица 3.5. *Нека је $f(x_1,\ldots,x_n)$ полином као у* Теореми 3.16*, али да је $|f|_{l_1}=1 (p=1)$. Тада је*

$$J(f)\geqslant\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)\log\frac{d}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)^{\alpha_i}}. \tag{3.33}$$

◄ Из $|f|_{l_1}=1$ следи да је

$$\left|f\left(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}\right)\right| = \left|\sum_\alpha a_\alpha e^{i(\alpha_1\theta_1+\cdots+\alpha_n\theta_n)}\right| \leqslant \left|\sum_\alpha a_\alpha\right| = |f|_{l_1} = 1,$$

тј.

$$J(f) = \int\cdots\int_{\log|f|>0} + \int\cdots\int_{\log|f|<0} = \int\cdots\int_{\log|f|<0},$$

одакле следи (3.33), пошто је $\int\cdots\int_{\log|f|>0}=0$. ►

За разлику од полинома једне промењљиве, код полинома више промењљивих постоји разноврсност дефинисања концентрације у нижем степену. На пример, рећи ћемо да полином

$$f(x_1,\ldots,x_k) = \sum_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

са k промењивих има концентрацију $d \in]0,1[$ у степену k (k је број промењивих) мерену нормом $\|\cdot\|_{(1)}$ у односу на норму $\|\cdot\|_{(2)}$ ако је

$$\left\||f|^k\right\|_{(1)} \geqslant d\|f\|_{(2)},$$

где је $\left\||f|^k\right\| = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ али за било који полином са n промењивих. Према овој дефиницији концентрације имамо и следећу теорему.

Теорема 3.17. *Нека за полином* $f(x_1,\dots,x_k) = \sum\limits_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}$ *важи*

$$\left|f|^k\right|_\infty \geqslant d|f|_{l_2} = d, \tag{3.34}$$

(претпоставља се да је $|f|_{l_2} = 1$*), где је* $d \in]0,1[$ *фиксиран број а* k *је број променљивих. Тада постоји константа* $i_{d,k}$ *таква да је*

$$J(f) \geqslant i_{d,k}.$$

Доказ је исти са доказом Теореме 3.16, јер због $|f|_{l_2} \geqslant |f|_\infty$ дати услов концентрације своди се на услов у Теореми 3.16.

У претходној Теореми доња међа Јенсеновог функционала зависи од броја промењљивих. На основу ње доказујемо, да под неким условима доња међа не зависи ни од броја промењљивих.

Теорема 3.18. *Нека је* f *полином произвољног броја променљивих који задовољава услов* (3.34). *Тада постоји константа* $i_{d,k}$ *која зависи само од* d *и* k *таква да је*

$$J(f) \geqslant i_{d,k}.$$

◄ Своди се на претходну Теорему! ►

Кажемо да полином $f(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ има концентрацију $d \in]0,1[$ у степену k, мерену l_p-квази-нормом $(0 < p < 1)$ ако је

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |a_\alpha|^p \geqslant d\cdot\sum_\alpha |a_\alpha|^p. \tag{3.35}$$

У том случају имамо резултат:

Теорема 3.19. *Нека је* $f(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ *полином који задовољава* (3.35) *и код кога је* $\|f|_{l_p} = 1,\ 0 < p < 1$. *Тада постоји функција* $f_{d,k,p}(t_1,\dots,t_n)$ *таква да је*

$$J(f) \geqslant f_{d,k,p}(t_1,\dots,t_n),\ \ \textit{где је}\ \ t_i > 1,\ i = \overline{1,n}.$$

◄ Слично као у доказу Теореме 3.16 добијамо

$$f_{d,k,p}(t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{p}\left(\prod_{i=1}^n t_i\right)\log\frac{d}{\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}\prod\limits_{i=1}^n\left(\frac{t_i+1}{t_i-1}\right)^{p\alpha_i}}.$$

И овде је за доказ поред класичне Јенсенове неједнакости важан "трик" разбијање интеграла на два позната сабирка. ►

Литература

[1] Ahlfors L. V., *Complex analysis*, third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.

[2] Arens R., *The Boundary integral of* $\log|\varphi|$ *for generalized analytic functions*, Trans. A.M.S., 86 (1957).

[3] Beurling A., *On two problems concerning linear transformations in Hilbert spaces*, Acta Math., 81 (1949).

[4] Beauzamy B., *Jensen's Inequality for polynomials with Concentration at Low Degrees*, J. Numerishe Mathematik 49 (1986), 221-225.

[5] Beauzamy B., Enflo P., *Estimations de produits de polynomes*, Journal of number theory 21, 390-412 (1985).

[6] Beauzamy B., *A minimization problem connected with a Generalized Jensen's Inequality*, Journal of math. anal. and application 145, 137-144 (1990).

[7] Beauzamy B., *Estimates for* H^2 *functions with concentration at low degrees and applications to complex symbolic computation*, J. Reine Angew. Math. 433, 1-44 (1992).

[8] Beauzamy B.,Bombieri E., Enflo P., Montgomery H. L., *Product of polynomials in many variables*, Journal of number theory 36, 2, 219-245 (1990).

[9] Beauzamy B., *Generalized Jensen's inequality: A Sharper version.*, J. Illinois, Journal of Mathematics 39, 2, (1995).

[10] Beauzamy B., Chou S., *On the zeros of polynomials with concentration at low degrees*, II., J. Math. Anal. Applic. 175, 2, 360-379 (1993).

[11] Beauzamy B., *Produits de polynômes*, Seminair d'Analyse Fonctionelle 82/83, Publications de l'Université de Paris VII, Paris, 1983.

[12] Biernacki M., *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires*, Thèse, Bullitin de l'académie polonaise des sciences et des lettres classe des sciences mathématiques, séries A (1927), 541-685.

[13] Boas R. P., *Entire Functions*, Academic Press, Inc. New York, 1954.

[14] Chou S., *Séries de Tejlor et concentration aux bas degrés.*, Thèse, Université de Paris VI (1990).

[15] Chou S., *On the roots of polynomials with concentration at low degrees*, Journ. of math. Anal. applic. 149, 2, 424-436 (1990).

[16] Cohn A., *Uber die Anzahl der Wurzeln einer Algebraischen Gleichung in einem Kreise*, Math. Zeitschrift, 14 (1922), 110-148.

[17] Denjou A., *Sur une extension de la formule de Jensen*, Mathematica (Cluj) 7 (1933), 129-135.

[18] Dieudonné J., *La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques)* , Memorial des Science Mathématiques Grauthier Villars, 93 (1938).

[19] Durin P. L., *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[20] Enflo P., *On the invariant subspaces problem in Banach spaces*, Acta Math., 158 (1987), 213-313.

[21] Erdös P., Turin P., *On the distribution of the roots of polynomials*, Ann. Math., 51 (1950), 105-119.

[22] Fabre C., *La meilleure constante pour un produit de polynomes*, J. C. R. Acad. Ser. Paris, t.307, Serie I, p. 707-767 (1988).

[23] Hoffman H., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Inc., New York, 1962.

[24] Hurwitz A., *Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reelen Theilen besitzt*, Math. Ann. 46 (1895), 273-284.

[25] Jensen J. L. W. V., *Sur un nouvel et important théorèm de la théorie des fonctions*, Acta Math. 22 (1899), 359.

[26] Kahane J. P., *Série de Fourier absolument convergente*, Springer-Verlag (1990).

[27] Langevin M.,Waldschmidt M., *Fifty years of Polynomials*, Springer-Verlag, Lecture Notes 1415.

[28] Montel P., *Sur les modules des zéros des polynômes*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure 3 ème série, 40 (1923), 1-34.

[29] Mahler M., *An application of Jensen's formula to polynomials*, Matematika 7, 98-100 (1966).

[30] Marden M., *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys Number 3, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1966.

[31] Mitrović D., *Sur les valeurs de certaines intégrales definies*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, tom 10, 1955, 259-263.

[32] Mitrović D., *Une généralisation de certaines formules de Montel*, C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 1212-1213.

[33] Namik O., *Sur une généralisation de la formule de Jensen et quelques applications*, Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul (A) 15 (1950), 289-332.

[34] Pavlović Mirjana, Radenović S., *On a lower bound of Jensen's functional*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002), 96-101.

[35] Pavlović Mirjana, Cakić N., Rajović M., Radenović S., *A generalization of Jensen's inequality for polynomials having concentration at low degrees*, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009), 332-337.

[36] Pavlović Mirjana, *Jensen's functional and polynomials*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 2 (2008), 175-182.

[37] Radenović S., *Some estimates of the integral* $\int_0^{2\pi} \log|P(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}$, Publ. de l'Inst. Math. 52(66) (1992), 37-42.

[38] Radenović S., *A lower bound of Jensen's functional*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 5 (1994), 9-12.

[39] Radenović S., Pavlović Mirjana, *Asymptotic behavior for the best lower bound of Jensen's functional*, Kragujevac J. Math. 25 (2003), 75-79.

[40] Radenović S., *A note on Jensen's functional*, Mathematica Balkanica, 11, 1997, 3-4, 215-220.

[41] Rassias Th.M., *On the derivative of a complex valued function*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 12 (1984), 423-425.

[42] Rassias G.M., Rassias J.M., Rassias Th.M., *A counterexample to a conjecture by P. Erdös*, Proc. Japan Acad. Sci.Ser. A 53 (1977), 119-121.

[43] Rassias Th.M., *A new inequality for complex-valued polynomial functions*, Procedings of the american mathematical society, 97, 2, (1986), 296-298.

[44] Rigler A.K., Trimble R.S., Varga R.S., *Sharp lower bounds for a generalized Jensen's Inequality*, J. Rocky Mountain Journal of Math., 19 (1989), 353-373.

[45] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co.,, New York, 1966.

[46] Schur I., *Uber Polynome, die nur Innern des Einheitskreis verschwinden*, Journal de Crelle, 148 (1918), 134-136.

[47] Vlek V., *On limits to the absolute values of the roots of a polynomial*, Bulliteb de la société Mathematique de France, 53 (1925), 105-205.

[48] Waldschmidt M., *Nombres Transcendants*, Lecture Notes in Math. Vol. 402, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.

[49] Wermer J., *On algebras of continuous functions*, Proc. A. M. S., 4 (1953).

[50] Wermer J., *Banach algebra and analytic function*, Academic Press, 1962.

[51] Wermer J., *Subalgebra of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle*, Amer. J. Math., 78 (1954).

[52] Wermer J., *Dirichlet algebra*, Duke J. Math., 27 (1960).

Додатак

Summary

Dissertation is written in 60 pages and is divided into next parts:

1. Preface (pages 2-7)
2. Introduction (pages 8-29)
3. Concentration polynomial in low degrees (pages 30-56)
4. References (pages 57-60) which is consisted of 52 items

Chapter 2 is divided into 9, and chapter 3 into 2 sections.

In preface a short historical review of polynomials and their importance and position in mathematics are given. Especially interesting parts in preface are about number of zeros of polynomials in different sections of complex plane.

In section 2.1 there are well known characteristic of Möbijus' transformation which will be used further in dissertation.

Section 2.2 of same chapter is consisted of relations of different norms which are being introduced to vector spaces of all polynomials with complex coefficients.

In section 2.3 Hurwitz polynomials are explained. This class of polynomials which was being examined at the end of 19^{th} century has found its real position in subject which is being examined in this dissertation.

Jensen's formula (which also appeared at the end of 19^{th} century) is described in section 4 from more aspects.

In sections 5, 6, 7 and 8 the relation among Jensen's formula, Hardy's spaces of p degree, generalized Jensen's formula and Mahler's measure is given.

In section 9 in dissertation the story about lower and upper boundaries of Jensen's functional is given (definition, motivation, some well known results and some new results of the author).

The chapter 3 is consisted of results of the author which are related to lower boundaries of Jensen's functional for polynomials which satisfy the condition (1.2)

of dissertation. In that case extreme functions are being determined. the main purpose of author is making intervals $[-2k, -2k \log 2]$ whose ends presents asymptotically lower and upper boundary of best lower boundary of Jensen's functional determined. The part of those results is published in "Computers and Mathematics with Applications".

The most important results in dissertation in shape of notes, observations, consequences and theorems are given.

Notes: 2.–the important example; 3.–the condition of $k = 0$; 4.–the other ways of measuring such a concentration; 5.–interval $[-2, -2 \log 2]$.

Observations:: 3.1,3.2,3.3,3.4. In these the relations between number of zeros and concentration are given; the equivalency of some conditions of concentrations; when the case of $d = 1$ doesn't give the equality $k = n$; the existence of extreme function.

The consequences: 3.1,3.2,3.3,3.4,3.5. In these consequences the lower boundaries for $k = 0, 1, ..., 7$ are given; the progress of well known results; the boundary for $k = 0, 1, ..., 50, 51$ was found.

Theorems: 3.1.–comparation of concentrations; 3.4,3.5,3.6.–determination of function as a lower boundary; 3.7,3.8,3.9,3.10.–asymptotically behavior of the lower boundary when $k \to \infty$; 3.11.–concentration which is being measured quasi norm–the appropriate function was found.

Биографија

Мирјана Павловић је рођена у Пожеги, 19.априла 1966.године. Основну школу завршила је у Пожеги, а гимназију у Ужицу.

Природно-математички факултет у Крагујевцу, студијска група математика, уписала је 1985.године, а завршила 1989. године.

Као асистент приправник на групи математика Природно-математичког факултета у Крагујевцу запослила се 16. марта 1990. године.

Последипломске студије на групи математика, уже стручна област математичка анализа, уписала је 1992. године. Магистарску тезу под насловом "Асимптотско понашање доњих граница Јенсеновог функционала" одбранила је 18.08.1999. године.

У звање асистента на групи математика изабрана је 01.01.2000. године.

У досадашњем раду у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, од 1990. до данас, држала је вежбе из предмета: Анализа 1, Анализа 2, Анализа 3, Анализа 4, Теорија функција комплексне променљиве, Математика 2 и Математика 3 (за студенте физике), Математика 1, Математика 2 и Математика 3 (за студенте Машинског факултета).

Мирјана Павловић се бави научно–истраживачким радом из области математичке анализе.

Резултате истраживања објавила је у оквиру следећих научних радова:

1. Павловић М., Раденовић С., *On a lower bound of Jensen's functional*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002), 96-101.

2. Раденовић С., Павловић М., *Asymptotic behavior for the best lower bound of Jensen's functional*, Kragujevac J. Math. 25 (2003), 75-79.

3. Павловић М., *Jensen's functional and polynomials*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 2 (2008), 175-182.

4. Павловић М., Цакић Н., Рајовић М., Раденовић С., *A generalization of Jensen's inequality for polynomials having concentration at low degrees*, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009), 332-337.