УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Владимир Ристић

ЛОГИКЕ СА ИНТЕГРАЛИМА И УСЛОВНИМ ОЧЕКИВАЊИМА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2013.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I Аутор

Име и презиме: Владимир Т. Ристић
Датум и место рођења: 29. јун 1974. године у Јагодини
Садашње запослење: Асистент на Факултету педагошких наука у Јагодини Универзитета у Крагујевцу

II Докторска дисертација

Наслов: Логике са интегралима и условним очекивањима
Број страница: 93
Број слика:
Број библиографских података: 54
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет Универзитета у Крагујевцу, Крагујевац
Научна област (УДК): Математичка логика
Ментор: Доц. др Небојша Икодиновић

III Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: 29. август 2012. године
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

1. Др Миодраг Рашковић, научни саветник,
   Математички институт САНУ, председник,

2. Др Радосав Ђорђевић, ванредни професор
   Природно-математичког факултета у Крагујевцу, члан,

3. Др Небојша Икодиновић, доцент
   Математичког факултета у Београду, члан,

Комисија за оцену докторске дисертације:

1. Др Миодраг Рашковић, научни саветник,
   Математички институт САНУ, председник,

2. Др Радосав Ђорђевић, ванредни професор
   Природно-математичког факултета у Крагујевцу, члан,

3. Др Небојша Икодиновић, доцент
   Математичког факултета у Београду, члан,

Датум одбране дисертације: ____________________

Садржај

Предговор

Математичка логика, као део математике и логике уопште, данас представља незаобилазни метод за решавање велике групе математичких проблема. С једне стране, представља средство за прецизно излагање математичких теорија, с друге стране, једну од математичких теорија у чијем оквиру је развијен један број математичких метода које се по природи не разликују битно од метода алгебре, анализе итд., односно, који су по својој природи математички и служе за решавање математичких проблема. С тим у вези, формалне логике заузимају важно место у формализацији многих теорија. Могло би се рећи да проучавање логичких система, у овом раду, иде у два правца: један је у вези са теоријом вероватноће, односно теоријом мере, док је други везан за топологију. Предмет рада је, свакако у првом реду, проширивање класичне логике до формалних система који ће бити прикладни за описивање и закључивање у наведеним математичким окружењима. Место и значај топологије и теорије мере у математици у потпуности оправдавају проучавање везе између фрагмената математичке логике којима ћемо се овде бавити и ових математичких дисциплина.

Организација рада

Поред уводног поглавља, у коме је дат историјат и значај вероватносних и тополошких логика, као и краћи приказ инфинитарне логике $L_{\omega_1\omega}$ и логика са уопштеним квантификаторима $L(Q)$, излагање је подељено у седам следећих поглавља: (1) Нестандардна анализа, (2) Допустиви скупови, (3) Пребројиви фрагменти инфинитарне логике $L_{\infty\omega}$, (4) Средњи модел, (5) Логике са интегралима, (6) Логике са операторима условног очекивања и (7) Тополошке логике.

У првом поглављу *Нестандардна анализа* изложени су основни појмови нестандардне анализе и описане су две технике које имају важну улогу у конструкцији очекиваних модела представљених логичких система: конструкција Лебове мере и Лебова конструкција Данијеловог интеграла. У другом поглављу *Допустиви скупови* су изложени елементарни појмови везани за Крипке-Платекову теорију скупова, као и за њене транзитивне моделе – допустиве скупове. Описане су и неке специјалне врсте допустивих скупова које ће бити кључне у грађењу синтаксе вероватносних и тополошких логика и приказана је веза са класичном теоријом израчунљивости. Треће поглавље *Пребројиви фрагменти инфинитарне логике* $L_{\infty\omega}$ је приказ пребројивог фрагмента $L_{\mathbb{A}}$. Описан је начин формализовања синтаксе и семантике у KPU теорији, својство конзистентности и доказана је комплетност и компактност (Барвајзова) за пребројиве допустиве фрагменте. Све нове логике које ће бити дате у овом раду биће инфинитарне логике над одговарајућим допустивим скуповима. Четврто поглавље *Средњи модел* је један оригинални приказ Н. Икодиновића познате конструкције средњег модела Миодрага Рашковића. С обзиром да је техника средњег модела коришћена у свим резултатима у овом раду, издвојена је као засебно поглавље. У петом поглављу *Логике са интегралима* најпре је представљена вероватносна логика $L_{\mathbb{A}P}$, а затим и логика са интегралним оператором $L_{\mathbb{A}\int}$, при чему је приказана веза између ових логичких система. Затим су представљене две нове вероватносне логике $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ и $L^{a}_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$. У првој су описани модели чије мере имају коначне рангове, док друга представља еквивалент Рашковићеве двовероватносне логике $L^{a}_{\mathbb{A}P_1P_2}$ међу логикама са интегралним операторима. У оба случаја је доказана потпуност аксиоматизације у односу на класу дефинисаних модела. На почетку шестог поглавља *Логике са операторима условног очекивања* представљена је Кислерова логика $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ са интегралним операторима и случајним променљивим, а затим и логика $L_{\mathbb{A}E}$ са оператором условног очекивања. У наставку је изложена нова двовероватносна логика са случајним променљивим $L^{a}_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$, као и двовероватносна логика са условним очекивањем у логици $L^{a}_{\mathbb{A}E_1E_2}$. Дефинисана су два различита оператора условног очекивања у односу на две мере μ_1 и μ_2 респективно, које се налазе у апсолутно непрекидном односу. У седмом поглављу *Тополошке логике* дата је најпре Кислерова логика са квантификатором „постоји непребројиво много", која на неки начин представља основу за тополошке логике које су представљене у овом поглављу. Затим су наведени неки елементарни појмови везани за, најпре класичне тополошке просторе, а онда и за тополошке класа просторе које су проучавали Ж. Мијајловић и Д. Ћирић у [11] и [12]. Такође су представљене две Сгроове тополошке логике $L(O)$ и $L(O^{n}_{n\in\omega})$, од којих је друга екстензија логике $L(O)$ и погодна је за проучавање тополошког производа и непрекидних пресликавања на класичним тополошким просторима. У следећем одељку је изложена тополошка класа логика $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, која представља инфинитарни допустиви еквивалент Сгроове логике $L(O)$, у односу на тополошке класа просторе. На крају је описана нова тополошка класа логика $L^{\text{cont}}_{\mathbb{A}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ у којој централно место заузимају појмови тополошког производа и непрекидних пресликавања на тополошким класа просторима.

Публиковани и излагани делови рада

Делови овог рада који се односе на вероватносне логике објављени су у научним часописима: [47, 48]. Резултат из поглавља 6. је такође изложен на научном скупу *Probabilistic logics and applications* у Београду 2011, док је преглед резултата из поглавља 7. изложен на *Семинару из вероватносних логика* Математичког института САНУ. Два рада, који су такође резултат ових истраживања, налазе се на рецензији.

Захвалност

Велику захвалност дугујем професорима др Радосаву Ђорђевићу и др Небојши Икодиновићу, ментору овог рада. Својим идејама, којима је инициран највећи део истраживања, и залагањем кроз дискусије, дали су велики допринос овом раду. Посебно сам захвалан професору др Миодрагу Рашковићу на корисним сугестијама које су ми биле од велике помоћи током рада.

Увод

Настанак вероватносних логика се може везати за име Џерома Кислера. Замишљене најпре као логике прилагођене проучавању једноставнијих структура на пољу теорије вероватноће, развијају се ка логичким системима погодним за описивање и сложенијих појмова, као што су мартингали, Марков процес, Брауново кретање итд. Кислер свој рад започиње логиком $L_{\mathbb{A}P}$, тј. разматрањем структура првог реда у којима је вероватноћа дефинисана на домену. Логика $L_{\mathbb{A}P}$ је слична инфинитарној логици $L_{\mathbb{A}}$ ($\mathbb{A}$ је допустив подскуп од допустивог скупа $\mathbb{HC}$ који садржи ординал ω, видети поглавље 2); уобичајени квантификатори $\forall x$ и $\exists x$ су замењени вероватносним квантификатором $Px \geq r$, при чему формула $(Px \geq r)\varphi(x)$ значи да је вероватноћа скупа $\{x \mid \varphi(x)\}$ већа или једнака r. Разрађујући Кислерове идеје, Хувер је проучавао логике $L_{\omega P}$, $L_{\omega_1 P}$, као и логику $L_{\mathbb{A}P}$. С обзиром на не тако велику изражајну моћ логике $L_{\mathbb{A}P}$, јавља се потреба за логиком у којој ће многа својства случајних променљивих бити описива. Тако настаје логика $L_{\mathbb{A}\int}$ у којој уместо вероватносних квантификатора $Px \geq r$ фигуришу квантификатори облика $\int \ldots dx$. Такође, Хувер уводи логику $L_{\mathbb{A}}(\int)$ која је модификација логике $L_{\mathbb{A}\int}$. Уведеним логикама ипак није могуће описати појмове који су у вези са условним очекивањем случајних променљивих. Овај проблем Кислер решава увођењем логике $L_{\mathbb{A}E}$ која проширује логику са интегралима $L_{\mathbb{A}\int}$ додавањем новог оператора $E[\cdot \mid \cdot]$ којим се изражава условно очекивање случајне променљиве у односу на σ-алгебру мерљивих скупова. Проучавање логика са условним очекивањима даље настављају С. Фахардо и Х. Роденхаусен који даје адаптирану вероватносну логику L_{ad}, погодну за проучавање стохастичких процеса, односно неких специјалних вероватносних простора.

Целокупан приказ ових вероватносних логика може се наћи у [6], где такође Кислер даје низ сугестија за правце даљег истраживања на пољу вероватносних логика. Један од постављених проблема је био и теорема комплетности за класу двовероватносних модела, специјално за структуре са две вероватносне мере μ_1 и μ_2 такве да је μ_1 апсолутно непрекидна у односу на μ_2. Радећи на овом проблему, Рашковић у [46] уводи врло корисну технику средњег модела која ће дати пуно нових резултата на овом пољу. Ова техника је коришћена за доказивање комплетности многих логика везаних за двовероватносне структуре. У првом реду треба истаћи и радове Р. Ђорђевића, који поред логика са апсолутно непрекидним односом мера у двовероватносним структурама, изучава и логике код којих се мере налазе у сингуларном односу. Техника средњег модела је заједнички именитељ свих логика које су изложене у овом раду, а корак даље у проучавању двовероватносних логика је и логика са условним очекивањима изложена у поглављу 6.

Развој тополошких логика би могао бити подељен у два правца. С једне стране су Флум и Зајглер који су најзаслужнији за развој тополошких логика. Поред класичних тополошких простора, они су разматрали и логике разних специјалних тополошких простора, као што су униформни простори, инфинитезимални простори итд. С друге стране су Сгроове тополошке логике које представљају, на неки начин, наставак Кислеровог рада на логикама са уопштеним квантификаторима. Логике које ће бити представљене у овом раду су модификације Сгроових тополошких логика, најпре логике $L(O)$, а затим и логике

$L(O^n_{n\in\omega})$ која је погодна за проучавање појма тополошког производа и непрекидних пресликавања. Као резултат проучавања тополошких логика овог типа на неким специјалним тополошким просторима, Р. Ђорђевић, Н. Икодиновић и Ж. Мијајловић излажу тополошку класа логику $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ где су описани тополошки класа простори, које су проучавали Ж. Мијајловић и З. Ћирић у [11, 12]. Нова тополошка класа логика $L^{\text{cont}}_{\mathbb{A}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$, која је изложена у поглављу 7, синтетише све претходне резултате, представљајући логику погодну за резоновање о тополошком производу и непрекидним пресликавањима тополошких класа простора.

У наредним одељцима биће описане логике које играју велику улогу у проучавању логика у овом раду: инфинитарна логика $L_{\omega_1\omega}$ и логика са уопштеним квантификаторима $L(Q)$.

Инфинитарне логике. Логика $L_{\omega_1\omega}$

Поред логике другог реда, која се добија увођењем релацијских променљивих, проширења предикатског рачуна првог реда могу се добити уопштавањем њихових логичких везника. Уколико се у језику L допусте дисјункције и конјункције бесконачне дужине, добијају се инфинитарне логике. Најједноставнији случај инфинитарне логике јесте логика $L_{\omega_1\omega}$ у којој су дозвољене пребројиве конјункције и дисјункције. Ова логика, у ствари, представља један фрагмент логике $L_{\infty\omega}$ у којој су допуштене дисјункције и конјункције преко скупа формула произвољних кардиналности. Формално, формуле логике $L_{\infty\omega}$ дефинишемо као најмању класу затворену за уобичајене везнике и квантификаторе логике $L_{\omega\omega}$ и затворену за конјункције произвољних скупова формула. Према томе, ако је Φ скуп формула логике $L_{\infty\omega}$, онда је и $\bigwedge\Phi$ формуле логике $L_{\infty\omega}$. Аналогно се дефинише и скуп формула логике $L_{\omega_1\omega}$. У оба случаја, релацију задовољења проширујемо следећим условом:

$$\mathcal{M}\models\bigwedge\Phi \quad \text{акко} \quad \mathcal{M}\models\varphi \quad \text{за свако } \varphi \text{ из } \Phi.$$

Користећи де Морганове законе, дисјункцију $\bigvee\Phi$ можемо дефинисати као скраћење формуле $\neg\bigwedge\{\neg\varphi \mid \varphi\in\Phi\}$. У општем случају, фрагмент инфинитарне логике је дефинисан као фрагмент логике $L_{\infty\omega}$ (видети поглавље 3), међутим, како ћемо надаље радити искључиво са пребројивим (допустивим) фрагментима, детаљније ће бити описана логика $L_{\omega_1\omega}$.

Постоје формуле језике $L_{\omega_1\omega}$ са бесконачно много слободних променљивих. Од сада ће наша пажња бити усмерена само на оне формуле које имају само коначно много слободних променљивих. Уколико формула има коначно много слободних променљивих, онда свака њена потформула такође садржи коначан број слободних променљивих. Ако је φ реченица језика $L_{\omega_1\omega}$, онда свака потформула формуле φ има коначан број слободних променљивих. Иначе, језик $L_{\omega_1\omega}$ има непребројиво много формула, што представља један од разлога увођења фрагмената ове логике. Многе структуре, које се не могу описати у предикатском рачуну првог реда, могу бити описане формулама логике $L_{\omega_1\omega}$: класа свих коначних модела, класа свих група са торзијом, класа поља карактеристике нула, класа архимедски уређених поља итд. На пример, класа свих група са торзијом окарактерисана је конјункцијом уобичајених аксиома за групе заједно са: $\forall x\bigvee\{\underbrace{x*\cdots*x}_{n}=e \mid n\in\mathbb{N}\}$.

Такође, ако за природан број n већи од 1, са $\varphi_{\geq n}$ означимо формулу

$$\exists v_0 \dots \exists v_{n-1}(\neg v_0 = v_1 \wedge \dots \wedge \neg v_0 = v_{n-1} \wedge \dots \wedge \neg v_{n-2} = v_{n-1}),$$

имамо да важи: $\mathcal{M} \models \bigvee\{\neg\varphi_{\geq n} \mid n > 1\}$, ако „$M$ је коначан скуп”. Ако се дозволе докази бесконачне дужине, логика $L_{\omega_1\omega}$ има аксиоматски систем који је потпун у односу на уведену семантику. Прецизније, у логици $L_{\omega_1\omega}$ може се дефинисати појам доказа тако да за сваки скуп реченица Σ и сваку реченицу φ језика $L_{\omega_1\omega}$, $\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi$.

Прву теорему потпуности за ову логику доказао је Карп (1964). Аксиоматски систем предикатског рачуна првог реда проширен је на следећи начин: за сваку реченицу $\bigwedge\Phi$ и $\varphi \in \Phi$ додаје се аксиома (i) $\bigwedge\Phi \to \varphi$; и правило извођења (ii) из $\psi \to \varphi$, за свако φ из Φ, закључује се $\psi \to \bigwedge\Phi$. Нека је даље $\varphi = \bigwedge\{\neg\varphi_{\geq n} \mid n \geq 2\}$. Реченица φ важи у моделу $\mathfrak{A}$ акко је скуп A коначан. Закључује се да скуп реченица $\{\varphi\} \cup \{\neg\varphi_{\geq n} \mid n \geq 2\}$ нема модел и притом, сваки његов коначан подскуп има модел, тј. у логици $L_{\omega_1\omega}$ не важи став компактности.

Све у свему, прелазећи од предикатског рачуна првог реда $L_{\omega\omega}$ на логику $L_{\infty\omega}$, постиже се знатно већа изражајна моћ, али се, с друге стране, многа добра својства логике $L_{\omega\omega}$ нарушавају, у првом реду компактност. На пример, уколико се посматра само $L_{\omega_1\omega}$ као фрагмент логике $L_{\infty\omega}$, нека својства попут компактности и интерполације рецимо, остају сачувана. Увођење појма допустивог фрагмента инфинитарне логике $L_{\infty\omega}$, који је детаљно описан у поглављу 3, у ствари је концепт враћања компактности и других добрих особина логике првог реда уз задржавање, штавише појачавање, изражајне моћи инфинитарних логика.

Логике са уопштеним квантификаторима $L(Q)$

Поред уопштавања логичких везника, у логици првог реда могу се уопштавати и квантификатори. Идеја уопштавања квантификатора потиче од Мостовског [1957]. Његова идеја била је да се додају квантификатори који експлицитно представљају појмове „коначно много” и „пребројиво много” који нису дефинабилни у логици првог реда, а имају велики значај у математици. Међутим, прва систематична студија ових логика појављује се у Кислеровим радовима [1970], где проучава логику $L(Q_1)$ која настаје додавањем квантификатора Q_1 (постоји непребројиво много) логици првог реда. Доказом комплетности, за једноставан и експлицитан скуп аксиома, и других својстава, као што је теорема о испуштању типова са последицама, Кислер отвара поље за проучавање разних екстензија ове логике, које ће задржати нека добра својства логике првог реда. Сгроове тополошке логике, којима ћемо се бавити у последњем поглављу, представљају последицу ових Кислерових радова на логикама са уопштеним квантификаторима.

У логикама са уопштеним квантификаторима $L(Q)$ квантификатор Q може бити интерпретиран на различите начине. Наиме, за сваки ординал α, језик првог реда L може се проширити квантификатором Q_α и одговарајућа логика је $L(Q_\alpha)$. Скуп формула језика L_{Q_α} генерисан је правилима која поред стандардних садрже правило: ако је φ формула и x променљива, израз облика $Q_\alpha x\varphi$ је формула језика L_{Q_α}, при чему је x везана променљива у овој формули. Интерпретација формуле облика $Q_\alpha x\varphi$ у моделу $\mathfrak{A}$ за валуацију $v : \mathrm{Var} \to A$ дефинисана је тако да:

$$\mathfrak{A} \models Q_\alpha x\varphi \text{ акко кардиналност скупа } \{b \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi[v(b/x)]\} \text{ је већа или једнака од } \omega_\alpha,$$

где је $v(b/x)$ валуација која свим променљивим додељује исте вредности као и валуација v, осим променљивој x, којој додељује вредност b.

Као што је већ наведено, од великог значаја је логика $L(Q_1)$ која је на неки начин изграђена на разликовању пребројиво–непребројиво. Она је погодна за дефинисање појмова као што су пребројиво генерисане групе, разне непребројиве структуре итд. Логика $L(Q_0)$ истиче однос коначно–бесконачно и у њој можемо дефинисати појмове као што су групе са торзијом, коначно генерисане групе, коначно-димензионе векторске просторе, а могу се дефинисати и природни бројеви. За разлику од логике $L(Q_1)$, за логику $L(Q_0)$ не може се доказати теорема потпуности. Такође, не важи ни теорема компактности, али важи Ловенхајм-Сколемова теорема. У $L(Q_1)$ не важи теорема компактности, а ни Ловенхајм-Сколемова теорема, будући да формула $Q_1x(x = x)$ нема пребројив модел. Међутим, логика $L(Q_1)$ је занимљива и због тога што у њој, бар у пребројивом случају, важи став компактности, тј. важи: сваки пребројив скуп $L(Q_1)$-реченица је задовољив акко је сваки његов коначан подскуп задовољив. Да теорема компактности не важи (за непребројиве скупове реченица) показује следећи пример: ако језик садржи непребројив скуп симбола константи $\{c_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$, сваки коначан подскуп од $\{\neg c_\alpha = c_\beta \mid 0 \leq \alpha < \beta < \omega_1\} \cup \{\neg Q_1x(x = x)\}$ је задовољив, док читав скуп то није.

Уколико се квантификатор Q интерпретира са „бити отворен скуп”, модификовањем аксиоматског система логике $L(Q_1)$, добија се логички систем погодан за описивање појма топологије, који као појам „вишег реда” није био описив у логици првог реда.

1. Нестандардна анализа

Још крајем 17. века, Лајбниц је увео метод актуелних инфинитезимала у диференцијални и интегрални рачун, али тек Абрахам Робинсон (1918–1974) шездесетих година прошлог века ове идеје поставља на строге математичке основе. Његов оригинални приступ је био базиран на нестандардним моделима поља реалних бројева. Наиме, Робинсон је нашао пут да сваку математичку структуру $\mathfrak{A}$, на пример, стандардни мерљив простор $(A, \mathcal{F}, \mu)$ утопи у екстензију ${}^*\mathfrak{A}$, која садржи „идеалне" (нове) елементе. Тражена екстензија ${}^*\mathfrak{A}$ се може добити алгебарским путем узимајући ултрастепен ${}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^I/_U$, где је U ултрафилтер на подскуповима индексног скупа.

Нестандардна анализа је грана математике која формулише анализу користећи строги појам инфинитезимале, где је елемент уређеног поља F инфинитезимала ако и само ако је његова апсолутна вредност мања од било ког елемента поља F облика $\frac{1}{n}$, за природан број n. Уређена поља која имају инфинитезимале названа су неархимедовским пољима. Нестандардна анализа користи методе теорије модела, дисциплине математичке логике, проширујући универзум класичне анализе до такозваног нестандардног универзума који садржи бесконачно мале (инфинитезимале) и бесконачно велике елементе. Уопштеније, нестандардна анализа је било која форма математике која се односи на нестандардне моделе и принцип трансфера, који је описан у наредном поглављу (видети [44], [53]).

1.1. Нестандардни универзум ${}^*V(S)$

Нека је $S \neq \emptyset$ скуп праелемената тако да елементи од S нису скупови. Претпоставља се да S садржи скуп $\mathbb{R}$ реалних бројева јер је уобичајено да се математичке теорије изграђују у вези са реалним бројевима. Уколико је у питању реална анализа (чак и комплексна), довољно је да се узме $S = \mathbb{R}$.

Суперструктуру $V(S)$ изграђујемо индукцијом, и то:

$$V_0(S) = S, \quad V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup \mathbb{P}(V_n(S)), \quad V(S) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n(S)$$

Уочава се да се сви жељени објекти над S могу сместити у $V(S)$. На пример, ако $x, y \in V(S)$, тада $\{x, y\} \in V(S)$, па тиме и $(x, y) \in V(S)$, због $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. Одатле и свака функција f са доменом и рангом у $V(S)$ такође припада $V(S)$. Даље, ако је $(X, \mathcal{F}, \mu)$ мерљив простор тако да $X \subseteq S$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}(X)$ и $\mu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, види се да $X \in V_1(S)$, $\mathcal{F} \in V_2(S)$, $\mu \in V_5(S)$ и $(X, \mathcal{F}, \mu) \in V_9(S)$. Уобичајено је да све потребне структуре „упадну" у, на пример, $V_{20}(S)$.

Структура ${}^*S$ и пресликавање $*\colon V(S) \to V({}^*S)$ је стандардни модел за S уколико задовољава следеће:

(1) ${}^*S$ је права екстензија од S и $* \restriction s$ је идентично пресликавање, тј. ${}^*s = s$, за $s \in S$, ово је принцип екстензије.

(2) За сваки $A_1, \ldots, A_n \in V(S)$ и сваку ограничену формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (тј. формулу која је изграђена само помоћу $\in, =, \wedge, \vee, \neg, \to$ и ограничених квантификатора $\forall x \in y$, $\exists x \in y$) важи:

$$V(S) \models \varphi(A_1, \ldots, A_r) \quad \text{акко} \quad V({}^*S) \models \varphi({}^*A_1, \ldots, {}^*A_n)$$

Ово је Лајбницов принцип или принцип трансфера.

(3) Ако су $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ непразни скупови из ${}^*V(S)$, тада је $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, и ово је принцип ω_1-засићености, који допушта конструкцију „идеалних” елемената.

Размотримо случај када је $S=\mathbb{R}$. По принципу трансфера, алгебарске аксиоме и аксиоме за уређена поља важе и у суперструктури ${}^*\mathbb{R}$. На пример, познато је да важи $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\big(x<y \rightarrow (x+z)<(y+z)\big)$ и зато је $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(\forall z \in {}^*\mathbb{R})\big(x\,{}^*\!< y \rightarrow (x\,{}^*\!+z)\,{}^*\!<(y\,{}^*\!+z)\big)$, будући да $<\in V_3(\mathbb{R})$ и $+\in V_5(\mathbb{R})$. Такође, ако $x,y\in\mathbb{R}$ и $x<y$, онда је и $x^*{=}x\,{}^*\!<y^*{=}y$, тј. ${}^*\!<$ проширује $<$, итд. Закључујемо да је уређено поље $({}^*\mathbb{R}, {}^*\!+, {}^*\cdot, {}^*\!<, 0, 1)$ право проширење поља реалних бројева. Истовремено, и свака функција $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ или скуп $X \subseteq \mathbb{R}^n$ су проширени функцијом ${}^*f\colon ({}^*\mathbb{R})^n \to {}^*\mathbb{R}$ или скупом ${}^*X \subseteq ({}^*\mathbb{R})^n$ тако да су својства од f и X задржана код објеката ${}^*f$ и ${}^*X$.

За елемент $x\in{}^*\mathbb{R}$ се каже да је коначан (бесконачан) уколико је $|x|<n$ за неко $n\in\mathbb{N}$ ($|x|>n$ за свако $n\in\mathbb{N}$). По принципу екстензије ${}^*\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}\neq\emptyset$, тако да можемо узети $x\in{}^*\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$. Ако је x бесконачан, онда је x^{-1} ненула инфинитезимала (x је инфинитезимала ако је $|x|<\frac{1}{n}$ за свако $n\in\mathbb{N}$). Уколико је x коначан, онда постоји јединствени $\mathrm{st}(x)=\sup\{\alpha\in\mathbb{R}\mid \alpha<x\}$ назван стандардним делом од x, где је $x-\mathrm{st}(x)$ ненула инфинитезимала. Уколико је $x\in{}^*\mathbb{R}$ бесконачан, онда постоји јединствени $H\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, тако да важи $H\le x<H+1$.

Уређено поље реалних бројева је комплетно, тј. важи:

$$(\forall A \in V_1(\mathbb{R}))\Big((\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in A)(y\le x)\rightarrow$$
$$\rightarrow(\exists x_0\in\mathbb{R})\Big((\forall y\in A)(y\le x_0)\wedge(\forall x\in\mathbb{R})\big((\forall y\in A)(y\le x)\rightarrow(x_0\le x)\big)\Big)\Big).$$

По принципу трансфера важиће исто тврђење за све $A\in{}^*V_1(\mathbb{R})$, тако да се закључује да $V({}^*\mathbb{R})$ није једнако са ${}^*V(\mathbb{R})$. Због тога, од интереса је скуп $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} {}^*V_n(\mathbb{R})$, тако да имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.1.1. Скуп $A\in V({}^*S)$ је интерналан уколико $A\in{}^*B$ за неко $B\in V(S)$. Остали скупови у $V({}^*S)$ су екстернални.

Скуп ${}^*V(\mathbb{R})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}{}^*V_n(\mathbb{R})$ је колекција свих интерналних скупова у $V({}^*\mathbb{R})$. Појам интерналног скупа је најважнији у нестандардној анализи, будући да интернални скупови наслеђују све добре особине одговарајућих скупова. Због тога је важно знати како конструисати нове интерналне скупове полазећи од старих и како их препознати у раду.

Интернални дефинициони принцип. Скуп је интерналан акко се може описати као $\{x\mid x\in A\wedge\varphi(x,A_1,\ldots,A_n)\}$, где је $\varphi(x)$ ограничена формула са једном слободном промењивом x и све константе су међу интерналним скуповима $A_1,\ldots,A_n$.

Доказ. Очигледно је задати услов потребан. Такође је и довољан јер за k такво да $A, A_1,\ldots,A_n\in{}^*V_k(S)$, примењујући трансфер на реченицу

$$(\forall B, B_1,\ldots,B_n\in V_k(S))(\exists X\in V_k(S))\Big(X\subseteq B\wedge(\forall b\in B)\big(b\in X\leftrightarrow\varphi(b,B_1,\ldots,B_n)\big)\Big),$$

долазимо до интерналног скупа са траженом особином. □

Скуп A је стандардан ако је $A={}^*B$ за неко $B\in V(S)$.

Теорема 1.1.2. *(1) Ако $A\in V(S)$, онда је ${}^*A$ интерналан.*

(2) Скуп A је интерналан акко $A \in B$ за неки стандардни скуп B.
(3) Ако је A интерналан и $B \in A$, онда је и B интерналан.
(4) Ако су $A_1, A_2, \ldots$ интернални, онда је $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ интерналан скуп акко $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

Важну групу интерналних скупова чине хиперконачни скупови. То су интернални скупови који одговарају коначним скуповима у $V(\mathbb{R})$.

Дефиниција 1.1.3. Интернални скуп A је хиперконачан ако постоји интернална бијекција $f\colon \{1,2,\ldots,H\} \to A$ за неко $H \in {}^*\mathbb{N}$. Кардиналност H је названа интернална кардиналност скупа A и означена је са $|A|$.

Важност бесконачних хиперконачних скупова лежи у чињеници да су формално као коначни скупови. На пример, ако је A коначан и $|A| = H$, онда је ${}^*\mathbb{P}(A)$ хиперконачан и $|{}^*\mathbb{P}(A)| = 2^H$, где је ${}^*\mathbb{P}(A)$ скуп свих интерналних подскупова од A. За дати хиперконачни скуп $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$, може се наћи $\sum_{a\in A} a, \max\{a \mid a \in A\}$ итд.

1.2. Лебова мера

У овом поглављу је представљена веза између теорије мере и нестандардне анализе. Један од најважнијих појмова нестандардне анализе, помоћу којих се дошло до нових резултата у математици, јесте Лебова мера. Посебно је значајна за теорију мере, стохастичких процеса, парцијалних и интегралних једначина, функционалних једначина итд.

Дефиниција 1.2.1. Мерљив простор чини тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где је:
(1) $X \neq \emptyset$;
(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ је σ-(комплетна)(Булова) алгебра, тј.:
  (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
  (ii) Ако $A_i \in \mathcal{A}$ за $i \in \mathbb{N}$, тада $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$;
  (iii) Ако $A \in \mathcal{A}$, тада $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(3) $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ $\quad(\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0,\infty\})$ је σ-адитивна функција, тј. ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, и $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, тада $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$.

Дефиниција 1.2.2. Коначно адитиван мерљив простор чини тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$, где је:
(1) $X \neq \emptyset$;
(2) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ је (Булова) алгебра, тј.:
  (i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
  (ii) Ако $A, B \in \mathcal{A}$, тада $A \cup B \in \mathcal{A}$;
  (iii) Ако $A \in \mathcal{A}$, тада $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(3) $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ је коначно адитивна функција, тј. ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B = \emptyset$, тада је $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Од посебног значаја надаље биће дефиниција интерналног мерљивог простора.

Дефиниција 1.2.3. Нека су $X, \mathcal{A}, \mu$ интернални скупови и $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$. Тројка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ чини интерналан коначно-адитиван мерљив простор ако је:
(1) $\mathcal{A}$ Булова алгебра;
(2) $\mu\colon \mathcal{A} \to {}^*\overline{\mathbb{R}}^+$ коначно адитивна мера.

Може се показати да је $\mu(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A) = \sum_{A\in\mathcal{F}} \mu(A)$ за сваки хиперконачни скуп $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Уколико је X хиперконачан, тада говоримо о хиперконачном интерналном простору. Следећи пример таквог простора је врло интересантан.

Пример 1.2.4. Нека је $X = T_H = \{0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \dots, 1\}$, где $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = {}^*\mathbb{P}(T_H)$ и $\mu(A) = \frac{|A|}{H+1}$, $A \in {}^*\mathbb{P}(T_H)$. Тада простор $(T_H, {}^*\mathbb{P}(T_H), \mu)$ зовемо хиперконачним простором са униформном мером $\mu(\{\frac{k}{H}\}) = \frac{1}{H+1}$.

Од интерналног простора са (хипер) коначно-адитивном мером μ може да се добије коначно-адитиван мерљив простор узимајући да је $\bar{\mu}(A) = \operatorname{st}\mu(A)$ за $A \in \mathcal{A}$.

Нека је $(X, \mathcal{A}, \mu)$ интерналан мерљив простор. Скуп $B \subseteq X$ је μ-апроксимабилан ако је

$$\inf\{\operatorname{st}\mu(A) \mid B \subseteq A, A \in \mathcal{A}\} = \sup\{\operatorname{st}\mu(A) \mid A \subseteq B, A \in \mathcal{A}\}.$$

Дефиниција 1.2.5. 1° Лебова алгебра $L(\mathcal{A})$ се састоји од свих $B \subseteq X$, таквих да је $B \cap F$ μ-апроксимабилан за свако $F \in \mathcal{A}$ са коначном μ-мером.

2° Лебова мера од μ је пресликавање $L(\mu)\colon L(\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ дефинисано са $L(\mu)(B) = \inf\{\operatorname{st}\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}$ и $B \subseteq A\}$.

Коришћењем теореме Каратеодорија може се показати да се сваки коначно адитиван мерљив простор настао од интерналног може проширити до комплетног мерљивог простора.

Дефиниција 1.2.6. Мерљив простор $(X, \mathcal{A}, \mu)$ је комплетан ако садржи све подскупове скупа мере нула, тј. ако је $A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$, тада за сваки $B \subseteq A$ следи да $B \in \mathcal{A}$.

Теорема 1.2.7 (Каратеодори). *Свака коначно-адитивна мера μ на алгебри $\mathcal{A}$, која је σ-адитивна, може бити проширена до мере λ дефинисане на најмањој σ-комплетној алгебри $\sigma(\mathcal{A})$ која раширује $\mathcal{A}$.*

Теорема 1.2.8. *Сваки мерљив простор можемо да проширимо до комплетног мерљивог простора.*

Следећа лема је последица ω_1-засићености и даје нам потребне услове за примену Каратеодоријеве теореме.

Лема 1.2.9. *Коначно адитиван мерљив простор $(X, \mathcal{A}, \bar{\mu})$, где је $\bar{\mu} = \operatorname{st}\mu$, је σ-адитиван.*

Доказ. Најпре треба доказати да за сваки монотоно неопадајући низ $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ важи $(*)$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ акко $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\le m} A_i$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Нека је $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Тада, $A \setminus A_1 \supseteq A \setminus A_2 \supseteq \cdots$ и $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A \setminus A_i) = A \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$, па због ω_1-засићености $\bigcap_{i\le m} (A \setminus A_i) = \emptyset$, за неко $m \in \mathbb{N}$. Отуда, $A = \bigcup_{i\le m} A_i$. Обрат од $(*)$ је очигледан. Стога, ако је $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ дисјунктан низ елемената из $\mathcal{A}$, то на основу $(*)$ имамо

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{i\le m} A_i\right) = \sum_{i\le m} \bar{\mu}(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_i),$$

чиме је доказ завршен. □

Као последица претходне леме, Каратеодоријеве теореме и теореме 1.2.8 добија се следећи важан резултат.

Теорема 1.2.10 (Леб). *Сваки интерналан мерљив простор $(X, \mathcal{A}, \mu)$ се може раширити до комплетног мерљивог простора.*

Поставља се питање, да ли је мерљив простор из претходне теореме управо простор $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$. Одговор је потврдан.

Теорема 1.2.11. *Лебова мера $L(\mu)$ је комплетна мера на σ-алгебри $L(\mathcal{A})$ и она представља јединствено проширење мере $\bar{\mu}$. Такође, за свако $B \in L(\mathcal{A})$, за које је $L(\mu)(B) < \infty$, постоји $A \in \mathcal{A}$ тако да је $L(\mu)(B \Delta A) = 0$.*

Снага Лебове мере се огледа и кроз везу између мерљивости функција на Лебовом простору $L(X) = (X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$ и интерналних ($\mathcal{A}$-мерљивих) функција на X.

Теорема 1.2.12 (Лифтинг теорема)**.** *Нека је $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Тада, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ је Леб мерљива акко постоји интернална $\mathcal{A}$-мерљива функција $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ таква да је $\operatorname{st} F(a) = f(a)$ за $L(\mu)$-скоро све $a \in X$.*

Уобичајено, функција $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ је Леб мерљива уколико важи $\{x \in X \mid f(x) \leq r\} \in L(\mathcal{A})$ за свако $r \in \overline{\mathbb{R}}$; слично се дефинише $\mathcal{A}$-мерљива интернална функција F.

Дефиниција 1.2.13. Интернална и $\mathcal{A}$-мерљива функција $F : X \to {}^*\mathbb{R}$ је лифтинг функције $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ уколико је

$$L(\mu)\big(\{x \in X \mid \operatorname{st} F(x) \neq f(x)\}\big) = 0.$$

Теорема 1.2.14. *Нека је f ограничена Леб мерљива функција са ограниченим лифтингом F. Тада је $\int f \, d\, L(\mu) = \operatorname{st}\big(\int F \, d\mu\big)$.*

Уколико су $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ два интернално коначно адитивна мерљива простора, онда имамо и интерналан производ $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2)$, где је $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ интернални производ генерисан алгебрама $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Овај простор има одговарајући Лебов простор $(X_1 \times X_2, L(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2), L(\mu_1 \times \mu_2))$, док се с друге стране може доћи и до простора $(X_1 \times X_2, \overline{L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)}, \overline{L(\mu_1) \times L(\mu_2)})$. Андерсон и Хувер[1] су показали да је $\overline{L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)} \subsetneq L(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, где $\overline{L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)}$ означава комплетирање производа σ-алгебри у односу на производ мера, и мере $L(\mu_1 \times \mu_2)$ и $L(\mu_1) \times L(\mu_2)$ се поклапају на $\overline{L(\mathcal{A}_1) \times L(\mathcal{A}_2)}$.

Теорема 1.2.15 (Кислер[2]–Фубини)**.** *Нека је $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad L(\mu_1 \times \mu_2)$-мерљива функција. Тада:*

(1) За $L(\mu_2)$-скоро све $a_2 \in X_2$, функција $f(\cdot, a_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ је $L(\mu_1)$-мерљива;

(2) Ако је f интеграбилна, онда је

(а) за μ_2-скоро све a_2, функција $f(\cdot, a_2)$ је интеграбилна на X_1;

(б) функција $g(a_2) = \int f(a_1, a_2) \, d\, L(\mu_1)$ је интеграбилна на X_2;

(в) $\int g(a_2) \, d\, L(\mu_2) = \int f(a_1, a_2) \, d\, L(\mu_1 \times \mu_2)$.

1.3. Лебова конструкција Данијеловог интеграла

Векторска мрежа $\mathbb{R}$-вредносних функција на скупу A је векторски простор $\mathcal{F}$ свих $\mathbb{R}$-вредносних функција на A, тако да је $f \wedge g \overset{\text{деф}}{=} \min\{f, g\} \in \mathcal{F}$ и $f \vee g \overset{\text{деф}}{=} \max\{f, g\} \in \mathcal{F}$ за било које функције $f, g \in \mathcal{F}$. Уређена тројка $(A, \mathcal{F}, I)$, где I означава позитиван линеарни функционал на $\mathcal{F}$ који има својство монотоне конвергенције, тј. ако су $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ елементи од $\mathcal{F}$ и важи да је $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ и $f \in \mathcal{F}$, тада је $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$, зове се Данијелов интеграл.

[1] Dauglas Hoover

[2] Jerome Keisler

Нека је A интерналан скуп у ω_1-засићеном проширењу структуре која садржи реалне бројеве $\mathbb{R}$, нека је L интернална векторска мрежа ${}^*\mathbb{R}$-вредносних функција на A и нека је I интерналан позитиван линеаран функционал на L. Скуп L_0 нека буде скуп свих интерналних и екстерналних ${}^*\mathbb{R}$-вредносних функција f на A тако да за свако $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ постоји $g \in L$ тако да је $|f| \leq g$ и $I(g) < \varepsilon$, и нека је L_1 скуп свих $\mathbb{R}$-вредносних функција h на A таквих да је $h = \varphi + \psi$, где $\varphi \in L$, $\operatorname{st} I(|\varphi|) < +\infty$ и $\psi \in L_0$. Може се лако показати да су L_0 и L_1 векторске мреже и да је позитиван линеаран функционал J на L_1, дат са $J(h) = \operatorname{st} I(\varphi)$ за свако $h \in L_1$, добро дефинисан. Такође, на основу принципа ω_1-засићености следи да својство монотоне конвергенције важи за J на L_1.

Данијелови интеграли (A, L, I) и (A, L_1, J) се на сличан начин односе као и интернални мерљив простор и његов Лебов простор. На пример, може се показати (видети [42]) да $h \in L_1$ ако и само ако за свако $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ постоје функције φ_1 и φ_2 из L тако да је $\varphi_1 \leq h \leq \varphi_2$, $\operatorname{st} I(|\varphi_1|) < +\infty$, $I(\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$ и, према томе, $\operatorname{st} I(\varphi_1) \leq J(h) \leq \operatorname{st} I(\varphi_1) + \varepsilon$. Следећи корак је конструкција екстензије од L_1 и J. Нека је L^+ скуп функција $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}_+$ таквих да је $g \wedge f \in L_1$ за свако $f \geq 0$ из L_1. Нека је $\bar{J}(g) = \sup_{0 \leq f \in L_1} J(g \wedge f)$ за свако $g \in L^+$. Нека је $\bar{L} = \{g \mid g \vee 0 \in L^+ \text{ и } -g \vee 0 \in L^+\}$ и $\bar{J}(g) = \bar{J}(g \vee 0) - \bar{J}(-g \vee 0)$ уколико је бар једна вредност $\bar{J}(g \vee 0)$ или $\bar{J}(-g \vee 0)$ коначна. Може се закључити да је $L_1 \subseteq \bar{L}$, $\bar{J} \restriction L_1 = J$, $\mathbb{1} \in L^+$ и ако $\varphi \in L$, онда $\operatorname{st}\varphi \in \bar{L}$. Нека $\mathcal{L}_1$ буде скуп свих $B \subseteq A$ таквих да је карактеристична функција χ_B од B у скупу L_1, и слично, нека је $\mathcal{F}$ скуп свих $B \subseteq A$ тако да је χ_B у L^+.

Данијелов интеграл $(A, L^+, \bar{J})$ индукује стандардан мерљив простор $(A, \mathcal{F}, \mu)$, где је $\mu(B) = \bar{J}(\chi_B)$ за свако $B \in \mathcal{F}$, тако да је $\bar{J}(g) = \int_A g\, d\mu$ за свако $g \in L^+$. У случају када је $\mathbb{1} \in L_1$, важиће $\mathcal{F} = \mathcal{L}_1$ и $\mu(A) < +\infty$.

Теорема 1.3.1 (Леб). *Нека је (A, L, I) Данијелов интеграл на A у ω_1-засићеном нестандардном универзуму тако да је $\mathbb{1} \in L$. Тада постоји комплетна пребројиво адитивна реално вредносна мера μ на A таква да је $\int \operatorname{st}\varphi\, d\mu = \operatorname{st} I(\varphi)$ за сваку ограничену $\varphi \in L$. Уколико је $I(\mathbb{1}) = 1$, онда постоји вероватносна мера μ.*

Напомена 1.3.2. Када је L мрежа $\mathcal{F}$-једноставних функција, тј. функција које имају коначне рангове, на интерналном мерљивом простору $(A, \mathcal{F}, \nu)$, онда је L_1 мрежа Леб интеграбилних функција и мера μ из претходног излагања је једнака Лебовој мери $L(\nu)$.

2. Допустиви скупови

Аксиоме разних теорија скупова углавном изражавају очигледне принципе на којима су утемељена сва математичка расуђивања. На пример, сасвим је природно да скупове можемо окарактерисати следећим својствима:

– једнаки скупови имају исте елементе;
– свака фамилија скупова има унију;
– над сваким скупом постоји скуп свих његових подскупова;
– постоји бесконачан скуп;
– слика скупа при сваком пресликавању је такође скуп;
– сви математички објекти су скупови.

Сви наведени принципи могу се изразити у предикатском рачуну. Њихова формулација у језику $L_{\mathrm{ZF}} = \{\in\}$, где је $\in$ бинарна релацијска константа, јесте Цермело-Френкелова теорија скупова, у ознаци ZF. Осим наведених принципа теорије ZF у математици се користи и аксиома избора, која такође има јединствену формулацију у језику L_{ZF}.

Централни појам у овом поглављу је појам допустивог скупа, који је, грубо речено, очекивани модел одређене теорије првог реда и заузима важно место у конструкцији логичких система, који ће бити изложени у даљем раду. Настала још почетом шездесетих, теорија допустивих скупова се ослања на теорију модела, теорију израчунљивости и теорију скупова. Појам допустивог скупа увели су Крипке[1] и Платек[2] управљајући се пре свега теоријом рекурзија. Они су уопштили уобичајену теорију израчунљивости природних бројева на ординале који су мањи од неког фиксираног, тзв. допустивог ординала. Крипке–Платекова теорија скупова (KP) је „минимална” теорија у којој се може засновати појам израчунљивости. Скуп је допустив ако и само ако је непразан, транзитиван и модел Крипке–Платекове теорије скупова. Теорија KP, која ће бити детаљно изложена у овом поглављу, је теорија првог реда на језику $\{\in\}$ и слабија је од ZF теорије скупова јер се одбацује аксиома партитивног скупа, док су аксиоме сепарације и колекције ограничене само на одређену врсту формула.

Сам приступ допустивим скуповима почећемо колекцијом M математичких објеката које зовемо урелементима (атомима, тачкама, праелементима) који нису скуповне природе и који су унапред дати. Објекти скупа M могу бити природни бројеви, реални бројеви, елементи неке групе или пак неки физички објекти. Од објеката скупа M се даље конструишу скупови у фазама (нивоима). У свакој фази α допуштено је формирати скупове од урелемената и скупова формираних у ранијим фазама. Објекат је скуп над M само уколико је формиран у некој од фаза у описаној конструкцији; колекција свих скупова над M је означена са $\mathbb{V}_M$. Допустиви скупови ће заправо бити транзитивни делови од $\mathbb{V}_M$ који су модели за KP, односно теорије KPU која настаје „додавањем” урелемената оригиналној теорији KP. Улога урелемената је вишеструка. Уколико бисмо дозволили довољно јаке принципе у конструкцији скупова у свакој фази α и ако бисмо претпоставили довољан број фаза изградње скупова, онда би урелементи постали сувишни. На пример, аксиома

[1] Soul Kripke
[2] Richard Platek

екстензионалности у теорији ZF одбацује егзистенцију објеката који нису скупови, док комбинација аксиоме замене и аксиоме партитивног скупа чини довољно јак принцип у конструкцији скупова који урелементе чини сувишним. С друге стране, над произвољном структуром $\mathcal{M} = (M, R_1, \ldots, R_k)$ се може формирати допустив скуп, који може бити врло користан у вези са проблемом дефинабилности над $\mathcal{M}$ (видети [4], [26],[42]).

2.1. Аксиоме теорије KPU

Нека је L језик првог реда са једнакошћу и неким релацијским, функцијским симболима и симболима константи и нека је $\mathcal{M} = (M, \ldots)$ структура за дати језик L. Циљ нам је да формирамо допустив скуп, као модел теорије KPU, који ће имати M као колекцију урелемената.

Теорија KPU је формулисана на језику $L^* = L(\in, \ldots)$ који је проширење језика L бинарним релацијским симболом $\in$ и евентуално другим функцијским и релацијским симболима као и симболима константи.

Дефиниција 2.1.1. Структура $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, E, \ldots)$ за L^* састоји се од:

(i) структуре $\mathcal{M} = (M, \ldots)$ за језик L, где су елементи од M урелементи за $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ и не искључује се могућност да M може бити празан скуп;

(ii) непразног скупа A дисјунктног са M (елементи од A су скупови из $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$);

(iii) релације $E \subseteq (M \cup A) \times A$ (која интерпретира симбол $\in$);

(iv) других функција, релација и константи дефинисаних на $M \cup A$ који су интерпретације осталих скупова из L^*.

За дату структуру $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, E, \ldots)$ за L^* користићемо три врсте променљивих: $p, q, r, \ldots$ за елементе из M (урелементе), $a, b, c, d, f, \ldots$ за елементе скупа A (скупове) и $x, y, z, \ldots$ за елементе из $M \cup A$.

На пример, формула $\forall p \, \exists a \, \forall x \, (x \in a \longleftrightarrow x = p)$ каже да скуп $\{p\}$ постоји за било који урелемент, док $\forall p \, \exists a \, \forall q \, (q \in a \longleftrightarrow q = p)$ тврди да постоји скуп a који у пресеку са класом свих урелемената даје скуп $\{p\}$.

Аксиоме теорије KPU су подељене у три групе. Аксиоме екстензионалности и регуларности тичу се основне природе скупова. Аксиоме пара, уније и Δ_0 сепарације дају принципе за конструкцију скупова, док аксиома Δ_0 колекција гарантује довољан број фаза у процесу конструкције.

Дефиниција 2.1.2. Колекција Δ_0 формула језика L^* је најмања колекција Y која садржи атомичне формуле језика L^* и затворена је за негацију, конјункцију, дисјункцију и ограничене квантификаторе:

(i) ако је φ из Y, онда је и $\neg\varphi$ такође из Y;

(ii) ако су φ, ψ из Y, онда су и $(\varphi \wedge \psi)$ и $(\varphi \vee \psi)$ из Y;

(iii) ако је φ из Y, онда су и $\forall u \in v \varphi$ и $\exists u \in v \varphi$ такође из Y за све променљиве u и v.

Важност Δ_0 формула се огледа у чињеници да је било који предикат, дефинисан Δ_0 формулом, апсолутан (видети даљи текст), као и у чињеници да се многи важни предикати могу дефинисати Δ_0 формулама (видети табелу 2.1).

Дефиниција 2.1.3. Теорија KPU се састоји од универзалних затворења следећих формула:
Екстензионалност: $\forall x \, (x \in a \longleftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$;

Регуларност: $\exists x\,\varphi(x) \to \exists x\,[\varphi(x) \land \forall y \in x \neg\varphi(y)]$, за све формуле $\varphi(x)$ у којима y нема слободно појављивање;

Пар: $\exists a\,(x \in a \land y \in a)$;

Унија: $\exists b\,\forall y \in a\,\forall x \in y\,(x \in b)$;

Δ_0 **сепарација:** $\exists b\,\forall x(x \in b \longleftrightarrow x \in a \land \varphi(x))$, за све Δ_0 формуле $\varphi(x)$ у којима се b не појављује слободно;

Δ_0 **колекција:** $\forall x \in a \exists y\,\varphi(x,y) \to \exists b\,\forall x \in a \exists y \in b\varphi(x,y)$, за све Δ_0 формуле у којима се b не појављује слободно.

Дефиниција 2.1.4. KPU^{+} је KPU плус аксиома $\exists a\,\forall x\,[x \in a \longleftrightarrow \exists p(x = p)]$ (постоји скуп свих урелемената).

Дефиниција 2.1.5. KP је KPU плус аксиома $\forall x\,\exists a\,(x = a)$ (сваки објекат је скуп, тј. не постоје урелементи).

2.2. Елементарни појмови теорије скупова KPU

Став 2.2.1. (i) Постоји јединствен скуп 0 који нема елементе.

(ii) За дато a, постоји јединствен скуп $b = \bigcup a$ такав да $x \in b$ акко $\exists y \in a\,(x \in y)$.

(iii) За дато a и b, постоји јединствен скуп $c = a \cup b$ такав да је $x \in c$ акко $x \in a$ или $x \in b$.

(iv) За дато a и b, постоји јединствен скуп $c = a \cap b$ такав да је $x \in c$ акко $x \in a$ и $x \in b$.

Доказ. (i) На основу дефиниције 2.1.1(ii) постоји скуп b. Скуп 0 добијамо применом Δ_0 сепарације на скуп b и формулу $x \neq x$. (ii) На основу аксиоме уније добијамо скуп b' такав да је $\forall y \in a\,\forall x \in y\,(x \in b')$, а затим на основу Δ_0 сепарације добијамо $b = \{x \in b' \mid \exists y \in a\,(x \in y)\}$. (iii) Непосредно следи из (ii), формирамо скуп $\bigcup\{a,b\}$. (iv) На основу Δ_0 сепарације постоји скуп $c = \{x \in a \mid x \in b\}$. У свим случајевима јединственост следи из аксиоме екстензионалности. □

Уређен пар за елементе x, y дефинише се на уобичајен начин и доказује се да $(x,y) = (z,v)$ акко $x = z$ и $y = v$.

Став 2.2.2. За све a, b постоји скуп $c = a \times b$, Декартов производа скупова a и b, тако да важи $c = \{(x,y) \mid x \in a \text{ и } y \in b\}$.

Доказ. У табели 2.1 се може видети да је предикат са промењљивим a, b, u „u је уређен пар (x,y), где је $x \in a$ и $y \in b$" један Δ_0 предикат. Доказаћемо најпре, да за произвољно и фиксирано $x \in a$ постоји v_x тако да је $(x,y) \in v_x$ за свако $y \in b$. За дато $y \in b$ постоји скуп $d = (x,y)$ тако да на основу Δ_0-колекције постоји скуп v_x такав да $(x,y) \in v_x$ за свако $y \in b$. Применићемо сада поново Δ_0 колекцију. Имамо да је $\forall x \in a\,\exists v\,\forall y \in b\,\exists d \in v\,(d = (x,y))$ и како је $\forall y \in b\,\exists d \in v\,(d = (x,y))$ Δ_0 формула, добијамо да постоји c_0 такав да за све $x \in a$, $y \in b$, $(x,y) \in v$ за неко $v \in c_0$. Према томе, ако је $c_1 = \bigcup c_0$, онда је $(x,y) \in c_1$ за све $x \in a$, $y \in b$. Тражени Декартов производ добијамо једном применом Δ_0-сепарације на $u \in c_1 \land u = (x,y) \land x \in a \land y \in b$. □

У теорији ZF се на једноставнији начин може доћи до Декартовог производа скупова a и b. Довољно је узети скуп $\mathbb{P}(\mathbb{P}(a \cup b))$ и применити аксиоме уније, партитивног скупа и сепарације. У оба случаја је скуп $a \times b$ јединствено одређен на основу аксиоме екстензионалности.

За скуп a рећи ћемо да је транзитиван, у ознаци $\mathrm{Tran}(a)$, ако и само ако $\forall y \in a \forall z \in y\,(z \in a)$. Примећује се да је $\mathrm{Tran}(a)$ једна Δ_0-формула. Узима се да је сваки скуп урелемената транзитиван, као и да је празан скуп 0 транзитиван.

Дефиниција 2.2.3. Нека је $\mathcal{S}(a) = a \cup \{a\}$.

Може се показати да ако је a скуп транзитивних скупова, онда је $\bigcup_a$ транзитиван. Такође, ако је a транзитиван и $b \subseteq a$, онда је и $a \cup \{b\}$ транзитиван, специјално, ако је a транзитиван, онда је и скуп $\mathcal{S}(a)$ транзитиван.

Дефиниција 2.2.4. Ординал је транзитиван скуп a такав да је произвољан елемент x скупа a такође транзитиван скуп, тј.:

$$\mathrm{Ord}(a) \longleftrightarrow \mathrm{Tran}(a) \wedge \forall x \in a\ \mathrm{Tran}(x).$$

За ординале ћемо користити променљиве $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ и писаћемо $\alpha < \beta$ уколико $\alpha \in \beta$. Ординал α је природни број ако за сваки $\beta \leq \alpha$ важи, ако је $\beta \neq 0$, онда је $\beta = \mathcal{S}(\gamma)$, за неко γ. За природне бројеве ћемо користити променљиве $n, m, \ldots$ Лако се доказују следећа тврђења: 0 је ординал; ако је α ординал, онда је и $\mathcal{S}(\alpha)$, у ознаци $\alpha + 1$; ако је $\alpha < \beta$, онда је $\alpha + 1 \leq \beta$; сваки непразан скуп ординала има најмањи елемент.

Дефиниција 2.2.5. Скуп a је коначан уколико постоји један-један функција f са доменом $\mathrm{dom}(f) = a$ и кодоменом n, за неки природан број n. Скуп a је пребројив уколико постоји један-један функција f чији је домен a таква да је $f(x)$ природни број за свако $x \in a$.

Табела 2.1.: Неки Δ_0 предикати

Предикати	Скраћенице	Δ_0 дефиниција
$x \subseteq y$		$\forall z \in x\,(z \in y)$
$a = \{y, z\}$		$y \in a \wedge z \in a \wedge \forall x \in a\,(x = y \vee x = z)$
$a = (y, z)$		$\exists b \in a \exists c \in a\,(b = \{y\} \wedge c = \{y, z\} \wedge a = \{b, c\})$
$a = (x, y)$ за неко y	$1^{\mathrm{st}}(a) = x$	$\exists c \in a \exists y \in c\,(a = (x, y))$
$a = (x, y)$ за неко x	$2^{\mathrm{nd}}(a) = y$	$\exists c \in a \exists x \in c\,(a = (x, y))$
$a = (x, y)$ за неко x, y	„a је уређен пар”	$\exists c \in a \exists x \in c \exists y \in c\,(a = (x, y))$
a је релација	$\mathrm{Reln}(a)$	$\forall x \in a$ „x је уређен пар”
f је функција	$\mathrm{Fun}(f)$	$\mathrm{Reln}(f) \wedge \forall a \in f \forall b \in f\,(1^{\mathrm{st}}a = 1^{\mathrm{st}}b \rightarrow 2^{\mathrm{nd}}a = 2^{\mathrm{nd}}b)$
$y = f(x)$		$\mathrm{Fun}(f) \wedge (x, y) \in f$
$a = \bigcup b$		$\forall x \in b\, \forall y \in x\,(y \in a) \wedge \forall y \in a\, \exists x \in b\,(y \in x)$

Формула облика $\exists u \varphi(u)$, где је φ Δ_0 формула, зове се Σ_1 формула.

Видећемо да је широка класа формула еквивалентна класи Σ_1 формула и да се Σ_1 формуле користе у разним формама сепарације, колекције и замене.

Дефиниција 2.2.6. Класа Σ формула је најмања класа Y која садржи Δ_0 формуле и затворена је за конјункцију и дисјункцију, ограничену квантификацију и задовољава услов:

(i) ако је φ у Y, онда је и $\exists u \varphi$ у Y за сваку променљиву u.

Класа Π формула је најмања класа Y' која садржи Δ_0 формуле и затворена је за конјункцију и дисјункцију, ограничену квантификацију и задовољава услов: ако је φ у Y', онда је и $\forall u \varphi$ из Y' за свако u.

На пример, две формуле $\forall b \in a$ (b је пребројив) и $\forall x \in a \, \exists b (\mathrm{Tran}(b) \wedge x \in b)$ су Σ, али нису Σ_1 формуле.

За дату формулу φ и променљиву w која се не појављује у φ, $\varphi^{(w)}$ ће означавати формулу која је настала заменом сваке неограничене квантификације у φ, ограниченом, тј. $\exists u$ мењамо са $\exists u \in w$, а $\forall u$ са $\forall u \in w$, за све променљиве u. Закључује се да је $\varphi^{(w)}$ једна Δ_0 формула. Уколико је φ Δ_0 формула, онда је $\varphi^{(w)} = \varphi$.

Следећа једноставна лема је од великог значаја за доказивање једног од најважнијих принципа теорије KPU – принципа Σ рефлексије.

Лема 2.2.7. *За сваку Σ формулу φ следеће формуле су ваљане (тј. тачне у свим структурама $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$)*

(i) $$\varphi^{(u)} \wedge u \subseteq v \rightarrow \varphi^{(v)},$$

(ii) $$\varphi^{(u)} \rightarrow \varphi\,.$$

Следећа теорема нам говори да је свака Σ формула еквивалентна некој Σ_1 формули у теорији KPU.

Теорема 2.2.8 (Принцип Σ рефлексије)**.** *За сваку Σ формулу φ тачно је следеће:* KPU $\vdash \varphi \longleftrightarrow \exists a \, \varphi^{(a)}$, *где је a било која скуповна променљива која се не појављује у φ.*

Принцип Σ рефлексије је од кључне важности за извођење других форми колекције, сепарације итд, тј. сепарација и колекција ће важити и за шире класе формула.

Теорема 2.2.9 (Принцип Σ колекције)**.** *За сваку Σ формулу следећи исказ је теорема у* KPU*: Ако је $\forall x \in a \, \exists y \, \varphi(x,y)$, онда постоји скуп b такав да важи $\forall x \in a \, \exists y \in b \, \varphi(x,y)$ и $\forall y \in b \, \exists x \in a \, \varphi(x,y)$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\forall x \in a \, \exists y \, \varphi(x,y)$ тачно. На основу Σ рефлексије постоји скуп c такав да је $\forall x \in a \, \exists y \in c \, \varphi^{(c)}(x,y) \ldots (1)$. Нека је $b = \{y \in c \mid \exists x \in a \, \varphi^{(c)}(x,y)\} \ldots (2)$, на основу Δ_0 сепарације. Како је $\varphi^{(c)}(x,y) \rightarrow \varphi(x,y)$ на основу леме 2.2.7, (1) имплицира $\forall x \in a \, \exists y \in b \, \varphi(x,y)$, док (2) имплицира $\forall y \in b \, \exists x \in a \, \varphi(x,y)$. $\square$

Теорема 2.2.10 (Δ сепарација)**.** *За било коју Σ формулу $\varphi(x)$ и Π формулу $\psi(x)$, следеће тврђење је теорема у* KPU*: Ако за свако $x \in a$, $\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)$, онда постоји скуп $b = \{x \in a \mid \varphi(x)\}$.*

Доказ. Претпоставимо да је $\forall x \in a (\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x))$. Тада је $\forall x \in a (\varphi(x) \vee \neg\psi(x))$, што је једна Σ формула, па постоји c тако да важи $\forall x \in a (\varphi^{(c)}(x) \vee \neg\psi^{(c)}(x))$. На основу Δ_0 сепарације нека је $b = \{x \in a \mid \varphi^{(c)}(x)\}$, наравно, свако $x \in b$ задовољава $\varphi(x)$. Ако $x \in a$ и важи $\varphi(x)$, онда важи и $\psi(x)$, а тада и $\psi^{(c)}(x)$ (будући да $\psi(x) \rightarrow \psi^{(c)}(x)$). Међутим, због $\forall x \in a (\varphi^{(c)}(x) \vee \neg\psi^{(c)}(x))$ важиће $\varphi^{(c)}(x)$, па према томе $x \in b$. $\square$

Теорема 2.2.11 (Принцип Σ замене)**.** *За сваку Σ формулу $\varphi(x,y)$ следећи исказ је теорема у* KPU*: Ако $\forall x \in a \, \exists! y \, \varphi(x,y)$, онда постоји функција f где је $\mathrm{dom}(f) = a$ тако да је $\forall x \in a \, \varphi(x, f(x))$.*

Доказ. На основу Σ колекције постоји скуп b тако да је $\forall x \in a \, \exists y \in b \, \varphi(x,y)$. Користећи Δ сепарацију, постоји f тако да је

$$f = \{(x,y) \in a \times b \mid \varphi(x,y)\} = \{(x,y) \in a \times b \mid \neg\exists z (\varphi(x,y) \wedge y \neq z)\}. \qquad \square$$

Теорема 2.2.12 (Јака Σ замена)**.** *За сваку Σ формулу $\varphi(x,y)$ важи следеће: Уколико $\forall x \in a$ $\exists y\, \varphi(x,y)$, онда постоји функција f где је* $\mathrm{dom}(f) = a$ *тако да је*

(i) $\forall x \in a\, f(x) \neq 0$;

(ii) $\forall x \in a\, \forall y \in f(x)\, \varphi(x,y)$.

Доказ. На основу Σ колекције постоји b тако да је $\forall x \in a\, \exists y \in b\, \varphi(x,y)$ и $\forall y \in b\, \exists x \in a$ $\varphi(x,y)$. Из Σ рефлексије добијамо да постоји w тако да важи $\forall x \in a\, \exists y \in b\, \varphi^{(w)}(x,y)$ и $\forall y \in b\, \exists x \in a\, \varphi^{(w)}(x,y)$. За произвољно и фиксирано $x \in a$ постоји јединствен скуп $c_x = \{y \in b \mid \varphi^{(w)}(x,y)\}$ на основу Δ_0 сепарације и аксиоме екстензионалности. Помоћу Σ замене добијамо функцију f са доменом a тако да је $f(x) = c_x$ за свако $x \in a$. □

2.3. Дефинициона екстензија језика L^*

Увођење дефиниција релацијских и функцијских симбола је уобичајена потреба, на пример, ради једноставнијег излагања. Дакле, језик се постепено шири новим предикатским, операцијским симболима или пак симболима индивидуалних константи. У теорији ZF нове симболе дефинишемо било којом формулом $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ језика L_{ZF}, на пример:

$$\text{(R)} \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n (R(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n))$$

тако да се дефинисани симболи увек могу елиминисати и сва тврђења доказива у проширеном језику доказати у језику L_{ZF}. У теорији KPU, с обзиром на синтаксну форму аксиома, нови релацијски симбол R дефинисаће се само Δ_0 формулом. Коришћењем нових принципа доказаних у одељку 2.2, код дефинисања релацијског симбола постојаће већа комоција.

Дефиниција 2.3.1. Нека је $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ Σ формула језика L^* и нека је $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ Π формула на L^* тако да важи $\mathrm{KPU} \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$. Нека је R нови n-арни релацијски симбол и дефинишимо R као (R) на почетку овог одељка. R зовемо Δ релацијски симбол у KPU.

Следећа лема показује да, на неки начин, Δ релацијске симболе можемо посматрати као атомичне формуле језика L^*, односно даје нам правило како можемо градити нове Δ релације.

Лема 2.3.2. *Нека је R Δ релацијски симбол теорије* KPU *и нека* KPU$'$ *буде* KPU *на језику $L^*(R)$ плус дефинициона аксиома (R) са почетка овог одељка.*

(i) *За сваку формулу $\theta(x_1,\ldots,x_k,R)$ на $L^*(R)$ постоји формула $\theta_0(x_1,\ldots,x_k)$ на L^* тако да важи* KPU$+(R)$ *имплицира $\theta(\vec{x},R) \longleftrightarrow \theta_0(\vec{x})$. Штавише, ако је θ Σ формула на $L^*(R)$, онда је θ_0 Σ формула на L^*.*

(ii) *За сваку Δ_0 формулу $\theta(x_1,\ldots,x_k,R)$ језика $L^*(R)$ постоје Σ и Π формуле $\theta_0(x_1,\ldots,x_k)$, $\theta_1(x_1,\ldots,x_k)$ на L^* тако да важи* KPU$+(R)$ *имплицира $\theta(\vec{x},R) \longleftrightarrow \theta_0(\vec{x})$ и $\theta(\vec{x},R) \longleftrightarrow \theta_1(\vec{x})$.*

(iii) KPU$'$ *је конзервативна екстензија теорије* KPU, *тј. за било коју реченицу θ на L^* важи* KPU$' \vdash \theta$ *акко* KPU$\vdash \theta$.

Предикат интуитивне теорије скупова је Δ предикат теорије KPU уколико се може дефинисати Δ релацијским симболом. На основу последње леме закључујемо да су Δ предикати затворени за $\wedge, \vee, \exists u \in v, \forall u \in v$ и користећи ову важну чињеницу видимо да су сви побројани предикати у табели 2.2 Δ предикати.

Дефиниција 2.3.3. Нека је $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ Σ формула језика L^* тако да важи $\mathrm{KPU} \vdash \forall x_1,\ldots,x_n$ $\exists! y\, \varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$. Нека је F нови n-арни функцијски симбол и дефинишимо F на следећи начин:

(F) $\forall x_1,\dots,x_n,y(F(x_1,\dots,x_n)=y \longleftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n,y)).$

F је Σ функцијски симбол теорије KPU.

Табела 2.2.: Неки Δ предикати

Предикат	Скраћеница	Дефиниција
x је урелемент	$\mathsf{U}(x)$	$\exists p\,(x=p)$ (или $\forall a\,(x\neq a)$)
x је скуп	$\mathsf{S}(x)$	$\exists a\,(x=a)$ (или $\forall p\,(x\neq p)$)
x је транзитиван	$\mathrm{Tran}(x)$	$\mathsf{S}(x)\wedge\forall y\in x\,\forall z\in y\,(z\in x)$
x је ординал	$\mathrm{Ord}(x)$	$\mathrm{Tran}(x)\wedge\forall y\in x\mathrm{Tran}(y)$
x је гранични ординал	$\mathrm{Lim}(x)$	$\mathrm{Ord}(x)\wedge x\neq 0\wedge\forall y\in x\,\exists z\in x\,(z=y\cup\{y\})$
x је природни број	$\mathrm{Nat\,No}(x)$	$\mathrm{Ord}(x)\wedge\forall y\in x\,\neg\mathrm{Lim}(y)\wedge\neg\mathrm{Lim}(x)$
„мањи” за ординале	$\alpha<\beta$	$\mathrm{Ord}(\alpha)\wedge\mathrm{Ord}(\beta)\wedge\alpha\in\beta$
„мањи или једнак” за ординале	$\alpha\leq\beta$	$\alpha<\beta\vee\alpha=\beta$

Лема 2.3.4. *Нека је F Σ функцијски симбол теорије* KPU. *Нека је* KPU$'$ *теорија* KPU *формулисана на језику $L^*(F)$, плус дефинициона аксиома (F).*

(i) *За сваку формулу $\theta(x_1,\dots,x_k,F)$ језика $L^*(F)$ постоји формула $\theta_0(x_1,\dots,x_k)$ на L^* тако да важи* KPU$+(F)$ *имплицира $\theta(\vec{x},F)\longleftrightarrow\theta_0(\vec{x})$. Штавише, ако је θ Σ формула на $L^*(F)$, онда је θ_0 Σ формула на L^*.*

(ii) *За сваку Δ_0 формулу $\theta(x_1,\dots,x_k,F)$ на $L^*(F)$ постоје Σ и Π формуле $\theta_0(x_1,\dots,x_k)$, $\theta_1(x_1,\dots,x_k)$ на L^* тако да* KPU$+(F)$ *имплицира $\theta(\vec{x},F)\longleftrightarrow\theta_0(\vec{x})$ и $\theta(\vec{x},F)\longleftrightarrow\theta_1(\vec{x})$.*

(iii) KPU$'$ *је конзервативна екстензија од* KPU.

Операција интуитивне теорије скупова је Σ операција теорије KPU уколико се може дефинисати Σ функцијским симболом. Није тешко доказати следећа тврђења:

– Сваки функцијски симбол језика L^* је Σ функцијски симбол.
– Σ операције су затворене за композицију пресликавања.

2.4. Дефиниција Σ рекурзијом

Дефиниција Σ рекурзијом представља користан метод увођења нових операција као што су, на пример, сабирање и множење ординала, функција „support” дата са:

$$\mathrm{sp}(p)=\{p\}$$

$$\mathrm{sp}(a)=\bigcup_{x\in a}\mathrm{sp}(x),$$ слика од a је скуп свих урелемената који улазе у конструкцију скупа a.

Теорема 2.4.1 (Егзистенција транзитивног затворења)**.** *Може се увести Σ функцијски симбол TC у* KPU *тако да је следећи исказ теорема у* KPU*: за свако x, $TC(x)$ је транзитиван скуп тако да је $x\subseteq TC(x)$ и за сваки други транзитивни скуп a, ако је $x\subseteq a$, онда је $TC(x)\subseteq a$.*

Врло користан начин доказивања у KPU је доказ индукцијом преко $\in$. За сваку формулу φ следећа формула је теорема теорије KPU: $\forall x(\forall y\in x\varphi(y)\to\varphi(x))\to\forall x\varphi(x)$.

Табела 2.3.: Неке Σ операције

Операција	Домен	Скраћеница	Σ дефиниција
домен од f	све функције f	$\mathrm{dom}(f)$	видети табелу 2.1
ранг од f	све функције f	$\mathrm{rng}(f)$	видети табелу 2.1
прва координата од x	сви уређени парови x	$1^{\mathrm{st}}x$	видети табелу 2.1
друга координата од x	сви уређени парови x	$2^{\mathrm{nd}}x$	видети табелу 2.1
рестрикција од f на a	све функције f и скупови a	$f \restriction a$	$z = \{x \in f \mid 1^{\mathrm{st}}x \in a\}$
слика од f рестрихована на a	све функције f и скупови a	$f''a$	$z = \{x \in \mathrm{rng}(f) \mid \exists y \in a\,(f(x) = y)\}$
наследник	сви скупови x	$\mathcal{S}(x)$	$z = x \cup \{x\}$
наследник ординала	сви ординали α	$\alpha + 1$	$z = \mathcal{S}(\alpha)$
супремум	скупови ординала	$\sup(a)$	$z = \bigcup a$

Да бисмо доказали да важи $\forall x \varphi(x)$, за произвољно x доказујемо $\varphi(x)$ користећи претпоставку да важи $\varphi(y)$, за свако $y \in x$.

Следећом теоремом је представљен један (јачи) модел доказивања индукцијом преко $\in$.

Теорема 2.4.2 (Доказ индукцијом преко TC). *За било коју формулу $\varphi(x)$ следећи исказ је теорема у* KPU*: уколико за свако x, $\forall y \in TC(x)\varphi(y)$ имплицира $\varphi(x)$, онда важи $\forall x \varphi(x)$.*

Доказ. Показаћемо, на основу претпоставке, да је $\forall x \forall y \in TC(x)\varphi(y)$. Ово имплицира $\forall x \varphi(x)$, будући да $x \in TC(\{x\})$. Можемо да претпоставимо, користећи индукцију преко $\in$, да за свако $z \in x$ важи (1) $\quad \forall y \in TC(z)\varphi(y)$. Докажимо да важи $\forall y \in TC(x)\varphi(y)$. На основу претпоставке, (1) имплицира $\varphi(z)$ тако да заправо имамо $\varphi(y)$, за свако $y \in x \cup \bigcup\{TC(z) \mid z \in x\} = TC(x)$. □

Следећа теорема је централна у овом одељку.

Теорема 2.4.3 (Дефиниција Σ рекурзијом). *Нека је G $n+2$-арни Σ функцијски симбол, $n \geq 0$. Тада, могуће је дефинисати нови Σ функцијски симбол F тако да је следећи исказ теорема у* KPU *(+ дефинициона аксиома за G): за све $x_1, \ldots, x_n, y$*

(*) $$F(x_1, \ldots, x_n, y) = G\Big(x_1, \ldots, x_n, y, \big\{(z, F(x_1, \ldots, x_n, z)) \mid z \in TC(y)\big\}\Big).$$

Треба напоменути да уместо услова (*) може да стоји и $F(x_1, \ldots, x_n, y) = G\big(x_1, \ldots, x_n, y, \{(z, F(x_1, \ldots, x_n, z)) \mid z \in y\}\big)$, с обзиром да можемо увек да ставимо $G'(\vec{x}, y, f) = G(\vec{x}, y, f \restriction y)$ и применимо претходну теорему на G'.

Такође је функцијски симбол F могуће дефинисати помоћу G и H тако да је,

$$F(x_1, \ldots, x_n, p) = H(x_1, \ldots, x_n, p)$$
$$F(x_1, \ldots, x_n, a) = G\Big(x_1, \ldots, x_n, a, \big\{(z, F(x_1, \ldots, x_n)) \mid z \in TC(a)\big\}\Big).$$

Ова формула је уобичајенија, и може се добити стављањем да је $G'(\vec{x}, y, f) = H(\vec{x}, y)$, ако је y урелемент, иначе $G'(\vec{x}, y, f) = G(\vec{x}, y, f)$, уколико је y скуп.

После теореме 2.4.3 функцијски симбол TC би могао да се дефинише једначинама $TC(p)=0$ и $TC(a)=a\cup\bigcup\{TC(x)\mid x\in a\}$.

Као последицу теореме Σ рекурзије имамо следећу теорему.

Теорема 2.4.4 (Дефиниција Δ предиката помоћу рекурзије)**.** *Нека су P,Q предикати са $n+1$ и $n+2$ аргумената, респективно за $n\geq 0$. Тада, може се увести Δ предикат R на следећи начин:*

(i) $R(x_1,\dots,x_n,p)\longleftrightarrow P(x_1,\dots,x_n,p)$,

(ii) $R(x_1,\dots,x_n,a)\longleftrightarrow Q\big(x_1,\dots,x_n,a,\{b\in TC(a)\mid R(x_1,\dots,x_n,b)\}\big)$.

У следећој табели дати су примери операција које су дефинисане помоћу рекурзије.

Табела 2.4.: Неке Σ операције дефинисане помоћу рекурзије

Операција	Домен	Скраћеница	Рекурзивна дефиниција
rank	било шта	$\mathrm{rk}(x)$	$\mathrm{rk}(p)=0$ $\mathrm{rk}(a)=\sup\{\mathrm{rk}(x)+1\mid x\in a\}$
support	било шта	$\mathrm{sp}(x)$	$\mathrm{sp}(p)=\{p\}$ $\mathrm{sp}(a)=\bigcup_{x\in a}\mathrm{sp}(x)$
сабирање ординала	парови ординала α,β	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta=\alpha\cup\sup\{(\alpha+\gamma)+1\mid\gamma<\beta\}$
множење ординала	парови ординала α,β	$\alpha\beta$	$\alpha\beta=\sup\{\alpha\gamma+\alpha\mid\gamma<\beta\}$
collapsing функција	парови a,x	$C_a(x)$	$C_a(p)=p$ $C_a(b)=\{C_a(x)\mid x\in a\cap b\}$

2.5. „Collapsing" лема

У овом одељку уводимо операцију C која има два аргумента, и означићемо са $C_x(y)$ симбол $C(x,y)$. Ова операција је у теорији KPU дефинисана Σ рекурзијом помоћу једначина:

$C_x(p)=p$

$C_x(a)=\{C_x(y)\mid y\in a\cap x\}$ и названа је „collapsing" функција Мостовског.

Следећа лема ближе карактерише дефинисану функцију.

Лема 2.5.1. *(i) $C_p(a)=0$ за свако p и a.*

(ii) Ако $a\subseteq b$ и a је транзитиван, онда је $C_b(x)=x$ за све $x\in a$.

(iii) За било који скуп b скуп $\{C_b(x)\mid x\in b\}=C_b(b)$ је транзитиван.

Доказ. (i) очигледно је. (ii) доказујемо $\in$-индукцијом. За дато $x\in a$ претпоставићемо да је $C_b(y)=y$ за свако $y\in x$. Како је a транзитиван, $x\subseteq a\subseteq b$, тако да ћемо имати $C_b(x)=\{C_b(y)\mid y\in x\cap b\}=\{C_b(y)\mid y\in x\}=\{y\mid y\in x\}=x$. Да бисмо доказали (iii), нека је $a=\{C_b(x)\mid x\in b\}$ и покажимо да је a транзитиван. Нека је $z\in y\in a$, тада је $y=C_b(x)$ за неко $x\in b$, па према томе $z\in\{C_b(x')\mid x'\in x\cap b\}$ и зато је $z=C_b(x')$ за неко $x'\in b$. Закључујемо да важи $z\in a$. □

Пример 2.5.2. Нека је $b = \{0, 1, 2, 4, \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}\}$. Уколико ставимо да је $a = 3 = \{0, 1, 2\}$ и применимо претходну лему, добићемо $C_b(0) = 0$, $C_b(1) = 1$ и $C_b(2) = 2$. Тада је $C_b(4) = \{C_b(x) \mid x \in b, x \in 4\} = \{C_b(x) \mid x = 0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\} = 3$. Према томе, C_b „колапсира” 4 у 3 будући да 3 није у b. Израчунајмо сада $C_b(\{1, 3, 4\})$ и $C_b(\{1, 4\})$:

$$C_b(\{1,3,4\}) = \{C_b(x) \mid x \in \{1,3,4\} \cap b\} = \{C_b(1), C_b(4)\} = \{1,3\} \quad \text{и}$$
$$C_b(\{1,4\}) = \{C_b(x) \mid x \in \{1,4\} \cap b\} = \{C_b(1), C_b(4)\} = \{1,3\}$$

Оба скупа су колапсирала у $\{1, 3\}$ због чињенице да 3 није у b. Примећује се да је скуп $\{C_b(x) \mid x \in b\} = \{0, 1, 2, 3, \{1, 3\}\}$ транзитиван, што је и очекивано с обзиром на претходну лему.

Дефиниција 2.5.3. За било који скуп b нека је c_b рестрикција функције $C_b(\cdot)$ на скуп b; тј. $c_b = \{(x, C_b(x)) \mid x \in b\}$ и нека је $\text{clpse}(b) = \text{rng}(c_b) = \{C_b(x) \mid x \in b\} = C_b(b)$.

Функција c_b постоји (као скуп) на основу Σ замене и $\text{clpse}(b)$ је транзитиван скуп на основу претходне леме.

За скуп b ћемо рећи да је екстензионалан ако за свака два различита елемента $a_1, a_2 \in b$ постоји $x \in b$ тако да је x у једном од елемената a_1 и a_2, али не у оба; тј. $\forall x \in b(x \in a_1 \longleftrightarrow x \in a_2) \rightarrow a_1 = a_2$. У претходном примеру скуп b није екстензионалан због скупова $a_1 = \{1, 3, 4\}$ и $a_2 = \{1, 4\}$.

Било који транзитиван скуп је екстензионалан, као и било који скуп ординала. Следећа лема показује да је било који екстензионалан скуп изоморфан са неким транзитивним.

Теорема 2.5.4 („collapsing” лема). *Ако је a екстензионалан, онда c_a пресликава скуп a бијективно у скуп* $\text{clpse}(a)$. *Штавише, за свако $x, y \in a$ важи $x \in y$ ако и само ако $c_a(x) \in c_a(y)$.*

2.6. Преносиви и апсолутни предикати

Овај одељак ће описати главни разлог рестрикције на Δ_0 формуле у аксиомама сепарације и колекције. Скупови из $\mathbb{V}_M$ се формирају у фазама (нивоима) и аксиома сепарације нам говори о дозвољеним принципима за формирање нових скупова у свакој фази. На пример, допуштено је да формирамо скуп $b = \{x \in a \mid \varphi(x, y)\}$ у фази α уколико већ имамо скупове a и y, али само ако је смисао формуле апсолутно детерминисан на скуповима који су формирани пре фазе α. Другим речима, ако се налазимо у β фази формирања скупова и уколико бисмо хтели да поново формирамо $\{x \in a \mid \varphi(x, y)\}$, очекујемо да добијемо исти скуп b, иако постоје и нови скупови који би могли да утичу на истинитосну вредност формуле $\varphi(x, y)$. Слично резоновање можемо да применимо и на аксиому колекције. Претпоставимо да је у процесу изградње $\mathbb{V}_M$, у некој фази формула $\forall x \in a \, \exists y \, \varphi(x, y)$ тачна. Циљ је да у следећој фази формирамо скуп b тако да је формула $\forall x \in a \, \exists y \in b \, \varphi(x, y)$ тачна, али и да остане тачна у процесу формирања нових скупова. Уколико би формула φ имала неограничене универзалне квантификаторе, увођење скупа b би чак могло да наруши тачност формуле $\varphi(x, y)$ за свако $x \in a$. Зато колекцију можемо применити само ако $\varphi(x, y)$ не може постати нетачна кад додајемо нове скупове универзуму теорије скупова. Рестрикција на Δ_0 формуле управо обезбеђује овакву сигурност.

Дефиниција 2.6.1. Нека је $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, E, \dots)$ структура за језик L^*.

За $a \in A$ дефинишимо $a_E = \{y \in M \cup A \mid y \, E \, a\}$.

Примећује се да вредност a_E зависи од структуре $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ и самог a. У уобичајеној структури a_E је управо сам скуп a, међутим релацију E треба схватити уопштеније, као произвољну бинарну релацију.

Рећи ћемо да је структура $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ екстензија од $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$, у ознаци $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ (где је $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, E, \dots)$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}; B, E', \dots)$) ако је $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ као L-структуре, ако је $A \subseteq B$ и ако је интерпретација од E, рестрикција на $M \cup A$ интерпретације од E'. Овако дефинисана екстензија не описује на природан начин екстензију када је реч о моделима теорије скупова. Разлог је следећа ситуација која може да настане. За $a \in A$ релација $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ имплицира да је $a_E \subseteq a_{E'}$, међутим могуће је да постоји неко $x \in B \setminus A$, $x \in a_{E'} \setminus a_E$. Ово је свакако конфузна ситуација. Зато уводимо погодну дефиницију екстензије.

Дефиниција 2.6.2. Нека су $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, E, \dots)$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}; B, E', \dots)$ две структуре језика L^*. Рећи ћемо да је $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ крајња екстензија од $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$, у ознаци $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, ако је $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ и за свако $a \in A$, $a_E = a_{E'}$. Може се још и рећи да је $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ иницијална подструктура од $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$.

Пример 2.6.3. Ако је A транзитиван скуп, $A \subseteq B$, $E = \in \cap A^2$, $E' = \in \cap B^2$, онда је $(\mathcal{M}; A, E) \subseteq_{\mathrm{end}} (\mathcal{M}; B, E')$; $(a_E = a_{E'} = a)$.

Лема 2.6.4. *Нека су $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ структуре за L^*, $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Ако је φ Σ формула за L^*, онда за све $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$*

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \quad \textit{имплицира} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Доказ. Ово је, на неки начин, последица леме 2.2.7. Претпоставка да се ради о крајњој екстензији је коришћена да обезбеди да $\forall x \in a$ има исти смисао у $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. □

Дефиниција 2.6.5. Формула $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ језика L^* је преносива у односу на теорију T језика L^* ако за све моделе $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ теорије T за које је $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, и за све $x_1, \dots, x_n$ из $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ важи $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n]$ имплицира $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n]$.

Формула φ је апсолутна у односу на T ако за све $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{\mathcal{N}}, x_1, \dots, x_n$, као у претходном случају, важи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n] \quad \text{ако и само ако} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \models \varphi[x_1, \dots, x_n].$$

Последица 2.6.6. Све Σ формуле су преносиве и све Δ_0 формуле су апсолутне (у односу на било коју теорију T).

Доказ. На основу леме 2.6.4 све Σ формуле су преносиве, па су зато и све Δ_0 формуле преносиве. Δ_0 формуле су затворене за негацију и φ је апсолутна акко су φ и $\neg\varphi$ преносиве. □

Пример 2.6.7. Нека су $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ модели теорије KPU, $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. Како је $\mathrm{Ord}(x)$ Δ_0 формула, имаћемо да важи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \models \mathrm{Ord}(a) \quad \text{акко} \quad \mathcal{B}_{\mathcal{N}} \models \mathrm{Ord}(a).$$

Из последице 2.6.6 следи да сепарација и колекција важе за неке апсолутне формуле. Поставља се питање да ли важе за све апсолутне формуле. Одговор је потврдан, али не експлицитно. Постоје формуле које су апсолутне у односу на KPU и које нису Δ_0. Сепарација за такве формуле није аксиома, већ теорема теорије KPU.

Теорема 2.6.8. *За било коју теорију* T *језика* L^*, *ако је* $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *преносива у односу на* T, *онда постоји* Σ *формула* $\psi(x_1,\dots,x_n)$ *таква да је* $\mathrm{T} \vdash \forall x_1,\dots,x_n[\varphi(x_1,\dots,x_n) \longleftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n)]$. *Затим, ако је* φ *апсолутна у односу на* T, *постоје* Σ *и* Π *формуле* $\psi(x_1,\dots,x_n)$ *и* $\theta(x_1,\dots,x_n)$ *тако да је*

$$\mathrm{T} \vdash \forall x_1,\dots,x_n\Big(\big(\varphi(x_1,\dots,x_n) \longleftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n)\big) \wedge \big(\varphi(x_1,\dots,x_n) \longleftrightarrow \theta(x_1,\dots,x_n)\big)\Big).$$

Дакле, сепарација у KPU се може доказати за све апсолутне формуле, док се колекција може доказати за све преносиве формуле.

2.7. Дефиниција допустивог скупа и допустивог ординала

Дефинишимо помоћу рекурзије универзум скупова $\mathbb{V}_M$ над произвољном колекцијом урелемената M.

$$\begin{aligned} V_M(0) &= 0\,; \\ V_M(\alpha+1) &= \text{ Партитивни скуп скупа } M \cup V_M(\alpha); \\ V_M(\lambda) &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_M(\alpha), \text{ ако је } \lambda \text{ гранични ординал; и} \\ \mathbb{V}_M &= \bigcup_{\alpha} V_M(\alpha), \end{aligned}$$

где је унија у последњој једначини узета преко свих ординала.

Уколико је $\mathcal{M} = (M,\dots)$, писаћемо $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$ за $\mathbb{V}_M$, а ако је M празна колекција, писаћемо $V(\alpha)$ за $V_M(\alpha)$ и $\mathbb{V}$ за $\mathbb{V}_M$.

Дефиниција 2.7.1. Нека је $L^* = L(\in,\dots)$ и нека је $\mathcal{M}$ структура језика L. Допустив скуп на $\mathcal{M}$ је модел $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ теорије KPU облика $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, \in, \dots)$, где је скуп $M \cup A$ транзитиван у $\mathbb{V}_M$, и $\in$ је рестрикција релације $\in_M$ на $M \cup A$. ($\in_M$ је релација у $\mathbb{V}_M$). Допустив скуп $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ је допустив над $\mathcal{M}$ уколико $M \in A$, тј. $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \models \mathrm{KPU}^+$. За обележавање допустивих скупова користићемо симболе $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ итд.

Другим речима, допустиви скупови су модели теорије KPU који су транзитивни делови од $\mathbb{V}_M$ са уобичајеном интерпретацијом $\in_M$ бинарне релацијске константе.

Лема 2.7.2. *Претпоставимо да је* $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, \in_M, \dots)$ *и* $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}; B, \in_N, \dots)$ *и* $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$. *Уколико је* $M \cup A$ *транзитиван у* $\mathbb{V}_M$, *онда је* $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\mathrm{end}} \mathcal{B}_{\mathcal{N}}$.

Доказ. Користећи дефиницију 2.6.1, уколико је $a \in A$, онда је $a_{\in_M} = a = a_{\in_N}$ будући да је $M \cup A$ транзитиван у $\mathbb{V}_M$. $\square$

Ова лема такође важи и за $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} = \mathbb{V}_{\mathcal{N}}$, једино што $\mathbb{V}_{\mathcal{N}}$ није права структура. Све у свему, може се закључити да Δ предикати и Σ операције у KPU имају исто значење у свим допустивим скуповима, као оно које имају у $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$.

Посматрајмо две операције TC и P (партитиван скуп) и допустив скуп $\mathbb{A} = (\mathcal{M}; A, \in, P)$ који задовољава аксиому партитивног скупа $\forall x\, \forall y\, \big(x \in P(y) \longleftrightarrow (S(x) \wedge x \subseteq y)\big)$, где $S(x)$

подразумева „x је скуп”, као у табели 2.2. Наравно, сада је $L^* = L(\in, P, \ldots)$, где је P унарни операцијски симбол. За дато $a \in A$, изрази $TC(a)$ и $P(a)$ могу имати две могуће интерпретације. За TC постоје скупови b_0 и b_1, $\mathbb{A} \models TC(a) = b_0$ и $\mathbb{V}_{\mathcal{M}} \models TC(a) = b_1$, где је $\mathbb{A} = (\mathcal{M}; A, \in)$. За P постоје скупови c_0, c_1 тако да је $\mathbb{A} \models P(a) = c_0$ и $\mathbb{V}_{\mathcal{M}} \models P(a) = c_1$. Како је $\mathbb{A} \subseteq_{\text{end}} \mathbb{V}_{\mathcal{M}}$ и TC је Σ операција, имаћемо да је $\mathbb{V}_{\mathcal{M}} \models TC(a) = b_0$ тако да је $b_0 = b_1$. Према томе, b_0 је заиста право транзитивно затворење од a тако да је $b_0 = \bigcap\{b \mid \text{Tran}(b), a \subseteq b\}$. За P ово неће важити. Како је $x \subseteq y$ Δ_0 дефинабилно, имаћемо да је $c_0 \subseteq c_1$ и ништа више од тога. Заправо, c_0 ће бити прави подскуп од правог партитивног скупа c_1 скупа a.

Дефиниција 2.7.3. Чист скуп у $\mathbb{V}_M$ је скуп a такав да је $\text{sp}(a) = 0$, тј. $TC(a) \cap M = 0$. (На пример, ординали су чисти скупови). Чист допустив скуп је допустив скуп који је модел теорије KP, биће означен са $\mathbb{A} = (A, \in, \ldots)$.

Теорема 2.7.4. *Ако је $\mathbb{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A \in, \ldots)$ допустив скуп и $A_0 = \{a \in A \mid a \text{ је чист скуп}\}$, тада је A_0 чист допустив скуп, тзв. чист део скупа $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.*

Доказ. На основу леме 2.7.2 имамо да је $\mathbb{A}_0 \subseteq_{\text{end}} \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \subseteq_{\text{end}} \mathbb{V}_{\mathcal{M}}$. Због апсолутности $\text{sp}(a)$ има исто значење у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ као и у $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$. Показаћемо да важи аксиома Δ_0 колекције, остали случајеви се могу једноставније доказати. Претпоставимо да је $a, b \in A_0$ и нека A_0 задовољава $\forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x, y, b)$, где је φ Δ_0 формула. Ако је $\varphi(x, y, b)$ тачно у A_0, такође је тачно и у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ на основу апсолутности, тако да $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ задовољава: $\forall x \in a\ \exists y\ \big(\text{sp}(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)\big)$. Применом Σ колекције у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, добијамо $c \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ тако да је

(1) $$\forall x \in a\ \exists y \in c\ \big(\text{sp}(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)\big) \quad \text{и}$$
(2) $$\forall y \in c\ \exists x \in a\ \big(\text{sp}(y) = 0 \land \varphi(x, y, b)\big).$$

Из (2) следи да је $\text{sp}(c) = 0$ будући да је $\text{sp}(c) = \bigcup\{\text{sp}(y) \mid y \in c\}$, па је тада и $c \in A_0$. Како је (1) Δ_0 формула са параметрима у A_0, тачна у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, онда је она тачна у A_0. □

Дефиниција 2.7.5. Ординал допустивог скупа у ознаци $o(\mathbb{A}_{\mathcal{M}})$, је најмањи ординал који није у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. Ординал α је допустив уколико је $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathcal{M}})$ за неко $\mathcal{M}$ и неки допустив скуп $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. Ординал α је $\mathcal{M}$-допустив уколико је $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathcal{M}})$ за неки $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ који је допустив над $\mathcal{M}$ (у смислу дефиниције 2.7.1).

Последица 2.7.6. Ординал α је допустив акко $\alpha = o(A_0)$ за неки чист допустив скуп.

Доказ. Ако је $\alpha = o(\mathbb{A}_{\mathcal{M}})$ и $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ је допустив, онда је $\alpha = o(A_0)$, где је A_0 чист део скупа $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. □

У следећем одељку ћемо видети да је ординал ω допустив. Из представљене ординалне аритметике до сада, закључује се да ако је α допустив, онда је α затворен за операције наследник ординал, сабирање, множење, степеновање и сличне функције ординалне аритметике. Према томе, најмањи допустив ординал $\alpha > \omega$ већи је од $\omega + \omega, \omega \cdot \omega$, $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \epsilon_0, \ldots$ Такође, допустив ординал је увек граничан и једнак је скупу свих ординала који су елементи одговарајућег допустивог скупа.

Дефиниција 2.7.7. Нека је $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; \mathbb{A}, \in, \ldots)$. Објекат x је у $\mathbb{A}$ уколико је $x \in M \cup A$ и означава се са $x \in \mathbb{A}$. Релација на $\mathbb{A}$ је релација на скупу $M \cup A$. Релација S дужине n на $\mathbb{A}$ је Σ_1 на $\mathbb{A}$ уколико постоји Σ_1 формула φ тако да је

(1) $$S(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{акко} \quad \mathbb{A} \models \varphi[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{за све} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A}.$$

Релација S је Π_1 на $\mathbb{A}$ ако (1) важи за неку Π_1 формулу φ и S је Δ_1 на $\mathbb{A}$ уколико је и Σ_1 и Π_1 на $\mathbb{A}$. Функција F на $\mathbb{A}$ је функција чији је домен подскуп од $(M \cup A)^n$ за неко n, а скуп вредности је подскуп од $M \cup A$. Рећи ћемо да је F Σ_1 на $\mathbb{A}$ уколико је њен график Σ_1 на $\mathbb{A}$.

Став 2.7.8. Нека је $\mathbb{A}$ допустив скуп.

(i) Ако $a \in \mathbb{A}$, онда a је Δ_1 на $\mathbb{A}$,

(ii) Ако $x \in \mathbb{A}$, онда $\{x\}$ је Δ_1 на $\mathbb{A}$,

(iii) Σ_1 релације на $\mathbb{A}$ су затворене за $\wedge, \vee, \exists x \in a, \forall x \in a, \exists x$.

2.8. Хередитарно коначни скупови

Скуп $a \in \mathbb{V}_{\mathcal{M}}$ је хередитарно коначан уколико је $TC(a)$ коначан.

Нека је $HF_M(0) = 0$; $HF_M(n+1) =$ скуп свих коначних подскупова скупа $M \cup HF_M(n)$; $\mathbb{H}F_M = \bigcup_{n<\omega} HF_M(n)$.

Теорема 2.8.1. *$\mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ је најмањи допустив скуп над $\mathcal{M}$. Прецизније, нека је $L^* = L(\in, \ldots)$ и нека $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; \mathbb{H}F_M, \in, \ldots)$ буде L^*-структура.*

(i) $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ је допустив скуп.

(ii) Ако је $\mathbb{A}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; A, \in, \ldots)$ допустив, онда је $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}} \subseteq \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.

Доказ. Индукцијом по n лако се доказује (ii) будући да A мора бити затворен за пар и унију. Докажимо да је $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ допустив скуп. Како је $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ транзитиван у $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$, аксиоме екстензионалности и регуларности су задовољене. Такође је и сваки $HF_{\mathcal{M}}(n)$ транзитиван. Уколико $x, y \in HF_{\mathcal{M}}(n)$, онда $\{x, y\} \in HF_{\mathcal{M}}(n+1)$, тако да је задовољена аксиома пара. Ако је $a \in HF_{\mathcal{M}}(n)$, онда је $\bigcup_a$ коначни подскуп од $HF_{\mathcal{M}}(n)$ тако да је елемент од $HF_{\mathcal{M}}(n+1)$, тако да је задовољена и аксиома уније. Уколико је $a \subseteq b \in HF_{\mathcal{M}}(n)$, тада је $a \in HF_{\mathcal{M}}(n)$ будући да је подскуп коначног скупа коначан, отуда је задовољена пуна сепарација, па према томе и Δ_0 сепарација. Слично важи и пуна колекција, јер ако $a \in \mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ и има, рецимо, k елемената $y_1, \ldots, y_k$, и за сваки од ових y_i постоји неки x_i тако да $\varphi(x_i, y_i)$ важи, онда се сви $x_1, \ldots, x_k$ појављују у неком $HF_{\mathcal{M}}(n)$, па је, према томе, $\{x_1, \ldots, x_k\} \in HF_{\mathcal{M}}(n+1)$. □

Последица 2.8.2. Најмањи допустив скуп је $\mathbb{H}F = \{a \in \mathbb{V} \mid a$ је чист хередитарно коначан скуп$\}$. Најмањи допустив ординал је ω.

Доказ. $\mathbb{H}F$ је чист део било ког $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}}$ и $o(\mathbb{H}F) = \omega$. □

Допустив скуп $\mathbb{H}F$ одговара класичној теорији израчунљивости, што је представљено следећом теоремом.

Теорема 2.8.3. *Нека је S релација на скупу природних бројева.*

(i) S је рекурзивно набројив акко S је Σ_1 на $\mathbb{H}F$.

(ii) S је рекурзиван акко S је Δ_1 на $\mathbb{H}F$.

Доказ. ($\Rightarrow$) Примећује се да (i) имплицира (ii) будући да је S рекурзиван акко су S и $\neg S$ рекурзивно набројиви предикати. Најпре ћемо доказати ($\Rightarrow$) дела под (ii) јер ће нам послужити за доказивање одговарајућег дела под (i). Довољно ће бити да покажемо да свака рекурзивна тотална функција на целим бројевима f, може бити проширена до Σ_1 функције $\hat{f}$ на $\mathbb{H}F$ следећом дефиницијом: $\hat{f}(x) = f(x)$, за $x \in \omega$ и $\hat{f}(x) = 0$, за $x \notin \omega$. Да бисмо ово доказали за све рекурзивне функције користићемо дефиницију класе рекурзивних функција као најмање класе која садржи основне тоталне функције и затворена је за неке операције које од тоталних функција „праве" тоталне функције.

Постоје различити приступи теорији израчунљивости, и због најлакшег доказивања изабран је Шенфилдов приступ дат у [51]. Класа (тоталних) рекурзивних функција је најмања класа која садржи $+, \cdot, K_<$ (карактеристична функција релације $<$), $F(x_1,\dots,x_n) = x_i$ (пројекције), затворена је за композицију и μ-операцију (ако је G рекурзивна функција таква да $\forall \vec{n} \exists m [G(\vec{n},m) = 0]$ и за све $\vec{n}, F(\vec{n}) = \mu m[G(\vec{n},m) = 0]$, најмање m за које је $G(\vec{n},m) = 0$, онда је F рекурзивна). Већ имамо дефинисане Σ_1 операције $+$ и $\cdot$ као и Δ_0 релацију $\alpha < \beta$ (видети табелу 2.2). Композиција тоталних Σ_1 функција је тотална Σ_1 функција, зато нам преостаје да докажемо да је класа функција f које имају одговарајућу Σ_1 функцију $\hat{f}$, затворена у односу на μ-оператор. Претпоставимо да је $\forall \vec{n} \exists m \big(G(\vec{n},m) = 0\big)$, да је G рекурзивна и да је $\hat{G}$ Σ_1 на $\mathbb{H}F$ по индукцијској претпоставци и да је $F(\vec{n}) = \mu m[G(\vec{n},m) = 0]$. Тада, $\hat{F}(\vec{x}) = y$ акко неко x_i није природан број и $y = 0$; или свако x_i и y су природни бројеви и $G(\vec{x},y) = 0$ и $\forall z < y\, \exists n [n \neq 0 \wedge G(\vec{x},z) = n]$.

Како је G Σ_1, ово је Σ па је према томе и Σ_1. Закључујемо да је свака рекурзивна функција и предикат на ω, Δ_1 на $\mathbb{H}F$. Како сваки рекурзивно набројиви предикат $S(\vec{x})$ може бити представљен у облику $\exists n\, R(\vec{x},n)$, где је R рекурзиван (стандардни резултат из теорије израчунљивости), добијамо да је сваки рекурзивно набројиви предикат Σ_1 на $\mathbb{H}F$. □

Да бисмо доказали други смер, потребна нам је следећа лема.

Лема 2.8.4. *Постоји функција $e\colon \omega \to \mathbb{H}F$ са следећим особинама:*

(i) *e је бијекција,*
(ii) *e је Σ_1 на $\mathbb{H}F$,*
(iii) *$n = e(m)$ је рекурзивна релација елемената m и n,*
(iv) *за било коју Δ_0 формулу $\varphi(x_1,\dots,x_k)$, релација $(\mathbb{H}F,\in) \models \varphi\big(e(n_1),\dots,e(n_k)\big)$ елемената $n_1,\dots,n_k$ је рекурзивна.*

Доказ. Дефинишимо пресликавање e на следећи начин:

$$
\begin{array}{ll}
e(0) = 0 & \\
e(1) = \{e(0)\} = \{0\} & (1 = 2^0) \\
e(2) = \{e(1)\} & (2 = 2^1) \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
e(5) = \{e(2), e(0)\} & (5 = 2^2 + 2^0) \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
e(2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k}) = \{e(n_1),\dots,e(n_k)\} & (n_1 > n_2 > \dots > n_k).
\end{array}
$$

Коришћена је бинарна експанзија броја n и $e(n)$ је дефинисано за свако n помоћу Σ рекурзије. Како је график функције e Σ на $\mathbb{H}F$, онда је он и Σ_1 на $\mathbb{H}F$. Индукцијом се једноставно показује да је пресликавање e бијекција. Уколико је $e(k) = n$, тада је $e(k + 2^k) = n+1$, одакле се добија (iii). Како је $e(n) \in e(m)$ акко n је експонент у бинарној експанзији $2^{k_1} + \dots + 2^{k_l}$ броја m, закључујемо да (iv) важи када је φ облика $x \in y$. Индукцијом по сложености Δ_0 формула и користећи особине рекурзивних предиката, лако се доказује да важи (iv) и у осталим случајевима. □

Доказ теореме 2.8.3. ($\Leftarrow$) Претпоставимо да је S Σ_1 на $\mathbb{H}F$ и рецимо да је $S(n)$ акко $\mathbb{H}F \models \exists y\, \varphi(n,y)$, где је φ нека Δ_0 формула. Тада је $S(n)$ акко $\exists k \exists m\, [e(k) = n \wedge \varphi(e(k), e(m))]$. Део у загради је рекурзиван на основу претходне леме, па је зато S рекурзивно набројив. (Случај када S има више од једног аргумента се доказује слично). □

На основу до сада изложеног може се доказати да важи:
- $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}} \subseteq \mathbb{V}_{\mathcal{M}}(\omega)$, $\mathbb{H}F_{\mathcal{M}} = \mathbb{V}_{\mathcal{M}}(\omega)$ акко $\mathcal{M}$ је коначан.
- Ако је $\mathbb{A}$ чист допустив скуп и $\mathbb{A} \neq \mathbb{H}F$, онда $\omega \in \mathbb{A}$.
- Ако је $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ допустив и $o(\mathbb{A}_{\mathcal{M}}) = \omega$, онда је $\mathbb{H}F$ чист део од $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
- $\mathbb{H}F$ је Δ_1 подскуп било ког допустивог скупа.
- Ако је X Σ_1 на $\mathbb{H}F$, онда је X Σ_1 на сваком допустивом скупу.

Елементи скупа $\mathbb{HF}_{\mathcal{M}}$ су били сви они скупови из $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$ чије је транзитивнио затворење коначан скуп. С тим у вези, ако је k било који бесконачан кардинални број, дефинишимо

$$H(k)_M = \{a \in \mathbb{V}_M \mid TC(a) \text{ има кардиналност мању од } k\}.$$

Закључујемо да је $H(\omega)_M = \mathbb{H}F_M$. Уколико је M празан, писаћемо $H(k)$ за $H(k)_M$. Ако је k регуларан кардинал, $H(k)_M$ се може представити једначинама:

$$\begin{aligned}
&G(0) = 0\,;\\
&G(\alpha+1) = \{a \subseteq M \cup G(\alpha) \mid \mathrm{card}(a) < k\}\,;\\
&G(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} G(\alpha), \text{ ако је } \lambda \text{ гранични ординал};\\
&H(k)_M = \bigcup_{\alpha} G(\alpha) = \bigcup_{\alpha<k} G(\alpha).
\end{aligned}$$

Теорема 2.8.5. *За сваки бесконачни кардинал k, скуп $H(k)_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}; H(k)_M, \in)$ је допустив. Допустив је над $\mathcal{M}$ акко је $k > \mathrm{card}(M)$.*

Од посебног значаја за наш даљи рад ће бити скуп $H(\omega_1)$ који ће другачије бити обележен са $\mathbb{H}C$, односно $H(\omega_1)_{\mathcal{M}}$, уколико је M непразно.

3. Пребројиви фрагменти инфинитарне логике $L_{\infty\omega}$

Метатеорија на којој ће бити засновано излагање у овом поглављу је KPU теорија скупова. Биће уведена инфинитарна логика $L_{\infty\omega}$, као и њени пребројиви фрагменти чије ће особине бити изложене (видети [4]). Једна од тих особина је и Барвајзов став компактности за пребројиве фрагменте (теорема 3.4.6), чија ће једна од примена бити и техника средњег модела, која је детаљно описана у наредном поглављу.

3.1. Формализовање синтаксе и семантике у KPU теорији

У претходном поглављу су формализовани неки од основних математичких појмова, као што су „функција”, „природан број”, „ординал” итд. Сада је наш циљ изградња логичког система радећи у KPU теорији и најпре ћемо формализовати појмове као што су „језик”, „структура”, „формула”.

Претпоставимо најпре да су међу атомичним предикатима метајезика L^*, следећи предикати:

релацијски симбол (x),	функцијски симбол (x),
симбол константе (x),	промењива (x).

Међу операцијским симболима метајезика L^* се налазе две унарне операције var и ar. Користићемо $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ за означавање објеката x који задовољавају релацијски симбол (x). Слично $h, h_1, h_2, \ldots$ за функцијске симболе и $c, c_1, d, \ldots$ за симболе константи. Такође ћемо претпоставити да су међу симболима константи метајезика L^* и симболи $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \equiv$. Претпоставићемо, затим, следеће аксиоме за синтаксу:

(1) Аксиома која тврди да су класе промењивих, функцијских симбола, релацијских симбола и симбола константи, дисјунктне и да ни један од симбола $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \equiv$ не припада ни једној од ових класа.
(2) Аксиома за промењиве, где је v_α у ствари var(α), $\alpha \neq \beta \Rightarrow v_\alpha \neq v_\beta$, промењива $(x) \Leftrightarrow \exists \alpha (x = v_\alpha)$.
(3) Аксиома за ar, која даје дужину или „арност” релацијских и функцијских симбола.

Скуп L је језик уколико је L скуп релацијских, функцијских и симбола константи. Предикати „t је терм” и „t је терм језика L” су дефинисани рекурзијом на $TC(t)$:

Дефиниција 3.1.1. t је терм (језика L) акко је t промењива или симбол константе (језика L), или је $t = (h, y)$, где је h функцијски симбол (језика L), $y = (y_1, \ldots, y_{\mathrm{ar}(h)})$ и сваки y_i је терм (језика L).

На основу теореме 2.4.4 може се закључити да су дефинисани предикати уствари Δ предикати.

Дефиниција 3.1.2. Атомична формула (језика L) је скуп који има један од следећих облика:
(i) $(\equiv, t_1, t_2)$ где су t_1, t_2 терми (језика L); у ознаци $(t_1 \equiv t_2)$ или $(t_1 = t_2)$.
(ii) $(\rho, t_1, \ldots, t_n)$ где је ρ релацијски симбол (језика L), $n = \mathrm{ar}(\rho)$ и $t_1, \ldots, t_n$ су терми (језика L); у ознаци $\rho(t_1, \ldots, t_n)$ за $(\rho, t_1, \ldots, t_n)$.

Дефиниција 3.1.3. Скуп φ је коначна формула (језика L) акко:

φ је атомична формула (језика L), или

φ је $(\neg,\psi)$ и ψ је коначна формула (језика L), или

φ је $(\wedge,\{\psi,\theta\})$ или $(\vee,\{\psi,\theta\})$ где су ψ,θ коначне формуле (језика L), или

φ је $(\exists,v,\psi)$ или $(\forall,v,\varphi)$ где је v променљива и ψ је коначна формула (језика L).

Писаћемо $\neg\psi$ за $(\neg,\psi)$, $\psi\wedge\theta$ за $(\wedge,\{\psi,\theta\})$ и $\exists v\psi$ за $(\exists,v,\psi)$. Сви наведени предикати су дефинисани рекурзивно и представљају Δ предикате.

У циљу формирања скупова облика $a=\bigcup\limits_{n<\omega} b_n$, где је b_n дефинисано рекурзијом по n, теорији KPU додаћемо аксиому бесконачности: $\exists\alpha\ \mathrm{Lim}(\alpha)$, где је $\mathrm{Lim}(\alpha)$ дефинисано као у табели 2.2 из претходног поглавља. Аксиома бесконачности обезбеђује егзистенцију бесконачних ординала и користићемо симбол ω за први гранични ординал.

Став 3.1.4. Уколико аксиома бесконачности важи, онда за било који језик L постоји скуп

$$L_{\omega\omega}=\{\varphi\mid\varphi \text{ је коначна формула језика } L \text{ са променљивим облика } v_n,\ n<\omega\}.$$

Доказ. Показаћемо да је $\mathrm{Term}=\{t\mid t$ је терм језика L у коме је свака променљива облика $v_n,\ n<\omega\}$ скуп. Дефинишимо $\mathrm{Term}(0)=\{c\in L\mid c$ је симбол константе$\}\cup\{\mathrm{var}(n)\mid n<\omega\}$, $\mathrm{Term}(n+1)=\{(h,t_1,\dots,t_k)\in L\mid h\in L,\ h$ је функцијски симбол, $k=\mathrm{ar}(h)$, $t_1,\dots,t_k\in\mathrm{Term}(n)\}\cup\mathrm{Term}(n)$, индукцијом по n. Тада је $\mathrm{Term}=\bigcup\limits_{n<\omega}\mathrm{Term}(n)$. Слично се показује да је и $L_{\omega\omega}$ скуп. □

Дефиниција 3.1.5. Скуп φ је инфинитарна формула уколико важи један од следећих исказа:

φ је коначна формула

φ је $\neg\psi$, где је ψ инфинитарна формула,

φ је $\exists v\psi$ или $\forall v\psi$, где је v променљива и ψ је инфинитарна формула,

φ је $(\wedge,\Phi)$ или φ је $(\vee,\Phi)$, где је Φ непразан скуп инфинитарних формула.

Писаћемо $\wedge\Phi$ за $(\wedge,\Phi)$, односно $\vee\Phi$ за $(\vee,\Phi)$. Појам инфинитарне формуле над језиком L се дефинише аналогно. Дефиниције слободне и везане променљиве се једноставно могу извести. (Замена слободне променљиве термом t у формули φ, мора бити дефинисана помоћу рекурзије на $TC(\varphi)$). Уобичајено, реченица је формула која нема слободних променљивих.

Скуп подформула формуле φ, у ознаци $\mathrm{sub}(\varphi)$, дефинисан је рекурзијом на $TC(\varphi)$, на следећи начин:

$$\begin{aligned}\mathrm{sub}(\varphi)&=\{\varphi\}, && \text{ако је } \varphi \text{ атомична формула,}\\ &=\{\varphi\}\cup\mathrm{sub}(\psi), && \text{ако је } \varphi \text{ облика } \neg\psi,\ \exists v\psi \text{ или } \forall v\psi,\\ &=\{\varphi\}\cup\bigcup_{\psi\in\Phi}\mathrm{sub}(\psi), && \text{ако је } \varphi \text{ облика } \wedge\Phi \text{ или } \vee\Phi.\end{aligned}$$

Права инфинитарна формула је формула која има коначно много слободних променљивих. Појам „права инфинитарна формула” је Δ појам, с обзиром да важи

$$\begin{aligned}\varphi \text{ је права} \quad &\text{акко} \quad \{v\mid v \text{ је слободна променљива у } \varphi\} \text{ је коначан,}\\ &\text{акко} \quad \{\alpha\mid v_\alpha \text{ је слободно у } \varphi\} \text{ је коначан,}\end{aligned}$$

и да се може доказати да је појам „a је коначан скуп ординала” описив Δ формулом. За означавање класе свих (правих) инфинитарних формула језика L, користићемо симбол $L_{\infty\omega}$.

Дефиниција 3.1.6. Структура $\mathcal{M}$ за језик L је пар $\mathcal{M}=(M,f)$, где ћемо за $f(x)$ писати $x^{\mathcal{M}}$, тако да важи:

(i) M је непразан скуп,
(ii) f је функција чији је домен $\mathrm{dom}(f)=L$,
(iii) $\rho\in L$ имплицира $\rho^{\mathcal{M}}$ је подскуп од $M^{\mathrm{ar}(\rho)}$,
(iv) $h\in L$ имплицира $h^{\mathcal{M}}$ је функција чији је домен $M^{\mathrm{ar}(h)}$ и ранг је подскуп од M,
(v) ако $c\in L$, онда $c^{\mathcal{M}}\in M$.

Ово је такође Δ предикат од $\mathcal{M}$ и L. Валуација у $\mathcal{M}$ је функција s чији је домен $\mathrm{dom}(s)$ коначан скуп променљивих и $\mathrm{rng}(s)\subseteq M$. За дату структуру $\mathcal{M}$ језика L, терм t језика L и валуацију s у $\mathcal{M}$, где су променљиве из терма t садржане у $\mathrm{dom}(s)$, дефинишимо рекурзијом $t^{\mathcal{M}}(s)$ вредност терма t у $\mathcal{M}$ за валуацију s:

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(s) &= c^{\mathcal{M}}, && \text{уколико је } t \text{ симбол константе } c,\\ &= s(v), && \text{уколико је } t \text{ променљива } v,\\ &= h^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(s),\dots,t_k^{\mathcal{M}}(s)), && \text{уколико је } t \text{ облика } h(t_1,\dots,t_k). \end{aligned}$$

Остаје да се формализује појам релације задовољења $\mathcal{M}\models\varphi[s]$, где је $\mathcal{M}$ структура језика L, φ формула језика L и s је валуација за слободне променљиве у φ. Будући да не постоји скуп свих променљивих, не постоји ни скуп свих валуација. Зато узимамо Σ операцију G тако да за било које L, $\mathcal{M}$ и $\varphi\in L_{\infty\omega}$, $G(\mathcal{M},\varphi)=\{s\mid s$ је валуација у $\mathcal{M}$ са $\mathrm{dom}(s)=$ слободне променљиве формуле $\varphi\}$. Дефинишимо тада:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi) &= \{s\in G(\mathcal{M},\varphi)\mid \mathcal{M}\models\varphi[s]\} \quad \text{рекурзијом на } TC(\varphi),\\ \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\rho(t_1,\dots,t_n)) &= \{s\in G(\mathcal{M},\rho(t_1,\dots,t_n))\mid (t_1^{\mathcal{M}}(s),\dots,t_n^{\mathcal{M}}(s))\in\rho^{\mathcal{M}}\},\\ \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\neg\varphi) &= \{s\in G(\mathcal{M},\neg\varphi)\mid s\notin \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi)\},\\ \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\wedge\Phi) &= \{s\in G(\mathcal{M},\wedge\Phi)\mid \text{ за свако } \varphi\in\Phi,\ s\restriction_{\mathrm{Free-Var}(\varphi)}\in \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi)\},\\ \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\exists v\varphi) &= \{s\in G(\mathcal{M},\exists v\varphi)\mid \text{ за неко } x\in M,\ s\cup\{(v,x)\}\in \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi)\},\\ &\qquad \text{ако је } v \text{ слободно у } \varphi,\\ &= \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi),\ \text{ако } v \text{ није слободно у } \varphi. \end{aligned}$$

За L-структуре $\mathcal{M}$, формуле φ језика L и валуације s предикат $\mathcal{M}\models\varphi[s]$ је дат са:

$$\mathcal{M}\models\varphi[s] \quad \text{акко} \quad s\restriction_{\mathrm{Free-Var}(\varphi)}\in \mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi).$$

За реченице φ имамо да је $\mathcal{M}\models\varphi$ уколико је празна функција 0 у $\mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi)$. Како је $\mathrm{Sat}_L(\mathcal{M},\varphi)$ једна Σ операција, на основу теореме Σ рекурзије, закључује се да је $\mathcal{M}\models\varphi[s]$ један Δ предикат од $\mathcal{M},\varphi,s$ и језика L. Уколико су слободне променљиве формуле φ међу променљивим $v_1,\dots,v_n$, писаћемо

$$\mathcal{M}\models\varphi[a_1,\dots,a_n] \quad \text{за} \quad \mathcal{M}\models\varphi[s] \quad \text{где је} \quad s=\{(v_1,a_1),\dots,(v_n,a_n)\}.$$

3.2. Својство конзистентности

Сама техника конструкције модела је врло слична Кислеровој конструкцији у [26]. С обзиром да ћемо све резултате доказивати у теорији KPU + Аксиома бесконачности, постоје места у раду која ће се разликовати, тј. треба избећи коришћење аксиоме партитивног скупа и аксиоме избора.

Колекција инфинитарних формула језика L никада није скуп и, како је уобичајено радити са скупом формула, имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.2.1. Нека је L језик. Фрагмент од $L_{\infty\omega}$ је скуп L_A инфинитарних формула и променљивих, тако да је:

(i) свака коначна формула из $L_{\omega\omega}$ је у L_A,

(ii) ако $\varphi \in L_A$, онда свака подформула и променљива из φ је у L_A,

(iii) ако је $\varphi(v) \in L_A$ и t је терм језика L са променљивим из L_A, онда је и $\varphi(t/v)$ такође у L_A, и

(iv) ако су φ, ψ, v у L_A, онда су и $\neg\varphi, \sim\varphi, \exists v\varphi, \forall v\varphi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi$.

(Симбол $\sim$ је дефинисан као у [26], овде је уместо $\varphi\neg$ коришћено $\sim\varphi$; такође, $\sim$ има експлицитну Σ дефиницију).

Нека је K језик и $C = \{c_n \mid n < \omega\}$ пребројиви скуп симбола константи које се не налазе у K. Нека је $L = K \cup C$ фиксирани језик до краја овог одељка. Ако је K_A фрагмент од $K_{\infty\omega}$, онда постоји природни фрагмент $L_A = K_A(C)$ од $L_{\infty\omega}$, као скуп свих формула облика $\varphi(c_{i1}, \ldots, c_{in})$ које су настале заменом коначног броја слободних променљивих константама из C. Терм t из L_A је основни уколико је из скупа C или је облика $h(c_{i1}, \ldots, c_{in})$ за $h \in K$, и c_i-ове из C.

Дефиниција 3.2.2. Својство конзистентности за L_A је скуп S скупова s тако да је сваки $s \in S$ скуп реченица из L_A и следеће важи за свако $s \in S$:

(C_0) $0 \in S$; ако $s \subseteq s' \subseteq S$, онда $s \cup \{\varphi\} \in S$ за свако $\varphi \in s'$;

(C_1) (Правило конзистентности) Ако $\varphi \in s$, онда $\neg\varphi \notin s$;

(C_2) ($\neg$-правило) Ако $\neg\varphi \in s$, онда $s \cup \{\sim\varphi\} \in S$;

(C_3) ($\wedge$-правило) Ако $\wedge\Phi \in s$, онда за све $\varphi \in \Phi$, $s \cup \{\varphi\} \in S$;

(C_4) ($\forall$-правило) Ако $\forall v\varphi(v) \in s$, онда за свако $c \in C$, $s \cup \{\varphi(c/v)\} \in S$;

(C_5) ($\vee$-правило) Ако $\vee\Phi \in s$, онда за неко $\varphi \in \Phi$, $s \cup \{\varphi\} \in S$;

(C_6) ($\exists$-правило) Ако $\exists v\varphi(v) \in s$, онда за неко $c \in C$, $s \cup \{\varphi(c/v)\} \in S$;

(C_7) (Правило једнакости) Нека је t основни терм из L_A и $c, d \in C$:

  (i) Ако $(c \equiv d) \in s$, онда $s \cup \{(d \equiv c)\} \in S$;

  (ii) Ако $\varphi(t), (c \equiv t) \in s$, онда $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$;

  (iii) За неко $e \in C$, $s \cup \{e \equiv t\} \in S$.

Лема 3.2.3. *Уколико S задовољава све услове из претходне дефиниције, изузев услова (C_0), онда постоји најмање својство конзистентности S', тако да је $S \subseteq S'$.*

Доказ. Дефинишимо $f(0) = S \cup \{0\}$, $f(n+1) = f(n) \cup \{s \cup \{\varphi\} \mid s \in f(n) \wedge \exists s' \in f(n)[s \subseteq s' \wedge \varphi \in s']\}$, $S' = \bigcup_{n<\omega} f(n)$. S' је својство конзистентности и ако је $S \subseteq S''$ и S'' својство конзистентности, онда је $f(n) \subseteq S''$ индукцијом по n. □

Лема 3.2.4. *Нека је S својство конзистентности, $s \in S$.*

(i) $\varphi, (\varphi \to \psi) \in s$ имплицира $s \cup \{\psi\} \in S$.

(ii) $c \in C$ имплицира $s \cup \{(c \equiv c)\} \in S$.

(iii) $c, d, e \in C, (c \equiv d) \in s, (d \equiv e) \in s$ *имӣлицира* $s \cup \{(c \equiv e)\} \in S$.

Структура $\mathcal{M}$ језика L је канонска структура уколико је сваки елемент из $\mathcal{M}$ облика $c^{\mathcal{M}}$ за неко $c \in C$.

Теорема 3.2.5 (Егзистенција модела)**.** *Нека је L_A ӣребројиви фраīменӣ и нека је S својсӣво конзисӣенӣносӣи за L_A. За свако $s \in S$ ӣосӣоји канонска сӣрукӣура $\mathcal{M}$ језика L ӣакоga је $\mathcal{M}$ moдел за s, ӣј за свако $\varphi \in s$, $\mathcal{M} \models \varphi$.*

Доказ. Како је L_A пребројив, можемо набројити све реченице из L_A: $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots (n < \omega)$, као и терме који се појављују у L_A: $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots (n < \omega)$. Конструисаћемо низ $s_0 \subseteq s_1 \subseteq \cdots \subseteq s_n \subseteq \cdots$ елемената скупа S на следећи начин. Нека је s_0 неко фиксирано s за које конструишемо модел. За дато s_n дефинисаћемо s_{n+1} додавањем једне, две или три реченице из L_A.

Корак 1. Налазимо први симбол константе $c \in C$, у листи термова, тако да је $s_n \cup \{c \equiv t_n\} \in S$, и нека је $s'_n = s_n \cup \{c \equiv t_n\}$.

Корак 2. Уколико $s'_n \cup \{\varphi_n\} \notin S$, нека је $s_{n+1} = s'_n$, а уколико је $s'_n \cup \{\varphi_n\} \in S$, онда нека је $s''_n = s'_n \cup \{\varphi_n\}$.

Сада постоје три различита случаја које ћемо навести.

Корак 3. Уколико φ_n не почиње симболом $\exists$ или $\vee$, нека је $s_{n+1} = s''_n$.

Корак 4. Ако је φ_n облика $\exists v \psi$, онда налазимо прво $c \in C$ у другој листи тако да, на основу (C_6), $s''_n \cup \{\psi(c/v)\} \in S$ и нека је s_{n+1} управо овај елемент скупа S.

Корак 5. Уколико је φ_n облика $\vee\Phi$, користећи (C_5) налазимо прву $\psi \in \Phi$ из прве листе тако да је $s''_n \cup \{\psi\} \in S$ и нека је $s_{n+1} = s''_n \cup \{\psi\}$.

Нека је $s_\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} s_n$. Остатак доказа је исти као у [26]. Дефинишемо релацију еквиваленције на C: $c \approx d$ акко $(c \equiv d) \in s_\omega$, и нека је $M = \{c/_\approx \mid c \in C\}$. На основу ($C_7$), ако $\varphi(c_1, \dots, c_n) \in s_\omega$ и $c_i \approx d_i$, онда је и $\varphi(d_1, \dots, d_n) \in s_\omega$. С тим у вези, релацијске и функцијске симболе интерпретирамо на следећи начин:

$$(c_1/_\approx, \dots, c_n/_\approx) \in \rho^{\mathcal{M}} \quad \text{акко} \quad \rho(c_1, \dots, c_n) \in s_\omega,$$
$$h^{\mathcal{M}}(c_1/_\approx, \dots, c_n/_\approx) \text{ је } d/_\approx \text{ уколико је } (h(c_1, \dots, c_n) \equiv d) \in s_\omega.$$

Индукцијом по сложеност формула из L_A, једноставно се показује да је $\mathcal{M} \models \varphi$ за свако $\varphi \in s_\omega$. $\square$

Теорема 3.2.6. *Нека су L_A и S као у ӣреӣходној ӣеореми. Ако је T скуӣ реченица из L_A ӣако ga $s \in S$, $\varphi \in T$ имӣлицира $s \cup \{\varphi\} \in S$, онда за било које $s \in S$, $T \cup s$ има канонски модел.*

Доказ. Нека је $S' = \{T \cup s \mid s \in S\}$. Скуп S' ће задовољити услове (C_1)–(C_7) тако да применом леме 3.2.3 добијамо својство конзистентности $S'' \supseteq S'$. Применом теореме о егзистенцији модела на $(T \cup s) \in S''$ добијамо тражени канонски модел. $\square$

3.3. Теорема слабе комплетности за пребројиве фрагменте

Нека је L_A фрагмент од $L_{\infty\omega}$. Реченица φ фрагмента L_A је ваљана, у ознаци $\models \varphi$, ако је $\mathcal{M} \models \varphi$ за сваку структуру $\mathcal{M}$ језика L. Циљ нам је да докажемо уобичајену теорему комплетности тако што ћемо да докажемо

$$\models \varphi \quad \text{акко} \quad \exists P\, [P \text{ је доказ } \varphi].$$

за одређени појам „доказа”, који за сада није експлицитно дефинисан. У овом одељку ће бити направљен први корак до овог резултата.

Дефиниција 3.3.1. Нека је L_A фрагмент од L. Скуп Γ формула из L_A је својство ваљаности за L_A уколико Γ садржи:
(A_1) све изводе из таутологија исказне логике,
(A_2) $(\neg\varphi)\longleftrightarrow(\sim\varphi)$,
(A_3) $\wedge\Phi\to\varphi$, ако $\varphi\in\Phi$,
(A_4) $v_\alpha = v_\alpha$,
(A_5) $v_\alpha = v_\beta \to v_\beta = v_\alpha$,
(A_6) $\forall v\varphi(v)\to\varphi(t/v)$, t је било који терм слободан за v у $\varphi(v)$,
(A_7) $\varphi(v)\wedge v = t \to \varphi(t/v)$, t је било који терм слободан за v у $\varphi(v)$,
затворен је за следећа правила извођења:
(R_1) (*Modus Ponens*) ако су φ и $(\varphi\to\psi)$ у Γ, онда је и ψ;
(R_2) (Генерализација) ако $(\varphi\to\psi(v))$ је у Γ и v није слободно у φ, онда је и $(\varphi\to\forall v\psi(v))$ у Γ;
(R_3) (Конјункција) ако је $\wedge\Phi\in L_A$ и $(\psi\to\varphi)$ је у Γ за свако $\varphi\in\Phi$, онда је $(\psi\to\wedge\Phi)$ у Γ,
и не садржи $\varphi\wedge\neg\varphi$ за било коју формулу φ из L_A.

Пример 3.3.2. (i) Нека је $\mathcal{M}$ структура за L и нека је $\Gamma_{\mathcal{M}}$ скуп свих формула $\varphi(v_1,\ldots,v_n)\in L_A$, тако да је $\mathcal{M}\models\forall v_1,\ldots,v_n\varphi(v_1,\ldots,v_n)$. $\Gamma_{\mathcal{M}}$ је скуп на основу Δ_1 операције, и није тешко видети да је $\Gamma_{\mathcal{M}}$ својство ваљаности.
(ii) Ако је $\mathcal{X}$ скуп својстава ваљаности, онда је $\cap\mathcal{X}=\cap\{\Gamma\mid\Gamma\in\mathcal{X}\}$ својство ваљаности.

Фиксирајмо до краја овог одељка фрагмент L_A, скуп нових симбола константи $C=\{c_n\mid n<\omega\}$ и нека је $K=L\cup C$ и $K_A=L_A(C)$ природни фрагмент од $K_{\infty\omega}$ придружен фрагменту L_A: $\varphi\in K_A$ акко постоји $\psi\in L_A$ тако да је φ настала из ψ заменом неких слободних променљивих симболима константи, тј. $\varphi=\psi(c_{i_1}/v_{i_1},\ldots,c_{i_k}/v_{i_k})$. За φ ћемо рећи да је извод слободном заменом из ψ.

Став 3.3.3. Нека је Γ_0 својство ваљаности за L_A и нека је Γ скуп свих извода слободном заменом из формула скупа Γ_0. Уколико је $S=\{s\mid s$ је коначан скуп K_A-реченица, $(\neg\wedge s)\notin\Gamma\}$, онда је:
(i) S је својство конзистентности за K_A,
(ii) ако је $\varphi\in\Gamma$, $s\in S$, онда $s\cup\{\varphi\}\in S$.

Дефиниција 3.3.4. Реченица φ из L_A је теорема од L_A уколико је φ у сваком својству ваљаности Γ фрагмента L_A.

Предикат „φ је теорема фрагмента L_A” је Π_1 у KPU и зато не можемо да тврдимо да постоји скуп свих теорема од L_A.

Теорема 3.3.5 (Слаба комплетност)**.** *Нека је L_A пребројив фрагмент. Реченица φ из L_A је ваљана акко је теорема из L_A.*

Доказ. Претпоставимо да је φ теорема фрагмента L_A. Нека је $\mathcal{M}$ било који модел и нека је $\Gamma_{\mathcal{M}}$ својство ваљаности као у примеру 3.3.2 (i). Тада је $\varphi\in\Gamma_{\mathcal{M}}$, па је зато $\mathcal{M}\models\varphi$. Уколико φ није теорема, онда постоји својство ваљаности Γ_0, тако да је $\varphi\notin\Gamma_0$. Нека Γ, $\Gamma_0\subseteq\Gamma$ и S буду као у ставу 3.3.3. Тада $\{\neg\varphi\}\in S$ на основу дела (ii) истог става и S је својство конзистентности, тако да $\neg\varphi$ има модел, на основу теореме о егзистенцији модела. □

Реч „слаба” у називу претходне теореме је коришћена зато што још увек немамо појам „доказ”, тако да важи

$$\models \varphi \quad \text{акко} \quad \exists P\,[P \text{ је доказ } \varphi].$$

3.4. Комплетност и компактност за пребројиве допустиве фрагменте

Појам доказа неће бити дефинисан на уобичајен начин, тачније неопходна нам је дефиниција која заобилази аксиому избора.

Дефиниција 3.4.1. Уређен пар P је инфинитарни доказ акко важи један од следећих услова:

(A_1)–(A_7) $P=(n,\varphi)$, $1\le n\le 7$ и φ је аксиома A_n од $L_{\infty\omega}$ из дефиниције 3.3.1.

(R_1) $P=(f,\psi)$ где је f функција, $\mathrm{dom}(f)=\{0,1\}$, $f(0)$ је инфинитарни доказ P_0, где је друга координата од P_0 облика $(\varphi\to\psi)$, и $f(1)$ је инфинитарни доказ P_1 чија је друга координата φ.

(R_2) $P=\big(P_0,(\varphi\to\forall v_\alpha\psi(v_\alpha))\big)$ где је P_0 инфинитарни доказ чија је друга координата облика $(\varphi\to\psi(v_\alpha))$, где v_α није слободна у φ.

(R_3) $P=(f,(\psi\to\wedge\Phi))$ где је f функција са доменом Φ тако да за свако $\varphi\in\Phi$, $f(\varphi)$ је непразан скуп инфинитарних доказа, и за сваки $P_0\in f(\varphi)$, друга координата од P_0 је $(\psi\to\varphi)$.

Дакле, уколико је P инфинитарни доказ и φ је друга координата у P, онда је P доказ за φ.

Претходна дефиниција може бити дата помоћу рекурзије на $TC(P)$ и зато појам доказа за формулу φ имамо као Δ_1 предикат, тј. $\exists P[P$ је инфинитарни доказ за $\varphi]$ је Σ_1 предикат од φ.

Посматраћемо сада универзум $\mathbb{V}_M$ свих скупова над M, који је заправо модел теорије KPU, и допустив скуп $\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ који садржи константе $\wedge,\vee,\neg,\exists,\forall,\equiv$ и предикате и функције $(\vee,\mathrm{ar})$, из првог одељка овог поглавља, и који задовољава аксиоме за синтаксу. У наредном тексту ћемо интерпретирати резултате из првог одељка, као и претходну дефиницију ифинитарног доказа у моделима $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ и $\mathbb{V}_M$. Како смо радили са Δ_1 појмовима резултати у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ и $\mathbb{V}_M$ ће бити исти због апсолутности (видети одељак 2.6). На пример, уколико је за $\varphi\in\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ „φ је инфинитарна формула” тачно у $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, тада и само тада је тачно и у $\mathbb{V}_{\mathcal{M}}$.

Дефиниција 3.4.2. (i) Ако је $\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\mathcal{M}}=(\mathcal{M},A,\in,\ldots)$ допустив и L је језик који је Δ_1 на $\mathbb{A}$, онда је

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{A}} &= \{\varphi\in\mathbb{A}\mid \varphi \text{ је инфинитарна од } L_{\infty\omega}\}\\ &= \{\varphi\in\mathbb{A}\mid \mathbb{A}\models\varphi \text{ је инфинитарна формула од } L_{\infty\omega}\}\end{aligned}$$

допустив фрагмент од $L_{\infty\omega}$ дат помоћу $\mathbb{A}$.

(ii) Уколико $P\in\mathbb{A}$ и P је инфинитарни доказ, онда је P $L_{\mathbb{A}}$-доказ.

Није тешко уочити да је допустив фрагмент $L_{\mathbb{A}}$ заиста фрагмент у смислу дефиниције 3.2.1

Теорема 3.4.3. *Нека је $L_{\mathbb{A}}$ допустив фрагмент од $L_{\infty\omega}$ и нека је φ реченица из $L_{\mathbb{A}}$. Следећи услови су еквивалентни:*

(i) $\exists P[P$ *је* $L_{\mathbb{A}}$*-доказ за* $\varphi]$*;*
(ii) $\exists P[P$ *је инфинитарни доказ за* $\varphi]$*;*
(iii) φ *је теорема од* $L_{\mathbb{A}}$*, тј.* φ *је у сваком својству ваљаности за* $L_{\mathbb{A}}$*.*

Доказ. $(i) \Rightarrow (ii)$ је очигледно.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Нека је Γ својство ваљаности за $L_{\mathbb{A}}$. Једноставно се доказује индукцијом на $TC(P)$ да ако је „P је доказ за φ", онда је $\varphi \in \Gamma$ будући да Γ садржи (A_1)–(A_7) и затворен је за (R_1)–(R_3).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Довољно је да покажемо да је скуп $\Gamma = \{\psi \in L_{\mathbb{A}} \mid \exists P \in \mathbb{A}\ (P$ је доказ за $\psi)\}$ својство ваљаности за $L_{\mathbb{A}}$, односно да Γ садржи (A_1)–(A_7) и затворен је за (R_1)–(R_3). Први део је очигледан, зато докажимо затвореност у односу на (R_1) и (R_3), (R_2) ће бити слично као за (R_1).

(R_1) Претпоставимо да $\varphi, (\varphi \to \psi) \in \Gamma$. Тада, постоје $P_0, P_1 \in \mathbb{A}$ тако да $2^{\mathrm{nd}} P_0 = (\varphi \to \psi)$, $2^{\mathrm{nd}} P_1 = \varphi$ (2^{nd} означава другу координату). Нека је $f(0) = P_0$, $f(1) = P_1$, онда је $P = (f, \psi) \in \mathbb{A}$ и P је доказ за ψ, па је према томе $\psi \in \Gamma$.

(R_3) Нека је $(\psi \to \wedge\Phi) \in L_{\mathbb{A}}$ и $(\psi \to \varphi) \in \Gamma$ за све $\varphi \in \Phi$. Према томе, за свако $\varphi \in \Phi$ постоји $P \in \mathbb{A}$ тако да важи „P је доказ за $(\psi \to \varphi)$". Применом јаке Σ замене у $\mathbb{A}$ добијамо функцију $f \in \mathbb{A}$, $\mathrm{dom}(f) = \Phi$, тако да је за свако $\varphi \in \Phi$: $f(\varphi) \neq 0$ и ако $P \in f(\varphi)$, онда је P доказ за $(\psi \to \varphi)$. Тада $(f, (\psi \to \wedge\Phi)) \in \mathbb{A}$ и то је доказ за $(\psi \to \wedge\Phi)$, па је $(\psi \to \wedge\Phi)$ у скупу Γ. □

Последица 3.4.4. Нека је $L_{\mathbb{A}}$ допустив фрагмент. Тада је скуп теорема фрагмента $L_{\mathbb{A}}$ један Σ_1 подскуп од $\mathbb{A}$.

Доказ. Тражена Σ_1 формула је $\exists P\,[P$ је доказ за $\varphi]$. □

Последњу формулу ћемо означавати са $\vdash \varphi$.

Теорема 3.4.5 (Барвајзова комплетност)**.** *Нека је* $L_{\mathbb{A}}$ *пребројив допустив фрагмент. Тада за свако* $\varphi \in L_{\mathbb{A}}$ *имамо еквиваленцију следећих услова:* $(i) \models \varphi$, $(ii) \vdash \varphi$, $(iii)\ \mathbb{A}$ *задовољава* $\vdash \varphi$*. Стога је скуп ваљаних реченица од* $L_{\mathbb{A}}$*,* Σ_1 *на* $\mathbb{A}$*.*

Ова теорема је последица слабе комплетности за пребројиве допустиве фрагменте и теореме 3.4.3.

Теорема 3.4.6 (Барвајзова компактност)**.** *Нека је* $L_{\mathbb{A}}$ *пребројив допустив фрагмент од* $L_{\infty\omega}$*. Нека је* T *скуп реченица из* $L_{\mathbb{A}}$*, који је* Σ_1 *на* $\mathbb{A}$*. Ако сваки* $T_0 \subseteq T$ *који је елемент скупа* $\mathbb{A}$ *има модел, онда* T *има модел.*

Доказ. Проширићемо језик L до $K = L \cup \{c_n \mid n < \omega\}$ као и обично, водећи рачуна да K буде Δ_1 на $\mathbb{A}$. Нека је $K_{\mathbb{A}} = L_{\mathbb{A}}(C)$ уобичајен фрагмент од $L_{\mathbb{A}}$ придружен језику K. Према томе, $K_{\mathbb{A}}$ је скуп свих реченица из $K_{\infty\omega}$ које су елементи од $\mathbb{A}$ и имају само коначно много симбола константи c скупа C. Користићемо теорему егзистенције модела, проширену верзију 3.2.6.

Нека је S скуп свих коначних скупова s реченица из $K_{\mathbb{A}}$, тако да за свако $T_0 \subseteq T$ и $T_0 \in \mathbb{A}$ важи да $T_0 \cup s$ има модел. Уколико $s \in S$ и $\varphi \in T$, тада и $s \cup \{\varphi\} \in S$, тако да чињеница да је S својство конзистентности имплицира егзистенцију модела теорије Т, применом теореме 3.2.6. Доказаћемо да је задовољен услов (C_5) из дефиниције својства конзистентности, остали услови се доказују једноставније. Претпоставимо да је $\vee\Phi \in s \in S$, али да за свако $\varphi \in \Phi$, $s \cup \{\varphi\} \notin S$. Према томе, за свако $\varphi \in \Phi$ постоји $T_0 \subseteq T$, $T_0 \in \mathbb{A}$ тако да $T_0 \cup s \cup \{\varphi\}$ нема модел. Нека је $\theta(x)$ формула која дефинише T на $\mathbb{A}$ и она је Σ_1. Следећа Σ реченица је тачна у $\mathbb{A}$ на основу теореме комплетости за $K_{\mathbb{A}}$:

$$\forall\varphi\in\Phi\exists T_0\Big[\forall\psi\in T_0\theta(\psi)\wedge\vdash\Big(\bigwedge(T_0\cup S)\to\neg\varphi\Big)\Big]. \tag{1}$$

На основу принципа Σ рефлексије постоји скуп $a\in\mathbb{A}$ тако да (1) важи релативизирано на a. На основу леме 2.2.7 можемо да претпоставимо да је a транзитиван скуп. Нека је $T_1=\{\psi\in a\mid\theta^{(a)}(\psi)\}$ на основу Δ_0 сепарације. Тада је $T_1\in\mathbb{A}$ и $T_1\subseteq T$ и за свако $\varphi\in\Phi$, $\models(\wedge(T_1\cup s)\to\neg\varphi)$ будући да постоји неко $T_0\subseteq T_1$ тако да важи $\models\wedge(T_0\cup s)\to\neg\varphi$. Међутим, тада $s\cup T_1$ не може имати модел зато што $\vee\Phi\in s$. Ово је у супротности са претпоставком да $s\in S$. □

Комбиновањем комплетности и компактности добијамо проширену верзију теореме комплетности.

Теорема 3.4.7. *Нека је $L_{\mathbb{A}}$ ūребројив доūусūив фраīменū. Ако је T скуū реченица фраīменūа $L_{\mathbb{A}}$ који је Σ_1 на $\mathbb{A}$, онда је скуū $\{\varphi\in L_{\mathbb{A}}\mid T\models\varphi\}$ ūакође Σ_1 на $\mathbb{A}$.*

Доказ. Ако је φ реченица фрагмента $L_{\mathbb{A}}$, онда је

$$T\models\varphi\quad\text{акко}\quad\exists T_0\in\mathbb{A}[T_0\subseteq T\wedge T_0\models\varphi]$$

на основу Барвајзове компактности примењене на $T\cup\{\neg\varphi\}$, тако да $T\models\varphi$ акко је следећа формула тачна у $\mathbb{A}$, где $\theta(x)$ дефинише T, $\exists T_0[\forall\psi\in T_0\theta(\psi)\wedge\vdash\bigwedge T_0\to\varphi]$ што даје Σ дефиницију за $T\models\varphi$. □

4. Средњи модел

У овом поглављу ће бити описана врло корисна техника, коју уводи М. Рашковић у [46], настала решавањем Кислеровог проблема постављеног у вези са вероватносним логикама са две мере (видети [27]).

После Рашковићевог рада [46] овај метод је често примењиван у проналажењу многих нових резултата. Неки од њих ће бити изложени у наредним поглављима. Сама техника је једна врста примене Барвајзове компактности и коришћена је у доказивању комплетности логика везаних за теорију вероватноће, као и у тополошким логикама (видети [24] и поглавље 7).

У циљу поједностављења, односно уопштавања саме технике увешћемо најпре дефиницију монотоних структура, а затим изабрати и погодан логички систем у ком ћемо радити.

Дефиниција 4.1. Структура $(\mathfrak{A}, q)$ $(q \subseteq \mathbb{P}(A))$ је монотона уколико за свако X и Y, за које је $X \supseteq Y \in q$, важи $X \in q$; $\mathfrak{A}$ је структура првог реда.

Треба истаћи да су монотоне структуре веома тесно повезане са многим генерализаним квантификаторима.

Изабраћемо логику $L_{\mathbb{A}}$ са додатним монотоним квантификатором Q, као најпогоднију за рад са монотоним структурама. Логике са уопштеним квантификатором Q су описане у уводном делу рада, а у поглављу 7 је детаљно изложена једна верзија ових логика, тј. логика са квантификатором „постоји непребројиво много”. (Такође, видети [29]). Аксиоме логике $L_{\mathbb{A}}(Q)$ су све аксиоме логике $L_{\mathbb{A}}$ заједно са следећим формулама:

(i) $\quad \forall x\,(\varphi \to \psi) \to (Qx\varphi \to Qx\psi)$

(ii) $\quad Qx\varphi(x) \longleftrightarrow Qy\varphi(y)$, где се y не појављује у φ.

Коришћењем својства конзистентности и Хенкинову конструкцију може се доказати теорема слабе комплетности (видети [29]). Иста техника, уз мале модификације, може се применити за доказивање слабе комплетности за логику са два монотона квантификатора, тј. за логику $L_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ која је врло слична логици $L_{\mathbb{A}}(Q)$; допуштена су два квантификатора Q_1 и Q_2 који играју улогу квантификатора Q.

Дефиниција 4.2. Слаб модел за $L_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ је структура $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$ таква да су q_1 и q_2 монотоне колекције.

Суштински, метода коју описујемо у овом поглављу је метода конструкције „јачих” модела из слабог модела. На пример, можемо да захтевамо да у јачем моделу постоји одређена веза између колекиција q_1 и q_2. С тим у вези је и следећа дефиниција.

Дефиниција 4.3. Нека су q_1 и q_2 две монотоне колекције подскупова од A.
(1) Колекција q_1 је финија од q_2 уколико је $q_2 \subseteq q_1$.
(2) Колекција q_1 је уписана у q_2 уколико за свако $X \in q_1$ постоји $Y \in q_2$ тако да је $X \subseteq Y$.

Дефиниција 4.4. (1) f-модел[1] за $L_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ је слаб модел $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$, тако да је q_2 финија од q_1.
(2) u-модел за $L_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ је слаб модел $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$, тако да је q_1 уписана у q_2.

Нека је $K = L \cup C$ језик уведен у Хенкиновој конструкцији и $C \in \mathbb{A}$ је скуп нових симбола константи. Поставља се питање које реченице морају бити задовољене у слабом моделу $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$ да би он могао бити трансформисан у модел са очекиваном везом између колекција q_1 и q_2. Како се може приметити, радићемо са скуповима који су дефинабилни $K_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$-формулама и они су подскупови скупа $\bigcup\limits_{n<\omega} \mathbb{P}(A^n)$, тј. са скуповима облика $A_\varphi = \{\vec{a} \in A^n \mid (\mathfrak{A}, q_1, q_2) \models \varphi(\vec{a})\}$, где је $\varphi(\vec{x})$ $K_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$-формула. Такође, сваки квантификатор Q_i, $i = 1, 2$, може бити схваћен као унарна релација у скупу P, где је $P \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} \mathbb{P}(A^n)$.

У циљу одређивања погодног аксиоматског система радићемо са вишесортном логиком првог реда[2]. Идеја је да се слаб модел на природан начин трансформише у модел поменуте логике чији језик K^* садржи (најмање) две врсте променљивих, $X, Y, Z, \ldots$ променљиве за скупове, $x, y, z, \ldots$ променљиве за урелементе и, евентуално, променљиве за друге објекте који би нам били потребни. Предикати језика су $E_n(x_1, \ldots, x_n, X)$, $n \geq 1$, са значењем $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $Q_i(X)$, за $i = 1, 2$. Симболи константи су A_φ за сваку формулу φ из $K_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$

Слаба структура $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$ за $K_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ може бити трансформисана у структуру $\mathfrak{A}^* = \big(A, P, E_n^{\mathfrak{A}^*}, Q_1^{\mathfrak{A}^*}, Q_2^{\mathfrak{A}^*}, A_\varphi^{\mathfrak{A}^*}\big)_{n<\omega, \varphi}$ за $K^*_{\mathbb{A}}$, где $P \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} \mathbb{P}(A^n)$, $E_n^{\mathfrak{A}^*} \subseteq A^n \times P$, $Q_i^{\mathfrak{A}^*} \subseteq P$, $i = 1, 2$ и $A_\varphi^{\mathfrak{A}^*} \in P$ узимајући да је $A_\varphi^{\mathfrak{A}^*} = \{\vec{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$ и $P = \{A_\varphi^{\mathfrak{A}^*} \mid \varphi \in K_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)\}$. Такође, свака структура $\mathcal{B} = \big(B, P, E_n^{\mathcal{B}}, Q_1^{\mathcal{B}}, Q_2^{\mathcal{B}}, A_\varphi^{\mathcal{B}}\big)_{n<\omega, \varphi}$ за $K^*_{\mathbb{A}}$ може бити трансформисана у структуру $(\mathcal{B}_*, q_1^*, q_2^*)$ узимајући да $X \in q_i^*$ акко $Q_i^{\mathcal{B}}(X)$, за $i = 1, 2$.

Нека је $A_x(K^*_{\mathbb{A}})$ аксиоматски систем за $K^*_{\mathbb{A}}$ дат следећим аксиомама:

(Ax1) **Аксиома добре дефинисаности**

$$\forall X \bigwedge_{n<m} \neg \exists \vec{x} \, \exists \vec{y} \, \big(E_m(\vec{x}, \vec{y}, X) \wedge E_n(\vec{x}, X)\big),$$

где је $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\vec{y} = y_1, \ldots, y_{m-n}$, $\vec{x} \cap \vec{y} = \varnothing$;

(Ax2) **Аксиома екстензионалности**

$$\forall \vec{x} \, \big(E_n(\vec{x}, X) \longleftrightarrow E_n(\vec{x}, Y)\big) \longleftrightarrow X = Y,$$

[1] f-модел представља средњи модел.

[2] Двосортна (вишесортна) логика је слична уобичајеној логици првог реда и, за разлику од логике првог реда, садржи две различите врсте променљивих. На пример, природно је написати аксиоме за векторске просторе користећи две врсте променљивих, тј. једну врсту променљивих $r, s, t, \ldots$ за скаларе (елементе неког поља $\mathcal{F}$) и другу врсту променљивих $x, y, z, u, v, \ldots$ за векторе. Векторски простор је тројка $(\mathcal{F}, \mathcal{B}, \cdot)$, где је $\mathcal{F}$ поље, $\mathcal{B} = (V, +)$ је структура која се састоји из скупа вектора V и операције сабирања вектора $+$, $\cdot$ је операција множења скалара. Уопштено, двосортне структуре $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}, \ldots)$ садрже две уобичајене структуре и евентуално функције и релације дефинисане на њиховој унији. Двосортне (вишесортне) логике су само на први поглед јаче од уобичајених логика првог реда, будући да се двосортна структура $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}, \ldots)$ може увек трансформисати у структуру првог реда $(M \cup N, M, N, \ldots)$ са унарним предикатима M и N, који разврставају различите врсте елемената.

(Ах3) **Аксиоме задовољења**

1. $\forall\vec{x}\,\big(\forall\vec{y}\;E_{n+m}(\vec{x},\vec{y},A_R)\longleftrightarrow E_{n+m}(\vec{x},\vec{c},A_R)\big)$,
   за сваку атомичну формулу $R(\vec{x},\vec{c})$ језика L;
2. $\forall\vec{x}\,\big(E_n(\vec{x},A_{\neg\varphi})\longleftrightarrow\neg E_n(\vec{x},A_\varphi)\big)$;
3. $\forall\vec{x}\,\big(E_n(\vec{x},A_{\wedge\Phi})\longleftrightarrow\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi}E_n(\vec{x},A_\varphi)\big)$;
4. $\forall\vec{x}\,\big(E_n(\vec{x},A_{\forall y\varphi})\longleftrightarrow\forall y\;E_{1+n}(y,\vec{x},A_\varphi)\big)$;
5. $\forall\vec{x}\,\big(E_n(\vec{x},A_{\exists y\varphi})\longleftrightarrow\exists y\;E_{1+n}(y,\vec{x},A_\varphi)\big)$;
6. $\forall\vec{x}\,\Big(E_n(\vec{x},A_{Q_iy\varphi})\longleftrightarrow\exists X\,\big(Q_i(X)\wedge\forall y\,(E_1(y,X)\longleftrightarrow E_{1+n}(y,\vec{x},A_\varphi))\big)\Big)$,
   $i=1,2$;

(Ах4) **Аксиоме које су трансформације свих аксиома φ из $K_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$**

$$\forall\vec{x}\;E_n(\vec{x},A_\varphi);$$

(Ах5) **Аксиома монотоности** ($i=1,2$)

$$\forall X\,\forall Y\,\Big(Q_i(X)\wedge\forall x\,\big(E_1(x,X)\rightarrow E_1(x,Y)\big)\rightarrow Q_i(Y)\Big).$$

Својства (1) и (2) у дефиницији 4.3 могу бити једноставно изражена у логици $K^*_{\mathbb{A}}$ следећим реченицама:

$$(\mathrm{Ax-F})\;\forall \mathrm{X}\,(\mathrm{Q}_1(\mathrm{X})\rightarrow\mathrm{Q}_2(\mathrm{X}));$$
$$(\mathrm{Ax-U})\;\forall \mathrm{X}\,\exists \mathrm{Y}\,\Big(\mathrm{Q}_1(\mathrm{X})\wedge\mathrm{Q}_2(\mathrm{Y})\wedge\forall \mathrm{x}\,\big(\mathrm{E}_1(\mathrm{x},\mathrm{X})\rightarrow\mathrm{E}_1(\mathrm{x},\mathrm{Y})\big)\Big).$$

Теорема 4.5. *Уколико модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2)$ задовољава реченице*

$$(\theta_\Phi)\;\bigwedge_n\bigwedge_{\varphi\in\Phi_n}\forall\vec{x}\,\big(Q_1x\varphi(x,\vec{x})\rightarrow Q_2x\varphi(x,\vec{x})\big),$$

где је $\Phi=\bigcup\limits_n\Phi_n$, $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi\mid\varphi$ има $n+1$ слободну променљиву$\}$ и Φ, $\Phi_n\in\mathbb{A}$, тада теорија $\mathrm{T}=\mathrm{Ax}\,(\mathrm{K}^*_{\mathbb{A}})\cup\{\forall\mathrm{x}\,\mathrm{E}_1(\mathrm{x},\mathrm{A}_{\theta_\Phi})\mid\Phi\in\mathbb{A}\}\cup\{(\mathrm{Ax-F})\}$ има $K^*_{\mathbb{A}}$-модел.

Доказ. Теорија T је Σ_1-дефинабилна на скупу $\mathbb{A}$ и сваки подскуп T_0 од T такав да $\mathrm{T}_0\in\mathbb{A}$ има $K^*_{\mathbb{A}}$-модел зато што слаб модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2)$ задовољава реченицу $\theta_{\mathrm{T}'_0}$, где је T'_0 затворење за замену симболима константи из скупа C' и дисјункцију, и $\mathrm{T}'_0\in\mathbb{A}$. На основу теореме Барвајзове компактности следи да T има $K^*_{\mathbb{A}}$-модел. □

Као прву последицу претходне теореме добијамо да се сваки слаб модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2)$, који задовољава реченицу θ_Φ из претходне теореме, може трансформисати у модел $(\overline{\mathfrak{A}},\overline{q_1},\overline{q_2})$, тако да је $\overline{q_2}$ финије од $\overline{q_1}$. Довољно је трансформисати $K^*_{\mathbb{A}}$-модел за T у модел логике $K_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$.

Доказ следеће теореме је базиран на истој идеји као и доказ претходне теореме.

Теорема 4.6. *Уколико модел* $(\mathfrak{A},q_1,q_2)$ *задовољава реченице*

$$(\theta_\Phi)\ \bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} \forall\vec{x} \bigvee_m \bigvee_{\psi\in\Phi_m} \exists\vec{y}\ \big(Q_1x\varphi(x,\vec{x})\wedge Q_2y\psi(y,\vec{y})\wedge\forall z\,(\varphi(z,\vec{x})\to\psi(z,\vec{y}))\big),$$

где је $\Phi=\bigcup_n\Phi_n$*,* $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi\mid\varphi$ *има* $n+1$ *слободну променљиву*$\}$ *и* Φ*,* $\Phi_n\in\mathbb{A}$*, тада теорија* $\mathrm{T}=\mathrm{Ax}(K^*_{\mathbb{A}})\cup\{\forall x\ E_1(x,A_{\theta_\Phi})\mid\Phi\in\mathbb{A}\}\cup\{(\mathrm{Ax}-\mathrm{U})\}$ *има* $K^*_{\mathbb{A}}$*-модел.*

Уведимо сада логике $L^f_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ и $L^u_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$, са две врсте монотоних квантификатора, које су повезане са односима између колекција скупова „финија од” и „уписана у”, респективно. Аксиоме и правила извођења за логику $L^f_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ су све аксиоме и правила извођења логике $L_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ заједно са следећом аксиомом

$$(\mathrm{Ax}-\mathrm{F})\ \bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} \forall\vec{x}\ \big(Q_1x\varphi(x,\vec{x})\to Q_2x\varphi(x,\vec{x})\big),$$

где је $\Phi=\bigcup_n\Phi_n$, $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi\mid\varphi$ има $n+1$ слободну променљиву$\}$ и Φ, $\Phi_n\in\mathbb{A}$. Из овог аксиоматског система се може добити аксиоматски систем логике $L^u_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ заменом аксиоме $(\mathrm{Ax}-\mathrm{F})$ аксиомом

$$(\mathrm{Ax}-\mathrm{U})\ \bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} \forall\vec{x} \bigvee_m \bigvee_{\psi\in\Phi_m} \exists\vec{y}\ \big(Q_1x\varphi(x,\vec{x})\wedge Q_2y\psi(y,\vec{y})\wedge\forall z\,(\varphi(z,\vec{x})\to\psi(z,\vec{y}))\big).$$

Слаба комплетност уведених логика се може доказати слично као у [29], коришћењем својства конзистентности. Као последицу следеће теореме можемо добити „јачу” теорему комплетности.

Теорема 4.7. *(1) Реченица* φ *из* $L^f_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ *је конзистентна акко* φ *има* f*-модел.*
(2) Реченица φ *из* $L^u_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$ *је конзистентна акко* φ *има* u*-модел.*

Доказ. Довољно је трансформисати $K^*_{\mathbb{A}}$-модел добијен применом теореме 4.5 (респективно теореме 4.6 за случај (2)) у одговарајући $L_{\mathbb{A}}(Q_1,Q_2)$-модел који ће очигледно бити f-модел (u-модел). □

Пример 4.8 (Теорема комплетности за двовероватносне моделе са мерама које се налазе у апсолутно непрекидном односу)**.** Апсолутно непрекидни двовероватносни модел је структура $(\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2)$, где је $\mathfrak{A}$ структура првог реда и μ_1,μ_2 су две вероватносне мере такве да је $\mu_1\ll\mu_2$ (видети [36]). Одговарајућа логика $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$, описана у поглављу 5, је слична стандардној вероватносној логици $L_{\mathbb{A}P}$ (видети поглавље 5).

Допуштена су два типа вероватносних квантификатора $P_i\vec{x}\geq r$, $i=1,2$, $r\in\mathbb{A}\cap(0,1)$, који су интерпретирани уобичајено:

$$(\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2)\models(P_i\vec{x}\geq r)\varphi(\vec{x})\quad\text{акко}\quad\mu_i\{\vec{a}\in A^n\mid(\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2)\models\varphi[\vec{a}]\}\geq r,\ i=1,2.$$

Од аксиома и правила извођења за $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ размотрићемо аксиому која описује апсолутну непрекидност мера μ_1 и μ_2. Мера μ_1 је апсолутно непрекидна у односу на меру μ_2, у ознаци $\mu_1\ll\mu_2$, акко је испуњено: за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да за сваки скуп B из одговарајуће алгебре мерљивих скупова $\mathcal{F}$, $\mu_2(B)<\delta$ имплицира $\mu_1(B)<\varepsilon$. Другим речима, ако је $\mathcal{F}^{<\varepsilon}_i=\{B\in\mathcal{F}\mid\mu_i(B)<\varepsilon\}$, $i=1,2$, $\varepsilon>0$, тада је свака $\mathcal{F}^{<\varepsilon}_1$ финија колекција од $\mathcal{F}^{<\delta}_2$ за неко $\delta>0$. Аксиома апсолутне непрекидности је $\bigwedge_{\varepsilon\in Q^+}\bigvee_{\delta\in Q^+}\bigwedge_{n\in\omega}\bigwedge_{\varphi\in\Phi_n}((P_2\vec{x}<\delta)\varphi(\vec{x})\to(P_1\vec{x}<\varepsilon)\varphi(\vec{x}))$, где је $\Phi=\bigcup_n\Phi_n$, $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi\mid\varphi$ има $n+1$ слободну променљиву$\}$.

Напомена 4.9. (1) Аксиома апсолутне непрекидности неће имплицирати да у слабом моделу $(\mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2)$ важи $\mu_1 \ll \mu_2$, с обзиром да је дозвољено правити конјункције само по елементима допустивог скупа, тј. $\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi$, $\Phi \in \mathbb{A}$, али ће обезбедити трансформацију слабог модела у модел у коме ће бити задовољено тражено својство. Изложеном техником средњег модела добијамо модел у коме ће аксиома апсолутне непрекидности важити униформно за сваку формулу φ, тј. важиће за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да за сваку формулу φ логике $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ важи $(P_2\vec{x} < \delta)\varphi(\vec{x}) \to (P_1\vec{x} < \varepsilon)\varphi(\vec{x})$, тј. важиће $\mu_1 \ll \mu_2$.

(2) Напоменимо још да је слаб модел $(\mathfrak{A}, q_1, q_2)$ логике $L^f_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$ такође и f-модел, тј. примена изложене технике није била неопходна, али је због погодног методичког приступа излагању ове технике изабран управо тај логички систем са наведеним својствима између колекција q_1 и q_2 (исто важи и за логику $L^u_{\mathbb{A}}(Q_1, Q_2)$).

Пример 4.10 (Теорема комплетности за тополошке класа моделе)**.** Тополошка класа логика $L_{\mathbb{A}}(O, C)$ (инфинитарна логика са два нова квантификатора O и C) погодна је за проучавање топологије на правим класама, где су класе отворених и класе затворених скупова дефинисане одвојено. Тополошки класа модел за $L_{\mathbb{A}}(O, C)$ је структура $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, C)$ тако да је тројка $(K, \mathcal{O}, C)$ тополошки класа простор где је $\mathcal{O}$ класа отворених подскупова и C класа затворених подскупова од K. Релација задовољења је дефинисана уобичајено:

$$(\mathcal{K}, \mathcal{O}, C) \models Ox\varphi[\vec{b}] \quad \text{акко} \quad \{a \mid (\mathcal{K}, \mathcal{O}, C) \models \varphi[a, \vec{b}]\} \in \mathcal{O};$$
$$(\mathcal{K}, \mathcal{O}, C) \models Cx\varphi[\vec{b}] \quad \text{акко} \quad \{a \mid (\mathcal{K}, \mathcal{O}, C) \models \varphi[a, \vec{b}]\} \in C.$$

Од описаних својстава тополошког класа простора, у аксиоматском систему логике $L_{\mathbb{A}}(O, C)$, издвојићемо оно због којег је неопходна примена технике средњег модела:

За сваки подскуп X од K постоји $F \in C$ тако да је $X \subseteq F$. Примећује се да је наведено својство типа „уписан у”. Одговарајућа аксиома је $\bigwedge\limits_{n} \bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi_n} \forall\vec{x} \bigvee\limits_{m} \bigvee\limits_{\psi\in\Phi_m} \exists\vec{y}\ \big(Cz\psi(z, \vec{y}) \wedge \forall z\,(\varphi(z, \vec{x}) \to \psi(z, \vec{y}))\big)$, где је $\Phi = \bigcup\limits_{n} \Phi_n$, $\Phi_n = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi$ је формула са $n+1$ слободном променљивом$\}$ и Φ, $\Phi_n \in \mathbb{A}$. Дакле, наведено својство мора да важи за све подскупове од K, а не само за дефинабилне подскупове од K, па је зато неопходна конструкција средњег модела.

У даљем раду су изложени разни логички системи у којима је техника конструкције средњег модела кључна у доказивању комплетности аксиоматизација у односу на дефинисане класе модела. (Видети поглавља 5, 6 и 7).

5. Логике са интегралима

5.1. Логике $L_{\mathbb{A}P}$

У овом поглављу је представљена логика $L_{\mathbb{A}P}$ која је слична инфинитарној логици $L_{\mathbb{A}}$ и која, уместо уобичајених квантификатора $(\forall x)$ и $(\exists x)$, поседује вероватносне квантификаторе $(Px \geq r)$. Структура ове логике је структура првог реда са вероватносном (пребројиво адитивном) мером на универзуму, тако да је свака релација мерљива. Формула $(Px \geq r)\varphi(x)$ подразумева да скуп $\{x \mid \varphi(x)\}$ има меру најмање r. Претпоставља се да је $\mathbb{A}$ допустив скуп тако да је $\omega \in \mathbb{A}$ и сваки елемент $a \in \mathbb{A}$ је пребројив (тј. $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{HC}$, где је $\mathbb{HC}$ скуп наследно пребројивих скупова, видети [4] и поглавље 2).

Дефиниција 5.1.1. Уз претпоставку да је L пребројив $\mathbb{A}$-рекурзиван скуп релацијских симбола и симбола константи (без функцијских симбола), логика $L_{\mathbb{A}P}$ има следеће логичке симболе:

(а) Пребројиво много промењљивих v_n, $n \in \mathbb{N}$;
(б) Везнике $\neg$ и $\bigwedge$;
(в) Квантификаторе $(P\vec{x} \geq r)$, где је $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-торка различитих промењљивих и $r \in \mathbb{A} \cap [0,1]$;
(г) Симбол једнакости $=$ (опционо).

Дефиниција 5.1.2. Скуп формула логике $L_{\mathbb{A}P}$ је најмањи скуп тако да:

(а) Свака атомична формула логике првог реда је формула из $L_{\mathbb{A}P}$;
(б) Ако је φ формула из $L_{\mathbb{A}P}$, онда је и $\neg\varphi$ формула логике $L_{\mathbb{A}P}$;
(в) Ако је $\Phi \in \mathbb{A}$ скуп формула логике $L_{\mathbb{A}P}$ са коначно много слободних промењљивих, онда је и $\bigwedge \Phi$ формула логике $L_{\mathbb{A}P}$;
(г) Ако је φ формула из $L_{\mathbb{A}P}$ и $(P\vec{x} \geq r)$ је квантификатор логике $L_{\mathbb{A}P}$, онда је и $(P\vec{x} \geq r)\varphi$ формула из $L_{\mathbb{A}P}$.

Формуле се могу посматрати у скуповном смислу, тј. као елементи допустивог скупа $\mathbb{A}$ тако да је $L_{\mathbb{A}P} \subseteq \mathbb{A}$. Како је $L_{\mathbb{A}P}$ одређена логиком $L_{\omega_1 P}$ (видети [23]), имамо да је $L_{\mathbb{A}P} = \mathbb{A} \cap L_{\omega_1 P}$.

Дефиниција 5.1.3. У логици $L_{\mathbb{A}P}$ се користе следеће скраћенице:

(i) $(P\vec{x} < r)\varphi$ за $\neg(P\vec{x} \geq r)\varphi$;
(ii) $(P\vec{x} \leq r)\varphi$ за $(P\vec{x} \geq 1 - r)\neg\varphi$;
(iii) $(P\vec{x} > r)\varphi$ за $\neg(P\vec{x} \geq 1 - r)\neg\varphi$;
(iv) $\bigvee_{\varphi \in \Phi} \varphi$ за $\neg \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \neg\varphi$;
(v) Коначни везници $\wedge, \vee \rightarrow, \longleftrightarrow$ су дефинисани уобичајено.

5.1.1. Вероватносни модели

Коначно адитиван вероватносни простор је уређена тројка $(A, \mathcal{S}, \mu)$ где је $\mathcal{S}$ поље подскупова од A и $\mu\colon \mathcal{S} \rightarrow [0,1]$, $\mu(A) = 1$ и за $X, Y \in \mathcal{S}$, $\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(Y \setminus X) + \mu(X \cap Y)$.

Скупови $X \in \mathcal{S}$ су μ-мерљиви, а μ је коначно адитивна вероватносна мера на A.

Вероватносни простор је тројка $(A,\mathcal{S},\mu)$, где је $\mathcal{S}$ σ-поље и μ је пребројиво адитивна мера; тј. за $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots$ из $\mathcal{S}$ имамо да је $\mu(\bigcup_n X_n) = \lim_n \mu(X_n)$. У том случају, за μ ћемо једноставније рећи „вероватносна мера”.

Скуп X је нула скуп мере μ уколико постоји $Y \supseteq X$ тако да је $\mu(Y) = 0$. Производ два вероватносна простора $(A,\mathcal{S},\mu)$ и $(B,\mathcal{F},\nu)$ је вероватносни простор $(A\times B,\mathcal{S}\otimes\mathcal{F},\mu\otimes\nu)$, где је $\mathcal{S}\otimes\mathcal{F}$ σ-алгебра генерисана помоћу скупа мерљивих правоугаоника $X\times Y$, где $X\in\mathcal{S}$, $Y\in\mathcal{F}$ и важи $(\mu\otimes\nu)(X\times Y)=\mu(X)\cdot\nu(Y)$; n-ти производ простор је означен са $(A^n,\mathcal{S}^n,\mu^n)$. У општем случају, дијагонала, тј. скуп $\{(x,x)\mid x\in M\}$ није μ^2-мерљив. Међутим, уколико је сваки синглтон мерљив, постоји начин да се мера μ^2 прошири и на дијагоналне супове.

Дефиниција 5.1.4. Нека је $(A,\mathcal{S},\mu)$ вероватносни простор такав да је сваки синглтон мерљив. Тада, за свако $n\in\mathbb{N}$, $(A^n,\mathcal{S}^{(n)},\mu^{(n)})$ је вероватносни простор где је $\mathcal{S}^{(n)}$ σ-алгебра генерисана помоћу мерљивих правоугаоника и дијагоналних скупова $D_{ij}=\{\vec{x}\in A^n\mid x_i=x_j\}$ и $\mu^{(n)}$ је јединствена екстензија од μ^n на $\mathcal{S}^{(n)}$ таква да је $\mu^{(n)}(D_{ij})=\sum_{x\in M}\mu(\{x\})^2$.

Став 5.1.5. Уколико је $(A,\mathcal{S},\mu)$ вероватносни простор такав да је сваки синглтон мерљив, тада мера $\mu^{(n)}$ на $\mathcal{S}^{(n)}$, дата у претходној дефиницији, постоји и јединствена је. Штавише, за сваки скуп $X\in\mathcal{S}^{(n)}$ постоји μ^n-мерљив скуп U тако да је $\mu^{(n)}(X\Delta U)=0$.

Дефиниција 5.1.6. Вероватносни модел за L је структура $\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},c_j^{\mathfrak{A}},\mu)_{i\in I,j\in J}$, где је μ (пребројиво адитивна) вероватносна мера на A тако да је сваки синглтон мерљив, свака релација $R_i^{\mathfrak{A}}$ је $\mu^{(n_i)}$-мерљива и сваки $c_j^{\mathfrak{A}}\in A$.

Теорема 5.1.7. *Нека је $\mathfrak{A}$ вероваѿносни модел за L. Релација задовољења $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]$, за $\varphi(\vec{x})\in L_{\mathbb{A}P}$ и $\vec{a}$ за A, је дефинисана рекурзивно као у случају лоīике $L_{\mathbb{A}}$ уз додаѿни услов за вероваѿносни кванѿификаѿор: $\mathfrak{A}\models(P\vec{y}\geq r)\varphi(\vec{x},\vec{y})[\vec{a}]$ акко $\{\vec{b}\in A^n\mid\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}$ је $\mu^{(n)}$-мерљив и има меру најмање r. Шѿавише, $\mathfrak{A}$ је модел реченице φ ако је $\mathfrak{A}\models\varphi$.*

Теорема 5.1.8. *За сваки вероваѿносни модел $\mathfrak{A}$, формулу $\varphi(\vec{x},\vec{y})\in L_{\mathbb{A}P}$ и $\vec{a}$ из A, скуп $\{\vec{b}\in A^n\mid\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}$ је $\mu^{(n)}$-мерљив.*

Претходна теорема, на неки начин, оправдава дефинисаност релације задовољења за случај са вероватносним квантификаторима и последица је „дијагоналне” форме Фубинијеве теореме (видети [22]).

Теорема 5.1.9 (Фубини)**.** *Нека је μ вероваѿносна мера ѿако да је сваки синīлѿон мерљив и нека је $B\subseteq A^{m+n}$ $\mu^{(m+n)}$-мерљив. Тада је:*

(i) Сваки засек $B\vec{x}=\{\vec{y}\in A^n\mid\vec{x}\vec{y}\in B\}$ је $\mu^{(n)}$-мерљив;
(ii) Функција $f(\vec{x})=\mu^{(n)}(B\vec{x})$ је $\mu^{(m)}$-мерљива;
(iii) Важи да је $\mu^{(m+n)}(B)=\int f(\vec{x})\,d\mu^{(m)}$.

(Функција $f\colon A\to\mathbb{R}$ је μ-мерљива ако је $f^{-1}(-\infty,r)$ μ-мерљив скуп за свако $r\in\mathbb{R}$).

5.1.2. Аксиоматски систем и правила извођења

Следећим дефиницијама је дат аксиоматски систем логике $L_{\mathbb{A}P}$; φ и ψ су произвољне формуле из $L_{\mathbb{A}P}$, $\Phi\in\mathbb{A}$ је произвољан скуп формула из $L_{\mathbb{A}P}$ и $r,s\in\mathbb{A}\cap[0,1]$.

Дефиниција 5.1.10. Аксиоме слабе $L_{\mathbb{A}P}$ су следеће:

(A_1) Све аксиоме за $L_{\mathbb{A}}$ без квантификатора;
(A_2) Монотоност: $(P\vec{x}\geq r)\varphi\to(P\vec{x}\geq s)\varphi$, где је $r\geq s$;

(A$_3$) $(P\vec{x} \geq r)\varphi(\vec{x}) \rightarrow (P\vec{y} \geq r)\varphi(\vec{y})$;
(A$_4$) $(P\vec{x} \geq 0)\varphi$;
(A$_5$) Коначна адитивност:
(i) $(P\vec{x} \leq r)\varphi \wedge (P\vec{x} \leq s)\psi \rightarrow (P\vec{x} \leq r+s)(\varphi \vee \psi)$;
(ii) $(P\vec{x} \geq r)\varphi \wedge (P\vec{x} \geq s)\psi \wedge (P\vec{x} \leq 0)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (P\vec{x} \geq r+s)(\varphi \vee \psi)$;
(A$_6$) Архимедовско својство: $(P\vec{x} > r)\varphi \longleftrightarrow \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} (P\vec{x} \geq r + \frac{1}{n})\varphi$.

Дефиниција 5.1.11. Аксиоме за (пуну) $L_{\mathbb{A}P}$ су аксиоме за слабу $L_{\mathbb{A}P}$ плус следећа листа аксиома:
(B$_1$) Пребројива адитивност: $\bigwedge\limits_{\Psi\subseteq\Phi} (P\vec{x} \geq r)\bigwedge\Psi \rightarrow (P\vec{x} \geq r)\bigwedge\Phi$,
где Ψ иде преко скупа свих коначних подскупова од Φ;
(B$_2$) Симетрија: $(Px_1, \ldots, x_n \geq r)\varphi \longleftrightarrow (Px_{\bar{u}(1)}, \ldots, x_{\bar{u}(n)} \geq r)\varphi$,
где је $\bar{u}$ пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.
(B$_3$) $(P\vec{x} \geq r)(P\vec{y} \geq s)\varphi \rightarrow (P\vec{x}\vec{y} \geq r \cdot s)\varphi$,
где су све променљиве у $\vec{x}$ и $\vec{y}$ различите.
(B$_4$) За свако $r < 1$, $(P\vec{x} \geq 1)(P\vec{y} > 0)(P\vec{z} \geq r)(\varphi(\vec{x}, \vec{z}) \longleftrightarrow \varphi(\vec{y}, \vec{z}))$,
где су све променљиве у $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ различите.
(Аксиома (B$_4$) обезбеђује да $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ може бити апроксимиран коначном унијом мерљивих правоугаоника).

Дефиниција 5.1.12. Правила извођења за $L_{\mathbb{A}P}$ су следеће:
(R$_1$) Модус поненс: $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$;
(R$_2$) Конјункција: $\{\varphi \rightarrow \psi \mid \psi \in \Psi\} \vdash \varphi \rightarrow \bigwedge\Psi$;
(R$_3$) Генерализација: $\varphi \rightarrow \psi(\vec{x}) \vdash \varphi \rightarrow (P\vec{x} \geq 1)\psi(\vec{x})$, где $\vec{x}$ није слободно у φ.

5.1.3. Слаби модели

Дефиниција 5.1.13. Слаб модел за $L_{\mathbb{A}P}$ је структура $\mathfrak{A} = (A, R_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu_n)_{i\in I, j\in J, n\in\mathbb{N}}$, тако да је μ_n коначно адитивна вероватносна мера на A^n, сваки синглтон је мерљив и скуп $\{\vec{b} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\}$ је μ_n мерљив за сваку формулу $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\mathbb{A}P}$ и $\vec{a}$ из A.

Теорема 5.1.14 (Теорема слабе комплетности)**.** *Нека је $\mathbb{A}$ пребројив. Уколико је Φ конзистентно у слабој $L_{\mathbb{A}P}$, онда Φ има слаб модел.*

Скица доказа: Нека је C пребројив скуп нових симбола константи и нека је $K = L \cup C$. Помоћу Хенкинове конструкције, [44], Φ може бити проширено до маскимално конзистентног скупа реченица Γ (у слабој $K_{\mathbb{A}P}$) са следећим својствима:
(1) Ако је $\Phi \subseteq \Gamma$ и $\bigwedge\Phi \in K_{\mathbb{A}P}$, онда је $\bigwedge\Phi \in \Gamma$;
(2) Ако је $\varphi(\vec{c}) \in \Gamma$ за свако $\vec{c}$ из C, онда $(P\vec{x} \geq 1)\varphi(\vec{x}) \in \Gamma$.

Нека је C' скуп симбола константи језика K. Γ индукује структуру првог реда $\mathfrak{A}_0 = (A, R_j^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})_{i\in I, c\in C'}$ за K на уобичајен начин и $A = \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in C'\}$. Мера μ_n је дефинисана помоћу $\mu_n\{\vec{c}^{\mathfrak{A}} \mid \varphi(\vec{c}, \vec{d}) \in \Gamma\} = \sup\{r \mid (P\vec{x} \geq r)\varphi(\vec{x}, \vec{d}) \in \Gamma\}$ за свако $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ и $\vec{d}$. На основу аксиома (A$_1$)–(A$_5$) мера μ_n ће бити добро дефинисана и коначно адитивна. Овим је добијен слаб модел $\mathfrak{A}$. На основу аксиоме (A$_6$), обезбеђена је коректност дефинисања мере μ_n. Индукцијом се доказује да је $\mathfrak{A} \models \Gamma$, па је према томе $\mathfrak{A}$ модел за Φ. $\square$

5.1.4. Градирани вероватносни модели

Дефиниција 5.1.15. Градирани вероватносни модел за L је структура $\mathfrak{A}=(A,R_i^{\mathfrak{A}},c_j^{\mathfrak{A}},\mu_n)_{i\in I,j\in J,n\in\mathbb{N}}$, тако да:

(а) свако μ_n је (пребројиво адитивна) вероватносна мера на A^n;

(б) свака n-арна релација $R_i^{\mathfrak{A}}$ је μ_n-мерљива и релација једнакости је μ_2-мерљива;

(в) ако је скуп B μ_m-мерљив, онда је $B\times A^n$ μ_{m+n}-мерљив;

(г) свака μ_n је инваријантна за пермутације; уколико је $\bar{u}$ пермутација скупа $\{1,2,\dots,n\}$ и $B\in\mathrm{dom}(\mu_n)$, ако је $\bar{u}B=\{(a_{\bar{u}(1)},\dots,a_{\bar{u}(n)})\mid(a_1,\dots,a_n)\in B\}$, онда $\bar{u}B\in\mathrm{dom}(\mu_n)$ и $\mu_n(\bar{u}B)=\mu_n(B)$;

(д) $\langle\mu_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ има Фубинијево својство: ако је B μ_{m+n}-мерљив, онда:

  (1) за свако $\vec{x}\in A^m$, секција $B\vec{x}=\{\vec{y}\mid B(\vec{x},\vec{y})\}$ је μ_n-мерљив;

  (2) функција $f(\vec{x})=\mu_n(B\vec{x})$ је μ_m-мерљива;

  (3) $\int f(\vec{x})\,d\mu_m=\mu_{m+n}(B)$.

Дефиниција 5.1.16. Под градираном логиком $L_{\mathbb{A}P}$ подразумевамо логику $L_{\mathbb{A}P}$ са свим аксиомама, изузев аксиоме (B_4).

Теорема 5.1.17 (Теорема градиране комплетности)**.** *Сваки пребројиви скуп реченица* Φ *који је конзистентан у градираној* $L_{\mathbb{A}P}$*, има градиран модел.*

Скица доказа: Нека је $\mathbb{A}$ пребројив и нека L има пребројиво много симбола константи које се не појављују у Φ. Тада, Φ има слаб модел $\mathfrak{A}=(A,R_i,c_j,\mu_n)_{i\in I,j\in J,n\in\mathbb{N}}$ такав да задовољава све теореме градиране $L_{\mathbb{A}P}$, $A=\{c_j\mid j\in J\}$ и домен сваке мере μ_n је скуп $L_{\mathbb{A}P}$-дефинабилних подскупова од A^n. Нека је ${}^*\mathfrak{A}=({}^*A,{}^*R_i,{}^*c_j,{}^*\mu_n)_{i\in{}^*I,j\in{}^*J,n\in{}^*\mathbb{N}}$ интернална структура и нека је $\hat{\mathfrak{A}}=({}^*A,{}^*R_i,{}^*c_j,L(\mu_n))_{i\in I,j\in J,n\in\mathbb{N}}$, где је $L(\mu_n)$ Лебова мера од μ_n. Из чињенице да сваки $L(\mu_n)$-мерљив скуп може бити апроксимиран одозго и одоздо интерналним скуповима, као и из аксиома (B_2) и (B_3), следи да је $\hat{\mathfrak{A}}$ градирана вероватносна структура. Индукцијом по сложености формуле може се показати да је $\hat{\mathfrak{A}}$ $L_{\mathbb{A}P}$-еквивалентно са $\mathfrak{A}$, па је према томе $\hat{\mathfrak{A}}\models\Phi$. □

5.1.5. Сагласност и комплетност

Од кључног значаја у доказу теореме комплетности је следећа лема која се доказује применом аксиоме (B_4) n пута.

Лема 5.1.18 (Апроксимација правоугаоницима)**.** *Нека је* $\mathfrak{A}$ *градирана вероватносна структура која задовољава сваку теорему из* $L_{\mathbb{A}P}$*. Тада, за свако* $\varepsilon>0$ *и формулу* $\varphi(\vec{y})$ *из* $L_{\mathbb{A}P}$ *постоји коначно много формула* $\psi_{ij}(\vec{x},y_j)$*, где је* $i=1,\dots,m$ *и* $j=1,\dots,n$*, тако да важи* $\mathfrak{A}\models(P\vec{x}>0)(P\vec{y}>1-\varepsilon)\big(\varphi(\vec{y})\leftrightarrow\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\psi_{ij}(\vec{x},y_j)\big)$.

Лемом се тврди да било који дефинабилан скуп $\varphi(\vec{y})$ у $\mathfrak{A}$ може бити апсоксимиран до на ε помоћу коначне уније дефинабилних правоугаоника.

Дефиниција 5.1.19. Нека су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ градиране вероватносне структуре. Каже се да је $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ скоро сигурно (с.с.) ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имају исте универзуме, константе и мере, и за сваку атомичну формулу $\varphi(\vec{x})$ из $L_{\mathbb{A}P}$ важи:

$$\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]\quad\text{акко}\quad\mathfrak{B}\models\varphi[\vec{a}]\ \text{за}\ \mu_n\text{-скоро све}\ \vec{a}.$$

Лема 5.1.20. *Ако је $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$ с.с., онда су $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{B}$ $L_{\mathbb{A}P}$-еквивалентне структуре. Такође, за сваку формулу $\varphi(\vec{x})$ из $L_{\mathbb{A}P}$,*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{акко} \quad \mathcal{B} \models \varphi[\vec{a}] \text{ за } \mu_n\text{-скоро све } \vec{a}.$$

Доказ се изводи индукцијом по сложености формуле φ.

Теорема 5.1.21. *Нека је $\mathfrak{A}$ градирана вероватносна структура која задовољава сваку теорему логике $L_{\mathbb{A}P}$ и нека је $\mu = \mu_1$. Тада, постоји градирана вероватносна структура $\mathcal{B}$ таква да је $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$ с.с., и свака релација $R_i^{\mathcal{B}}$ је $\mu^{(n)}$-мерљива. Према томе, $\mathcal{B}$ индукује уобичајену вероватносну структуру.*

Теорема 5.1.22 (Теорема сагласности)**.** *Било који скуп Φ реченица из $L_{\mathbb{A}P}$, који има модел, је конзистентан.*

Једина потешкоћа је проверити ваљаност аксиоме (B_4). (Видети [27]).

Теорема 5.1.23 (Теорема комплетности)**.** *Сваки пребројив конзистентан скуп Φ реченица логике $L_{\mathbb{A}P}$ има модел.*

Теорема комплетности је последица градиране комплетности, теореме 5.1.21 и леме 5.1.20.

На основу следећег примера се лако закључује да теорема компактности за $L_{\mathbb{A}P}$ не важи.

Пример 5.1.24. Нека је T скуп реченица који садржи реченице $(Px > 0)R(x)$ и $(Px \leq \frac{1}{n})R(x)$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$ Док сваки коначан подскуп од T има модел, цео скуп T нема модел.

5.1.6. Случајне променљиве

Дефиниција 5.1.25. Случајна променљива n-тог степена на вероватносном простору $(A, \mathcal{F}, \mu)$ је $\mu^{(n)}$-мерљива функција $X \colon A^n \to \mathbb{R}$.

Нека је $L = \{X_i, c_j, R_k \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$.

Дефиниција 5.1.26. Помоћни језик од L је језик L^X који има исте симболе константи c_j и релацијске симболе R_k из L, али и нове релацијске симболе $[X_i(\vec{x}) \geq r]$ и $[X_i(\vec{x}) \leq r]$ за свако $i \in I$ и $r \in \mathbb{Q}$.

Користе се следећа скраћења: $[X_i(\vec{x}) < r]$ за $\neg[X_i(\vec{x}) \geq r]$ и $[X_i(\vec{x}) > r]$ за $\neg[X_i(\vec{x}) \leq r]$.

Језик $L_{\mathbb{A}P}(\mathbb{R})$ има исти скуп формула као и L_{AP}^X. Аксиоме и правила извођења су као у L_{AP}^X, плус четири нове аксиоме где су $r, s \in \mathbb{Q}$:

(RV_1) $[X_i(\vec{x}) \geq r] \to [X_i(\vec{x}) \geq s]$, где је $r \geq s$;

(RV_2) $[X_i(\vec{x}) > r] \longleftrightarrow \bigvee_n [X_i(\vec{x}) \geq r + \frac{1}{n}]$;

(RV_3) $[X_i(\vec{x}) \geq r] \longleftrightarrow \bigwedge_n [X_i(\vec{x}) \geq r - \frac{1}{n}]$;

(RV_4) $\bigvee_n ([X_i(\vec{x}) \geq -n] \wedge [X_i(\vec{x}) \leq n])$.

Дефиниција 5.1.27. Модел са случајним променљивим за L је структура $(\mathfrak{A}, \mu)$, где је $\mathfrak{A} = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, R_k^{\mathfrak{A}})_{i \in I, j \in J, k \in K}$ структура првог реда, μ је вероватносна мера на A, $X_i^{\mathfrak{A}}$ је случајна променљива n_i-тог степена, $c_j^{\mathfrak{A}} \in A$, $R_k^{\mathfrak{A}}$ је $\mu^{(n_i)}$-мерљива и сваки синглтон је мерљив.

Важи да је $(\mathfrak{A},\mu) \models [X_i(\vec{x}) \geq r][\vec{a}]$ акко $X_i^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \geq r$.

Теорема 5.1.28. *Пребројив скуп реченица из $L_{\mathbb{A}P}(\mathbb{R})$ има модел са случајним променљивим акко је конзистентан у $L_{\mathbb{A}P}(\mathbb{R})$.*

5.2. Логика $L_{\mathbb{A}\int}$

Индикатор формула $\mathbb{1}(R(\vec{x}))$ за дату релацију $R(\vec{x})$ је дефинисана са

$$\mathbb{1}(R(\vec{x})) = \begin{cases} 1, & \text{ако } R(\vec{x}) \text{ је тачно,} \\ 0, & \text{ако } R(\vec{x}) \text{ није тачно.} \end{cases}$$

Језик $L_{\mathbb{A}\int}$ ће имати атомичне терме који ће бити интерпретирани као индикатор функције атомичних формула на језику L, а сложенији терми ће бити изграђени из атомичних коришћењем непрекидних реалних функција као и коришћењем интеграције.

Нека је L Σ-дефинабилан скуп који садржи релацијске симболе, симболе константи, пребројиво много променљивих $v_1, v_2, v_3, \ldots$, n-арне везнике $\mathbb{F}$ за сваку непрекидну функцију $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, тако да је $F\restriction_{\mathbb{Q}^n} \in \mathbb{A}$, и квантификаторе $\int \ldots dx$.

Дефиниција 5.2.1. Скуп термова логике $L_{\mathbb{A}\int}$ је најмањи скуп, тако да:
(1) сваки атомични терм $\mathbb{1}(R(\vec{x}))$ или $\mathbb{1}(x = y)$ за сваку атомичну формулу логике првог реда $L_{\mathbb{A}}$, је терм;
(2) сваки реални број $r \in \mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ је терм;
(3) ако је τ терм и x је променљива, онда је $\int \tau \, dx$ терм;
(4) ако су $\tau_1, \ldots, \tau_n$ терми, тада је и $\mathbb{F}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ терм.

Променљива x је везана у терму $\int \tau \, dx$. Затворен терм је терм без слободних променљивих.

Дефиниција 5.2.2. Скуп формула логике $L_{\mathbb{A}\int}$ је најмањи скуп такав да:
(1) свака атомична формула $\tau \geq 0$, за сваки терм τ из $L_{\mathbb{A}\int}$, је формула;
(2) ако је φ формула, онда је и $\neg\varphi$ формула;
(3) ако је Φ скуп формула са коначно много слободних променљивих и $\Phi \in \mathbb{A}$, онда је $\bigwedge \Phi$ формула.

Дефиниција 5.2.3. Интерпретација за $L_{\mathbb{A}\int}$ у вероватносној структури $(\mathfrak{A},\mu)$ је функција која додељује сваком терму $\tau(\vec{x})$, где је $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n-торка различитих променљивих, функцију $\tau^{\mathfrak{A}}\colon A^n \to \mathbb{R}$, тако да је:
(1) $\mathbb{1}(R(\vec{x}))^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } R^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], \\ 0, & \text{ако је } \neg R^{\mathfrak{A}}[\vec{a}], \end{cases}$ $\qquad \mathbb{1}(x = y)^{\mathfrak{A}}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } a = b, \\ 0, & \text{ако је } a \neq b; \end{cases}$
(2) $r^{\mathfrak{A}} = r$;
(3) $\left(\int \tau(x, \vec{y}) dx\right)^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \int \tau^{\mathfrak{A}}(b, \vec{a}) d\mu(b)$;
(4) $\mathbb{F}(\tau_1, \ldots, \tau_m)^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = F(\tau_1^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))$.

Релација задовољења $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ за формулу $\varphi(\vec{x})$ из $L_{\mathbb{A}\int}$ и $\vec{a} \in A^n$ је дефинисана рекурзивно као у логици првог реда, изузев услова за атомичне формуле: ако је $\tau(\vec{x}) \geq 0$ атомична формула, онда је $\mathfrak{A} \models (\tau(\vec{x}) \geq 0)[\vec{a}]$ акко $\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \geq 0$.

Аксиоме логике $L_{\mathbb{A}\int}$, где су σ, τ терми и $r, s \in \mathbb{A} \cap \mathbb{R}$, су:

(E$_1$) све схема аксиоме за $L_{\mathbb{A}}$ без квантификатора, где атомична формула $\mathbb{1}(x=y)=1$ игра улогу формуле $x=y$;

(E$_2$) $\tau=0\vee\tau=1$, за сваки атомични терм τ;

(E$_3$) аксиоме уређења:

(1) $r\geq r$;

(2) $\tau\geq r\to\tau\geq s$ за $r\geq s$;

(E$_4$) $(\tau_1,\dots,\tau_m)\in S\to\mathbb{F}(\tau_1,\dots,\tau_m)\in[a,b]$, за сваки рационални затворени правоугаоник $S\subseteq\mathbb{R}^m$, где је $F(S)=[a,b]$;

(E$_5$) аксиоме за интеграл:

(i) $\int r\,dx=r$;

(ii) $\int\tau(x)\,dx=\int\tau(y)\,dy$;

(iii) $\int\int\tau(x,y)\,dx\,dy=\int\int\tau(x,y)\,dy\,dx$;

(iv) $\int(r\cdot\sigma+s\cdot\tau)\,dx=r\int\sigma\,dx+s\int\tau\,dx$;

(E$_6$) Архимедова аксиома
$\tau>r\longleftrightarrow\bigvee\limits_n(\tau\geq r+\frac{1}{n})$;

(E$_7$) за свако $m\in\mathbb{N}$, $\bigvee\limits_k\int\mathbb{F}_k\Big(1-\int\mathbb{F}_k\big(\int|\tau(\vec{x},\vec{z})-\tau(\vec{y},\vec{z})|\,d\vec{z}\big)\,d\vec{y}\Big)\,d\vec{x}\geq 1-\frac{1}{m}$,

$$\text{где је } F_k(a)=\begin{cases}0, & \text{ако је } a\leq\frac{1}{k},\\ \text{линеарно}, & \text{ако је } \frac{1}{k}\leq a\leq\frac{2}{k},\\ 1, & \text{ако је } a\geq\frac{2}{k}.\end{cases}$$

Аксиома (E$_7$) је транслација аксиоме (B$_4$) за $L_{\mathbb{A}P}$.

Правила извођења за логику $L_{\mathbb{A}\int}$ су:

(F$_1$) $\varphi,\varphi\to\psi\vdash\psi$ (*Modus Ponens*) ;

(F$_2$) $\{\varphi\to\psi\mid\psi\in\Psi\}\vdash\varphi\to\bigwedge\Psi$ (Правило конјункције) ;

(F$_3$) $\varphi\to(\tau(x,\vec{y})\geq 0)\vdash\varphi\to\big(\int\tau(x,\vec{y})\,dx\geq 0\big)$, где x није слободно у φ (Генерализација) .

Нека је T пребројив и конзистентан скуп реченица из $L_{\mathbb{A}\int}$. Најпре се помоћу Хенкинове конструкције добија слаб интегрални модел $(\mathfrak{A},I)$ за T, где је $\mathfrak{A}$ модел првог реда, а I је $\mathbb{A}$-Данијелов интеграл на $\mathfrak{A}$; тј. I је функција на скупу термова из $L_{\mathbb{A}\int}$ са највише једном слободном промењљивом и параметрима из A, тако да је:

(1) $I(r)=r$;

(2) $I(r\cdot\sigma+s\cdot\tau)=r\cdot I(\sigma)+s\cdot I(\tau)$;

(3) ако је $\tau^{\mathfrak{A}}(b,\vec{a})\geq 0$ за свако $b\in A$, онда је и $I(\tau(x,\vec{a}))\geq 0$.

Рекурзивна дефиниција за $\tau(\vec{a})^{(\mathfrak{A},I)}$ је иста као и за уобичајену вероватносну структуру, изузев услова за интеграл

$$\left(\int\tau(x,\vec{a})\,dx\right)^{(\mathfrak{A},I)}=I(\tau(x,\vec{a})).$$

Од слабог интегралног модела, преласком на нестандардни универзум, добија се интернална слаба интегрална структура $({}^*\mathfrak{A},{}^*I)$.

Лебова конструкција Данијеловог интеграла (видети поглавље 1) даје вероватносну меру μ на ${}^*A$, тако да за сваки терм $\tau(x)$ са параметрима из ${}^*A$, стандардни део од ${}^*I(\tau)$ је интеграл стандардног дела од $\tau^{{}^*\mathfrak{A}}$ у односу на меру μ.

На сличан начин конструишу се вероватносне мере μ_n на ${}^*A^n$ коришћењем итерираних интеграла. На крају, аксиома (E$_7$) је задовољена скоро свуда у градираном моделу $({}^*\mathfrak{A},\mu_n)$, тако да на сличан начин као у логици $L_{\mathbb{A}P}$, добијамо вероватносни модел за T.

Теорема 5.2.4. *Пребројив скуп реченица из $L_{\mathbb{A}\int}$ има вероватносни модел ако и само ако је конзистентан.*

5.3. Теорема комплетности за вероватносне моделе са коначно вредносним мерама у логици са интегралима $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$

У наредном излагању радићемо са мерама чији ће скупови вредности бити коначни. С друге стране, постоје многе структуре чији подскупови могу бити врло занимљиви као скупови вредности мера, односно погодни за изражавање вероватноћа. Поред стандардног примера архимедског поља рационалних бројева $\mathbb{Q}$, тј. интервала $[0,1]_{\mathbb{Q}}$, важан је и пример неархимедског поља, као што је, рецимо, $\mathbb{Q}[\varepsilon]$, тј. најмањег поља које се добија додавањем једне позитивне инфинитезимале ε пољу рационалних бројева. Такође су интересантни и примери производа уређених поља, који су уређени прстени, као што су $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^n$ итд. Ови примери оправдавају важност рангова мера, а ми ћемо у овом поглављу издвојити оне чији су рангови коначни скупови реалних бројева из интервала $[0,1]$.

На самом почетку издвојићемо интересантну теорему на којој ће бити утемељена аксиоматизација логике $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$.

Теорема 5.3.1. *Нека је $\mathcal{F}$ поље подскупова скупа Ω. Мера μ је коначно вредносна вероватносна мера на $\mathcal{F}$ ако и само ако постоји реалан број $c>0$ такав да је $\mu(A)>c$ кад год је $A\in\mathbb{F}$ и $\mu(A)>0$.*

Будући да су, на неки начин, мере у логици $L_{\mathbb{A}P}$ експлицитније изражене у синтакси, ово својство мере може бити добијено помоћу аксиоме

$$(FV)_P \qquad \bigvee_{c\in\mathbb{Q}^+}\bigwedge_{\varphi\in\Phi_n}((P\vec{x}>0)\varphi(\vec{x})\rightarrow(P\vec{x}>c)\varphi(\vec{x})),$$

где је $\Phi_n\in\mathbb{A}$ и $\Phi_n=\{\varphi\mid\varphi \text{ има } n \text{ слободних променљивих}\}$ (видети [15]). За налажење аксиоме која ће имплицирати исто својство мера у логици $L_{\mathbb{A}\int}$, искоришћен је следећи резултат: индукцијом по сложености терма може се доказати да за сваки терм $\tau(\vec{x})$ из $L_{\mathbb{A}\int}$ и за свако $r\in\mathbb{R}\cap\mathbb{A}$ постоји формула $\varphi_{\tau,r}$ из $L_{\mathbb{A}P}$ тако да је у свакој вероватносној структури $(\mathfrak{A},\mu)$ за свако $\vec{a}\in A^n$ испуњено следеће:

$$\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a})>r \qquad \text{акко} \qquad \mathfrak{A}\models\varphi_{\tau,r}[\vec{a}], \qquad \text{(видети [44])}.$$

Штавише, логике $L_{\mathbb{A}P}$ и $L_{\mathbb{A}\int}$ су еквивалентне (видети [27]) што омогућава да сваку теорему логике $L_{\mathbb{A}P}$ можемо конвертовати у сличну теорему логике $L_{\mathbb{A}\int}$, и обратно.

Нека је $\mathbb{A}$ пребројив допустив скуп такав да је $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{HC}$ и $\omega\in\mathbb{A}$ и нека је L Σ-дефинабилан скуп симбола релација и константи, који има пребројиво много променљивих $v_1,v_2,\ldots$, n-арне везнике $\mathbb{F}$ за сваку непрекидну функцију $F\colon\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$, $n\geq 0$ и $F\restriction_{\mathbb{Q}^n}\in\mathbb{A}$ и квантификаторе $\int\ldots dx$. Логика $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је слична логици $L_{\mathbb{A}\int}$; листи аксиома логике $L_{\mathbb{A}\int}$ је додата аксиома која је у ствари транслација аксиоме $(FV)_P$ у $L_{\mathbb{A}\int}$:

$$(FV)_{\int} \qquad \bigvee_{c\in\mathbb{Q}^+}\bigwedge_{\tau\in D}\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}}\bigvee_{k}\Big[\int\mathbb{F}_{k,r}(\tau(\vec{x}))\,d\vec{x}>0\rightarrow\int\mathbb{F}_{k,r}(\tau(\vec{x}))\,d\vec{x}>c\Big],$$

где је $F_{k,r}(a)=\begin{cases}1, & \text{ако је } a\geq r,\\ 0, & \text{ако је } a\leq r-\frac{1}{k},\\ \text{линеарно}, & \text{иначе,}\end{cases}$

и D је скуп термова са коначно много слободних променљивих и $D\in\mathbb{A}$. Како конјункција у претходној аксиоми може да се посматра само преко елемената допустивог скупа $\mathbb{A}$, тј. $\bigwedge\limits_{\tau\in D}$ где $D\in\mathbb{A}$, применићемо конструкцију средњег модела (видети поглавље 4).

Вероватносна структура за $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је структура $(\mathfrak{A},\mu)$ тако да је $\mathfrak{A}$ структура првог реда и μ је вероватносна мера на A таква да је сваки синглтон мерљив, свака релација $R_i^{\mathfrak{A}}$ је $\mu^{(n_i)}$-мерљива и μ је коначно вредносна вероватносна мера. Градиран модел је дефинисан као у логици $L_{\mathbb{A}P}$ уз додатни услов да су мере μ_n коначно вредносне.

Доказаћемо да је ова аксиоматизација комплетна за Σ_1-дефинабилне теорије у односу на класу вероватносних модела са коначно вредносним мерама, комбинујући Хенкинову конструкцију и конструкцију средњег модела. Увешћемо две врсте помоћних структура, тј. дефинисаћемо слаб и средњи модел.

Дефиниција 5.3.2. (i) Слаб модел логике $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је структура $(\mathfrak{A},I)$, где је $\mathfrak{A}$ структура првог реда за језик L и I је позитивна реална функција дефинисана на скупу термова са највише једном слободном променљивом x и параметрима из A.

(ii) Средњи модел у $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је слаб модел $(\mathfrak{A},I)$, такав да аксиома $(FV)_\int$ важи униформно за сваки терм τ, тј. постоји $c\in\mathbb{Q}^+$ тако да за сваки терм τ и $\vec{a}\in A^n$, и за свако $r\in\mathbb{Q}$, постоји k,

ако $\quad I(\mathbb{F}_{k,r}(\tau(x,\vec{a})))>0,\quad$ онда $\quad I(\mathbb{F}_{k,r}(\tau(x,\vec{a})))>c\quad$ где је

$$F_{k,r}(a)=\begin{cases}1, & \text{ако је } a\geq r\,,\\ 0, & \text{ако је } a\leq r-\frac{1}{k}\,,\\ \text{линеарно}, & \text{иначе}\,.\end{cases}$$

У оба случаја, за терм τ дефинишемо $\tau^{\mathfrak{A}}$ индуктивно као за вероватносне моделе, изузев случаја за интеграл $\left(\int\tau(x,\vec{y})\,dx\right)^{\mathfrak{A}}(\vec{a})=I(\tau(x,\vec{a}))$.

Помоћу Хенкинове конструкције, слично као у претходном поглављу, доказујемо да је Σ_1-дефинабилна теорија у $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ конзистентна ако и само ако има слаб модел у коме важи свака теорема логике $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$. Нека је $C\in\mathbb{A}$ скуп нових симбола константи уведен Хенкиновом конструкцијом и нека је $K=L\cup C$.

Конструкција средњег модела из слабог модела је кључни део доказа главног резултата и изложићемо је следећом теоремом.

Теорема 5.3.3 (Средња комплетност). *Σ_1-дефинабилна теорија T из $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је конзистентна ако и само ако има средњи модел у коме важи свака теорема из $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$.*

Доказ. Уведимо језик M који има четири врсте променљивих: $X,Y,Z,\ldots$ променљиве за скупове, $x,y,z,\ldots$ променљиве за урелементе, $r,s,t,\ldots$ за реалне бројеве и $P,Q,R,\ldots$ променљиве за терме који представљају функције $A^n\to\mathbb{R}$, $n\geq 0$. Предикати су $\leq$ за реалне бројеве, $E_n^s(\vec{x},X)(n\geq 1$ и $\vec{x}=x_1,\ldots,x_n)$ за скупове, $E_{n+1}^t(\vec{x},r,T)$, $n\geq 0$ (са значењем $T(x_1,\ldots,x_n)=r$), и $I(T,r)$ ($T\colon A^0\to\mathbb{R}$ или $T\colon A^1\to\mathbb{R}$ и $I(T)=r$ акко $I(T,r)$). Функцијски симболи су $+,\cdot$ и скуп функцијских симбола $\mathbb{F}$ за терме и реалне бројеве, тако да је

$F \in \mathbb{C}_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^n)$. Симболи константи су X_φ за сваку формулу φ из $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$, T_τ за сваки терм τ и $\bar{r}$ за сваки реалан број $r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{A}$.

Нека је S теорија из $M_{\mathbb{A}}$, која садржи следећу листу формула:

1. Аксиоме добре дефинисаности
   (а) $(\forall X) \bigwedge\limits_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y})(E^s_m(\vec{x}, \vec{y}, X) \wedge E^s_n(\vec{x}, X))$ где је $\{\vec{x}\} \cap \{\vec{y}\} = \varnothing$,
   (б) $(\forall T) \bigwedge\limits_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y}, r, s)(E^t_{m+1}(\vec{x}, \vec{y}, r, T) \wedge E^t_{n+1}(\vec{x}, s, T))$,
   (в) $(\forall T)(\forall \vec{x}, r, s)((E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T) \wedge E^t_{n+1}(\vec{x}, s, T)) \to r = s)$.
2. Аксиоме екстензионалности
   (а) $(\forall \vec{x})((E^s_n(\vec{x}, X) \longleftrightarrow E^s_n(\vec{x}, Y)) \longleftrightarrow X = Y)$,
   (б) $(\forall \vec{x}, r)((E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T) \longleftrightarrow E^t_{n+1}(\vec{x}, r, S)) \longleftrightarrow T = S)$.
3. Аксиоме за терме
   (а) $(\forall x, y)\,[E^t_{2+1}(x, y, 0, T_{\mathbb{1}(x=y)}) \vee E^t_{2+1}(x, y, 1, T_{\mathbb{1}(x=y)})]$,
   (б) $(\forall \vec{x})\,[E^t_{n+1}(\vec{x}, 0, T_{\mathbb{1}(R(\vec{x}))}) \vee E^t_{n+1}(\vec{x}, 1, T_{\mathbb{1}(R(\vec{x}))})]$,
   (в) $E^t_{0+1}(\bar{r}, T_\tau)$ где је τ облика r,
   (г) $(\forall \vec{x})\,\big[E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T_\tau) \longleftrightarrow (\exists P)\big((\forall y, s)(E^t_{1+1}(y, s, P) \longleftrightarrow E^t_{n+1+1}(\vec{x}, y, s, T_\sigma)) \wedge I(P, r)\big)\big]$,
   где је τ облика $\int \sigma(\vec{x}, y)\,dy$,
   (д) $(\forall \vec{x})\,\big[E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T_{\mathbb{F}(\tau_1,\ldots,\tau_k)}) \longleftrightarrow \big(\bigwedge\limits_{i=1}^{k} E^t_{n+1}(\vec{x}, r_i, T_{\tau_i}) \wedge r = \mathbb{F}(r_1, \ldots, r_k)\big)\big]$.
4. Аксиоме задовољења
   (а) $(\forall \vec{x})(E^s_n(\vec{x}, T_{\tau \geq 0}) \longleftrightarrow E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T_\tau) \wedge r \geq 0)$,
   (б) $(\forall \vec{x})(E^s_n(\vec{x}, X_{\neg\varphi}) \longleftrightarrow \neg E^s_n(\vec{x}, X_\varphi)$,
   (в) $(\forall \vec{x})(E^s_n(\vec{x}, X_{\wedge\varphi}) \longleftrightarrow \bigwedge_\varphi E^s_n(\vec{x}, X_\varphi)$.
5. Аксиоме за интегрални оператор I
   (а) $(\forall T)\,\big(\bigwedge_{n\leq 2} \neg(\exists \vec{x}, r) E^t_{n+1}(\vec{x}, r, T) \longleftrightarrow (\exists_1 s) I(T, s)\big)$,
   (б) $(\forall r)\, I(T_r, r)$,
   (в) $(\forall S, T, r, s)\,(I(r \cdot T + s \cdot S) = r \cdot I(T) + s \cdot I(S))$,
   (г) $(\forall T)\,\big((\forall x)\,(\exists r \geq 0)\, E^t_{1+1}(x, r, T) \to (\exists s \geq 0)\, I(T, s)\big)$.
6. Аксиома за коначни ранг мере
   $(\exists c)(\forall T) \bigwedge\limits_{r\in\mathbb{Q}} \bigvee\limits_{k} (I(\mathbb{F}_{k,r}(T) > 0) \to I(\mathbb{F}_{k,r}(T) > c))$
   $$\text{где је } F_{k,r}(a) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } a \geq r, \\ 0, & \text{ако је } a \leq r - \frac{1}{k}, \\ \text{линеарно}, & \text{иначе}, \end{cases}$$
7. Аксиома за архимедовско поље и све теореме теорије поља реалних бројева
8. Аксиоме које су трансформација аксиома логике $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$
   $(\forall \vec{x}) E^s_n(\vec{x}, X_\varphi)$.
9. Аксиоме реализације свих реченица φ из T
   $(\forall x)\, E^s_1(x, X_\varphi)$.

Слаба структура $(\mathfrak{A}, I)$ може бити трансформисана у стандардну структуру $\mathcal{B} = (B, P, Q, F, E^{s\,\mathcal{B}}_n, E^{t\,\mathcal{B}}_{n+1}, I^{\mathcal{B}}, \leq, +, \cdot, \mathbb{F}_n, X^{\mathcal{B}}_\varphi, T^{\mathcal{B}}_\tau, \bar{r})$ за $M_{\mathbb{A}}$ где је $B = A$, $P \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{P}(A^n)$, $Q \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{P}(A^n \times \mathbb{R})$, $F \subseteq \mathbb{R}$ је поље, $X^{\mathcal{B}}_\varphi \in P$ за формулу φ и $T^{\mathcal{B}}_\tau \in Q$ за терм τ. Узећемо да је $X^{\mathcal{B}}_\varphi = \{\vec{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]\}$, $P = \left\{X^{\mathcal{B}}_\varphi \mid \varphi \in K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}\right\}$, $T^{\mathcal{B}}_\tau(\vec{a}) = \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ за $\vec{a} \in A^n$, $Q = \left\{T^{\mathcal{B}}_\tau \mid \tau \text{ је терм из } K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}\right\}$ и $I^{\mathcal{B}}_k(T^{\mathcal{B}}_\tau) = I(\tau)$ за терм τ са највише једном слободном променљивом. Теорија S је Σ_1 дефинабилна на $\mathbb{A}$ и $S_0 \subseteq S$, $S_0 \in \mathbb{A}$ има стандардни модел зато што аксиома $(FV)_\int$ важи у слабом моделу. На основу Барвајзове компактности (видети [4]) следи да S има стандардни модел $\mathcal{B}$ који може бити трансформисан у средњи модел $\overline{\mathcal{B}}$ теорије T стављањем да је:

$$\tau^{\mathcal{B}}(\vec{x}) = r \quad \text{акко} \quad E^{t^{\mathcal{B}}}_{m+1}(\vec{x}, 1, T_\tau) \quad (R^{\overline{\mathcal{B}}}(\vec{a}) \text{ важи акко } E^{t^{\mathcal{B}}}_{m+1}(\vec{a}, r, T_{\mathbb{1}(R(\vec{x}))})) \quad \text{и}$$
$$I^{\overline{\mathcal{B}}}(\tau(\vec{a}, y)) = I^{\mathcal{B}}(T_{\tau(\vec{a}, y)}) \quad \text{за } \vec{a} \in \mathcal{B}^n.$$

Овим је доказ комплетиран. □

Сада ћемо доказати теорему комплетности за логику $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$. Као и у доказу комплетности за логику $L_{\mathbb{A}\int}$, биће коришћена Лебова конструкција која одговара Данијеловом интегралу (видети поглавље 1).

Теорема 5.3.4 (Теорема комплетности за $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$)**.** *$\Sigma_1$-дефинабилна теорија T из $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ је конзистентна ако и само ако T има вероватносни модел са коначно вредносном мером.*

Доказ. Сагласност је једноставно доказати. Да бисмо доказали тежи део, нека је C пребројив скуп нових симбола константи. Користимо Хенкинову конструкцију да добијемо максимално конзистентан скуп Φ реченица из $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$, где је $K = L \cup C$, тако да је:

(1) ако је $\Gamma \subseteq \Phi$, и $\bigwedge \Gamma \in K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$, онда је $\bigwedge \Gamma \in \Phi$,

(2) ако је $\left(\int \tau(x)\,dx > 0\right) \in \Phi$, онда $(\tau(c) > 0) \in \Phi$, за неко $c \in C$.

Како је теорија Φ комплетна и садржи све аксиоме логике $K^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$, она индукује слабу структуру $(\mathfrak{A}, I)$ са универзумом $A = C$, тако да свака реченица из Φ важи у моделу $(\mathfrak{A}, I)$.

Следећи корак је конструкција средњег модела за теорију T из $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$. На основу теореме 5.3.3 добијамо средњи модел у коме важи аксиома $(FV)_\int$ униформно за сваки терм τ. Преласком на ω_1-засићени нестандардни универзум формирамо интернални средњи интегрални модел $({}^*\mathfrak{A}, {}^*I)$. Лебова конструкција даје вероватносну меру μ на ${}^*A$ тако да за сваки терм $\tau(x)$ са параметрима из ${}^*A$, стандардни део од ${}^*I(\tau)$ је интеграл стандардног дела од $\tau^{{}^*\mathfrak{A}}$ у односу на μ. Мере μ_n конструишемо као у случају градираног модела за логику $L_{\mathbb{A}\int}$. Из Лебове конструкције и аксиоме $(FV)_\int$ закључујемо да ће мере μ_n имати коначне рангове. На основу аксиоме (E_7) (видети [27]) коначно добијамо вероватносни модел $(\mathcal{B}, \mu)$ за T, где је $\mathcal{B} = {}^*\mathfrak{A}$ и $\mu = \mu_1$. □

На потпуно исти начин се може доказати исти резултат и за логику $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$, која је настала додавањем аксиоме $(FV)_P$ листи аксиома логике $L_{\mathbb{A}P}$.

Слаб и средњи модел су дефинисани на следећи начин.

Дефиниција 5.3.5. (i) Слаба структура за $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ је структура $(\mathfrak{A}, \mu_n)$ таква да је свака μ_n коначно адитивна вероватносна мера на A^n, сваки синглтон је мерљив и скуп $\{\vec{b} \in A^n \mid (\mathfrak{A}, \mu_n) \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\}$ је μ_n-мерљив за сваку формулу $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ и $\vec{a} \in A^m$.

(ii) Средња структура за $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ је слаба структура $(\mathfrak{A}, \mu_n)$, таква да важи следеће: постоји $c > 0$ тако да је за сваку формулу $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ и свако $\vec{a} \in A^m$, ако је $\mu_n(\varphi_{\vec{a}}) > 0$, онда је $\mu_n(\varphi_{\vec{a}}) > c$, где је $\varphi_{\vec{a}} = \{\vec{b} \in A^n \mid (\mathfrak{A}, \mu_n) \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\}$.

Вероватносна структура $(\mathfrak{A}, \mu)$, где је μ коначно вредносна вероватносна мера, не може бити аксиоматизована тако да проширена теорема комплетности важи.

Следећи пример пребројиве конзистентне теорије T у $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ нема вероватносни модел са коначно вредносном мером (видети [46]).

Пример 5.3.6. Нека је $\{R_1(x), R_2(x), \ldots\}$ Δ_1-дефинабилан скуп који није подскуп неког елемента скупа $\mathbb{A}$, и нека је $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ набрајање свих формула из $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$, и нека је $S_n(x)$ први предикат који није међу формулама $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Уколико такав предикат не би постојао, онда би важило $L \subseteq TC(\varphi_1) \cup \ldots \cup TC(\varphi_n) \in \mathbb{A}$ и према томе $L \in \mathbb{A}$ као Δ_1-дефинабилан, што је контрадикција у односу на претпоставку за језик L. Очигледно је да пребројива теорија $T = \{(Pxy \geq 1)x \neq y\} \cup \{(Px > 0)(S_1(x) \wedge \cdots \wedge S_n(x)) \mid n \in \omega\} \cup \{(Px < \frac{1}{2^n})S_n(x) \mid n \in \omega\}$ нема вероватносни модел са коначно вредносном мером. Остаје да се докаже да је T конзистентно у $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$. Нека је A јединични интервал $[0,1]$ и нека је μ Лебегова мера на $[0,1]$. За скупове $B_n = [0, \frac{1}{2^{n+1}})$ имамо да је $0 < \mu(B_n) < \frac{1}{2^n}$. Нека је $A^{i_1,\ldots,i_k}_{n_1,\ldots,n_k} = B^{i_1}_{n_1} \cap \cdots \cap B^{i_k}_{n_k}$ Булов атом, где је $B^i_n = B_n$ за $i = 1$ и $B^i_n = A \setminus B_n$ за $i = -1$.

Интерпретираћемо предикате узимајући да је

$$R_n^{(\mathfrak{A},\mu)} = \begin{cases} B_n, & \text{ако је } R_n = S_m \text{ за неко } m, \\ B_1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будући да се само коначно много предиката $S_n(x)$ могу појавити у неком елементу скупа $\mathbb{A}$, следи да је скуп $\left\{A^{i_1,\ldots,i_k}_{n_1,\ldots,n_k} \mid \mu\big(A^{i_1,\ldots,i_k}_{n_1,\ldots,n_k}\big) > 0\right\}$ коначан. Теорија T, као и све аксиоме логике $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$ су задовољене, изузев евентуално аксиоме $(FV)_P$. Међутим, како је за $c = \min\left\{\mu\big(A^{i_1,\ldots,i_k}_{n_1,\ldots,n_k}\big) \mid \mu\big(A^{i_1,\ldots,i_k}_{n_1,\ldots,n_k}\big) > 0\right\}$ задовољена и ова аксиома, закључује се да је T конзистентно у $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}P}$.

5.4. Двовероватносне логике

Апсолутно непрекидни двовероватносни простор је структура $(A, \mathcal{F}, \mu_1, \mu_2)$ са две вероватносне мере μ_1 и μ_2 на A дефинисане на истој σ-алгебри $\mathcal{F}$ мерљивих скупова који задовољавају следећи услов: за сваки $B \in \mathcal{F}$, ако је $\mu_2(B) = 0$, онда је $\mu_1(B) = 0$. Мера μ_1 је апсолутно непрекидна у односу на μ_2, у ознаци $\mu_1 \ll \mu_2$, уколико је испуњено да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваки $B \in \mathcal{F}$, ако је $\mu_2(B) < \delta$, онда је $\mu_1(B) < \varepsilon$.

Предмет нашег проучавања ће бити структуре са две мере које се налазе у апсолутно непрекидном односу. Логике погодне за проучавање структура са две мере, које су у сингуларном односу (видети [44]), дате су у [17], [44].

5.4.1. Логика $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$

Нека је $\mathbb{A}$ пребројив допустив скуп $\omega \in \mathbb{A}$. Логика $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ је слична стандардној вероватносној логици, разлика је у томе што се квантификација у логици $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ врши у односу на две мере μ_1 и μ_2, тј. постоје две врсте квантификатора $(P_1\vec{x} \geq r)$ и $(P_2\vec{x} \geq r)$.

Апсолутно непрекидни двовероватносни модел за L је структура $(\mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2)$ где је $\mathfrak{A}$ класична структура без операција за $L = \{R_i, c_j \mid i \in I, j \in J\}$ и μ_1 и μ_2 су вероватносне мере такве да важи $\mu_1 \ll \mu_2$.

Релација задовољења је дефинисана рекурзивно као у случају $L_{\mathbb{A}P}$ и квантификатори су интерпретирани на уобичајен начин; $(\mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2) \models (P_i\vec{x} \geq r)\varphi[\vec{x}, \vec{y}][\vec{c}]$ акко $\mu_i^{(n)}\{\vec{a} \in A^n \mid (\mathfrak{A}, \mu_1, \mu_2) \models \varphi[\vec{a}, \vec{c}]\} \geq r$.

Аксиоме, и правила извођења, су све аксиоме као у логици $L_{\mathbb{A}P}$, које допуштају да квантификатори P_1 и P_2 играју улогу квантификатора P, заједно са следећим аксиомама:

(U$_1$) Аксиоме непрекидности вероватносних квантификатора

(i) $\bigwedge_n \bigvee_m (P_i\vec{y} < \frac{1}{n})(P_j\vec{x} \in [r - \frac{1}{m}, r))\varphi(\vec{x},\vec{y})$, $i, j = 1, 2$,

(ii) $\bigwedge_n \bigvee_m (P_i\vec{y} < \frac{1}{n})(P_j\vec{x} \in (r, r + \frac{1}{m}])\varphi(\vec{x},\vec{y})$.

(U$_2$) Аксиома апсолутне непрекидности

$$\bigwedge_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigvee_{\delta \in \mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n} \bigwedge_{\varphi \in \Phi_n} ((P_2\vec{x} < \delta)\varphi(\vec{x}) \to (P_1\vec{x} < \varepsilon)\varphi(\vec{x})),$$

где је $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$, $\Phi_n = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi$ има n слободних променљивих$\}$ и Φ, $\Phi_n \in \mathbb{A}$.

У циљу доказивања теореме комплетности логике $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ уведене су две врсте помоћних модела.

Дефиниција 5.4.1. (i) Слаб двовероватносни модел за $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ је структура $(\mathfrak{A}, \mu^1_n, \mu^2_n)$ тако да је свака μ^i_n коначно адитивна вероватносна мера на A^n, где је сваки синглтон мерљив и скуп $\{\vec{a} \in A^n \mid (\mathfrak{A}, \mu^1_n, \mu^2_n) \models \varphi[\vec{a}, \vec{c}]\}$ је μ^i_n-мерљив за сваку формулу $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ из $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ и $\vec{c}$ из A.

(ii) Средњи двовероватносни модел за $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ је слаб модел $(\mathfrak{A}, \mu^1_n, \mu^2_n)$ у ком аксиома апсолутне непрекидности важи униформно за сваку формулу φ, тј. за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да је за сваку формулу $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ из $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ и $\vec{c} \in A^m$ испуњено, ако је $\mu^2_n\{\vec{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{c}]\} < \delta$, онда је $\mu^1_n\{\vec{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{c}]\} < \varepsilon$.

С обзиром да све аксиоме представљају особине мера које се налазе у апсолутно непрекидном односу, теорема сагласности важи. Аксиоматизација је комплетна за Σ_1-дефинабилне теорије у односу на класу апсолутно непрекидних двовероватносних модела; у доказу је коришћена слаб-средњи-јак модел конструкција (видети [46]).

5.4.2. Логика $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$

Двовероватносна логика $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ са два типа интегралних оператора је уведена сличном конструкцијом из претходног одељка и представља екстензију логике $L_{\mathbb{A}\int}$ погодну за проучавање особина случајних променљивих у апсолутно непрекидном двовероватносном простору. Еквиваленција између логика $L_{\mathbb{A}P}$ и $L_{\mathbb{A}\int}$ је проширена и на двовероватносне логике $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ и $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$.

Апсолутно непрекидни двовероватносни модел за L је дефинисан као и за логику $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$. Релација задовољења је дефинисана рекурзивно као за логику $L_{\mathbb{A}\int}$, где су квантификатори $\underset{1}{\int}$ и $\underset{2}{\int}$ интерпретирани на уобичајен начин. Аксиоме су све аксиоме за $L_{\mathbb{A}\int}$, где квантификатори $\underset{1}{\int}$ и $\underset{2}{\int}$ играју улогу квантификатора $\int$ плус следеће аксиоме.

(V$_1$) Аксиоме непрекидности интегралних оператора $(i, j = 1, 2)$.

(а) $\bigwedge_n \bigvee_m \bigvee_k \int_i \mathbb{G}_k\big(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\big)\,d\vec{y} < \frac{1}{n}$,

$$\text{где је } G_k(a) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } r - \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \le a \le r - \frac{2}{k}, \\ 0, & \text{ако је } a \le r - \frac{1}{m} \text{ или } a \ge r - \frac{1}{k}, \\ \text{линеарно}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б) $\bigwedge_n \bigvee_m \bigvee_k \int_i \mathbb{H}_k\big(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\big)\,d\vec{y} < \frac{1}{n}$,

$$\text{где је } H_k(a) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } r + \frac{2}{k} \le a \le r + \frac{1}{m} - \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{ако је } a \le r + \frac{1}{k} \text{ или } a \ge r + \frac{1}{m}, \\ \text{линеарно}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ове аксиоме представљају транслацију аксиома (U_1) логике $L^a_{\mathbb{A}P_1P_2}$ (видети претходни одељак).

(V_2) Аксиома апсолутне непрекидности

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+}\bigwedge_{\tau\in D}\bigwedge_{r\in\mathbb{Q}}\bigvee_{k}\Big(\int_2 \mathbb{F}_{k,r}(\tau(\vec{x}))\,d\vec{x}<\delta\rightarrow\int_1 \mathbb{F}_{k,r}(\tau(\vec{x}))\,d\vec{x}<\varepsilon\Big)$$

где је $F_{k,r}(a)=\begin{cases}1, & \text{ако је } a\geq r,\\ 0, & \text{ако је } a\leq r-\frac{1}{k},\\ \text{линеарно}, & \text{иначе.}\end{cases}$

Слаб и средњи модел дефинисани су на следећи начин:

Дефиниција 5.4.2. (i) Слаб модел за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ је структура $(\mathfrak{A},I_1,I_2)$, где је $\mathfrak{A}$ структура првог реда и I_1,I_2 су позитивне линеарне функције дефинисане на скупу термова са највише једном слободном промењљивом x и параметрима из A. (I_1,I_2 су $\mathbb{A}$-Данијелови интеграли на $\mathfrak{A}$).

(ii) Средњи модел за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ је слаб модел $(\mathfrak{A},I_1,I_2)$ такав да је аксиома апсолутне непрекидности задовољена униформно за сваки терм $\tau(\vec{x})$, тј. за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, тако да за сваки терм $\tau(\vec{x})$ и $\vec{a}$ из A и за свако $r\in\mathbb{Q}$, постоји k тако да је задовољено: Уколико је $I_2(\mathbb{F}_{k,r}(\tau(x,\vec{a})))<\delta$, онда је $I_1(\mathbb{F}_{k,r}(\tau(x,\vec{a})))<\varepsilon$,

где је $F_{k,r}(a)=\begin{cases}1, & \text{ако је } a\geq r,\\ 0, & \text{ако је } a\leq r-\frac{1}{k},\\ \text{линеарно}, & \text{иначе.}\end{cases}$

За обе структуре, за терм τ, дефинишемо $\tau^{\mathfrak{A}}$ индуктивно као за вероватносне моделе, (слично као у логици $L_{\mathbb{A}\int}$) изузев услова за интеграле

$$\left(\int_i \tau(x,\vec{y})\,dx\right)^{\mathfrak{A}}(\vec{a})=I_i(\tau(x,\vec{a})),\ \text{ за } i=1,2.$$

За Σ_1-дефинабилну теорију T из $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ конструкција вероватносног модела је врло слична одговарајућој конструкцији у логици $L^{\text{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ (видети одељак 5.3).

Постоје и други примери двовероватносних логика са интегралима где се мере налазе у апсолутно непрекидном односу; у њиховим моделима фигуришу случајне променљиве. Тада се веза између мера може аксиоматизовати уз помоћ случајне променљиве која ће бити интерпретирана као Радон–Никодимов извод. Једна таква логика ће бити описана у поглављу 6. Интересантна је и двовероватносна логика са интегралима, описана у [13], где је доказана проширена комплетност.

6. Логике са операторима условног очекивања

6.1. Случајне променљиве и интеграли

Главни циљ је увођење случајних променљивих у логику $L_{\mathbb{A}\int}$, тако да добијена логика $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, која ће бити описана у овом поглављу, буде еквивалентна логици $L_{\mathbb{A}P}(\mathbb{R})$ са случајним променљивим, видети [27], [44]. За разлику од логике $L_{\mathbb{A}\int}$, где атомични терми могу узимати вредности из скупа $\{0,1\}$, у логици $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ са случајним променљивим, допуштено је да атомични терми могу имати вредности у скупу $\mathbb{R}$. Нека је L $\mathbb{A}$-рекурзиван скуп $\{X_i, c_j \mid i \in I, j \in J\}$ симбола случајних променљивих и симбола константи.

Дефиниција 6.1.1. Атомични терми логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ су $[X_i(\vec{x})\restriction_r]$ и $\mathbb{1}(x=y)$ где је $\vec{x}$ уређена n-торка променљивих или константи и $r \in \mathbb{Q}^+$. Скуп термова и формула из $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ је дефинисан као у случају логике $L_{\mathbb{A}\int}$. Структура са случајним променљивим је структура $\mathfrak{A} = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, c_j^{\mathfrak{A}}, \mu)$ која је већ описана у поглављу 5.

Дефиниција 6.1.2. Вредност $\tau(\vec{a})^{\mathfrak{A}}$ терма $\tau(\vec{x})$ логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ у структури са случајним променљивим $\mathfrak{A}$ је дефинисана као у $L_{\mathbb{A}\int}$, изузев следећег правила за атомичне терме:

$$[X_i(\vec{a})\restriction_r]^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} r, & \text{акко } X_i^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \geq r, \\ -r, & \text{акко } X_i^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \leq -r, \\ X_i^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Закључује се да $[X_i(\vec{a})\restriction_r]^{\mathfrak{A}}$ представља засек од $X_i(\vec{a})$, ограничен бројем r. Главни разлог засецања је да сваки терм буде интерпретиран као ограничена и, према томе, интеграбилна случајна променљива.

Аксиоме и правила извођења од $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ су иста као код логике $L_{\mathbb{A}\int}$ уз јединy разлику аксиома о термима. Тачније, аксиома „$\tau = 0 \vee \tau = 1$, за сваки атомични терм τ” из $L_{\mathbb{A}\int}$ је замењена следећом листом аксиома, где је $\vec{x}$ n-торка променљивих или константи.

(1) $\mathbb{1}(x=y)=0 \vee \mathbb{1}(x=y)=1$.

(2) $[X_i(\vec{x})\restriction_r] = \min\big(s, \max(-s, [X_i(\vec{x})\restriction_r])\big)$, где је $0 \leq s \leq r$.

(3) $\bigvee\limits_k (|[X_i(\vec{x})\restriction_{k+1}]| \leq k)$ ($X_i(\vec{x})$ је коначно).

(4) За свако $m \in N$, $\bigvee\limits_k \int |[X_i(\vec{x})\restriction_{k+1}] - [X_i(\vec{x})\restriction_k]| \, d\vec{x} \leq \frac{1}{m}$. (Вероватноћа да је $[X_i(\vec{x})] \geq k$ тежи нули кад $k \to \infty$).

Теорема 6.1.3 (Теорема сагласности и потпуности)**.** *Пребројив скуп Φ реченица логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ има модел акко је конзистентан.*

6.2. Условно очекивање

Дефиниција 6.2.1. Нека је $(A, \mathcal{S}, \mu)$ вероватносни простор и нека је $\mathcal{F}$ σ-подалгебра од $\mathcal{S}$ и нека је $g : A \to \mathbb{R}$ ограничена и мерљива функција. Условно очекивање од g у односу на алгебру $\mathcal{F}$ је $\mathcal{F}$-мерљива функција $h\colon A \to \mathbb{R}$ тако да важи $\int_B g\,d\mu = \int_B h\,d\mu$, за свако $B \in \mathcal{F}$. Уобичајена ознака је $h = E[g \mid \mathcal{F}]$ или $h(x) = E[g(\cdot) \mid \mathcal{F}](x)$.

Став 6.2.2. Условно очекивање $h(x) = E[g(\cdot) \mid \mathcal{F}](x)$ постоји и јединствено је у смислу да су било које две такве функције једнаке скоро свуда (са разликом на скупу мере нула).

Ово је последица Радон-Никодимове теореме (видети [36], [22]). У случају условног очекивања, h је Радон-Никодимов извод мере $\nu(B) = \int_B g\,d\mu$, за $B \in \mathcal{F}$ у односу на меру $\mu\restriction_{\mathcal{F}}$.

Логика $L_{\mathbb{A}E}$ је екстензија логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ настала додавањем новог оператора $E[\cdot \mid \cdot]$ чија је улога да се опишу многи основни појмови у теорији вероватноће, пре свега, појам условног очекивања случајне променљиве у односу на неку σ-алгебру.

Дефиниција 6.2.3. Скуп термова и формула логике $L_{\mathbb{A}E}$ је дефинисан као у случају за $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, изузев следећег правила за грађење термова: ако је $\tau(\vec{x}, y)$ терм, где y није у $\vec{x}$ и z је променљива, тада је $E[\tau(\vec{x}, y) \mid y](z)$ такође терм.

Појам слободног појављивања променљиве у терму τ логике $L_{\mathbb{A}E}$ се уводи индукцијом по сложености терма τ на исти начин као у логици $L_{\mathbb{A}\int}$, изузев случаја за термове са оператором условног очекивања. Променљива v је слободна у $E[\sigma(\vec{x}, y) \mid y](z)$ акко v је z или v није y и слободно је у σ. Затим је скуп слободних променљивих логике $L_{\mathbb{A}E}$ подељен на два дела: E-слободне и E-везане променљиве.

Дефиниција 6.2.4. (а) Променљива v је E-слободна у $[X_i(\vec{x})\restriction_r]$ акко v је у $\vec{x}$;

(б) v је E-слободна у $\mathbb{1}(x = y)$ акко v је x или v је y;

(в) v је E-слободна у $\mathbb{F}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ акко v је E-слободно у τ_i, за неко i;

(г) v је E-слободна у $\int \tau\,dx$ акко v није x и v је E-слободно у τ;

(д) v је E-слободна у $E[\tau(\vec{x}, y) \mid y](z)$ акко v није z и v је у $\vec{x} \cup \{y\}$;

(ђ) Променљива v је E-везана у τ акко v је слободна у τ и није E-слободна у τ.

У наставку ћемо видети да је интерпретација термова са операторима условног очекивања таква, да интерпретација преко E-слободних променљивих даје $\mathcal{F}$-мерљиву случајну променљиву, док интерпретација преко E-везаних даје случајну променљиву која није $\mathcal{F}$-мерљива.

Дефиниција 6.2.5. Модел са условним очекивањем за L је структура $\mathfrak{A} = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, \mu, \mathcal{F})$, где је μ вероватносна мера на A таква да је сваки синглтон мерљив, $\mathcal{F}$ је σ-алгебра μ-мерљивих скупова и случајна променљива $X_i^{\mathfrak{A}}\colon A^n \to \mathbb{R}$ је реално вредносна $\mu^{(n)} \mid \mathcal{B}$-мерљива функција, тј. за сваки Борелов подскуп B од $\mathbb{R}$, $(X_i^{\mathfrak{A}})^{-1}\,(B)$ је $\mu^{(n)}$-мерљив скуп.

Дефиниција 6.2.6. Интерпретација у структури са условним очекивањем $(\mathfrak{A}, \mu, \mathcal{F})$ је функција која сваком терму $\tau(x_1, \dots, x_n)$ из $L_{\mathbb{A}E}$ додељује функцију $\tau^{\mathfrak{A}}\colon A^n \to \mathbb{R}$ и дефинисана је као у случају за $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, уз услов за терм са оператором условног очекивања: $\big(E[\tau(\vec{x}, y) \mid y](z)\big)^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) = E[\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, y) \mid y](b)$ за свако $\vec{a} \in A^n$ и за μ-скоро све $b \in A$, где $E[\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, \cdot) \mid \mathcal{F}]\colon A \to \mathbb{R}$ представља условно очекивање за $\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, \cdot)\colon A \to \mathbb{R}$ у односу на алгебру $\mathcal{F}$.

С обзиром да су сви терми ограничени, може се дефинисати униформна граница $\|\tau\|$. При интерпретацији у произвољном моделу $\mathfrak{A}$, важиће $|\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a})| \le \|\tau\|$, за свако $\vec{a} \in A^n$.

Дефинише се индуктивно на следећи начин:

$$\|X_i(\vec{x})\restriction_r\| = r, \qquad \|\mathbb{1}(x=y)\| = 1, \qquad \|r\| = r,$$
$$\|\textstyle\int \tau\, dx\| = \|\tau\|, \qquad \|E[\tau \mid y](z)\| = \|\tau\|, \qquad \|\mathbb{F}(\tau_1,\dots,\tau_n)\| = \sup_{|s_i|\le\|\tau_i\|} |F(s_1,\dots,s_n)|.$$

Аксиоматски систем логике $L_{\mathbb{A}E}$ је добијен тако што су аксиомама логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ додате аксиоме које формализују дефиницију условног очекивања:

(5) $\quad E[\tau(\vec{x},y) \mid y](z) = E[\tau(\vec{x},u) \mid u](z)$ где се y и u не појављују у $\vec{x}$;

(6) $$\int E[\tau(\vec{x},y) \mid y](y)\cdot\sigma(y)\, dy = \int E[\tau(\vec{x},y) \mid y](y)\cdot E[\sigma(y) \mid y](y)\, dy\,.$$

Теорема 6.2.7 (Теорема сагласности и потпуности)**.** *Пребројиви скуū реченица лоīике $L_{\mathbb{A}E}$ има модел ако и само ако је конзисшенšан.*

Доказ. Нека је Φ конзистентан скуп $L_{\mathbb{A}E}$ реченица и нека је K језик настао додавањем нових симбола случајне променљиве $X_\tau(\vec{x})$ за сваки терм $\tau(\vec{x})$ из $L_{\mathbb{A}E}$ облика $E[\sigma(\vec{x},y) \mid y](z)$, језику L. Сваки такав терм је транслиран у атомични терм $[X_i(\vec{x},z)\restriction_n]$, где је $n \ge \|\tau\|$. Закључује се да сваки терм и реченица из $L_{\mathbb{A}E}$ имају своју транслацију у $K_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$. Нека је Ψ теорија у $K_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, која се састоји из свих транслација реченица из Φ, свих транслација теорема из $L_{\mathbb{A}E}$ и реченица $(P\vec{x} \ge 1)[X_\tau(\vec{x})\restriction_r] = [X_\tau(\vec{x})\restriction_s]$, $r,s \ge \|\tau\|$. Ψ је тада конзистентно у $K_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ и има модел са случајним променљивим $\mathfrak{A}$. Нека је $\mathcal{F}$ σ-алгебра на A генерисана скуповима $\{d \in A \mid X_\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},d) \ge r\}$, где је $\tau(\vec{x},z)$ облика $E[\sigma(\vec{x},y) \mid y](z)$ и $\vec{a}$ је из A. Редукт модела $\mathfrak{A}$ на језик L је модел са условним очекивањем за скуп реченица Φ. $\square$

Сличан концепт се може направити и за два или више оператора условних очекивања. Интересантан је случај са два оператора E_1 и E_2, где је једна σ-алгебра садржана у другој.

Теорема 6.2.8. *Нека је Φ ūребројив скуū реченица у $L_{\mathbb{A}E}$ са gва оūераšора условноī очекивања. Φ има модел $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, īgе је $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ако и само ако је Φ конзисшенšно у $L_{\mathbb{A}E}$ заједно са схема аксиомом*

$$E_1[\tau(\vec{x},y) \mid y] = E_2\left[E_1[\tau(\vec{x},y) \mid y] \mid y\right].$$

6.3. Двовероватносне логике са условним очекивањем

6.3.1. Двовероватносне логике са случајним променљивим и интегралима

Као што је већ описано у поглављу 5, апсолутно непрекидни двовероватносни модел је структура $(\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2)$, где је $\mathfrak{A}$ структура првог реда (без операција) и μ_1,μ_2 су две вероватносне мере у односу $\mu_1 \ll \mu_2$. Одговарајућа логика $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ је врло слична стандардној вероватносној логици $L_{\mathbb{A}P}$; две врсте квантификатора се користе, $P_i\vec{x} > r$, $i=1,2$, $r \in \mathbb{A}\cap[0,1]$, који су интерпретирани на уобичајен начин:

$$(\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2) \models (P_i\vec{x} > r)\varphi(\vec{x}) \quad \text{акко} \quad \mu_i\{\vec{a} \in A^n \mid (\mathfrak{A},\mu_1,\mu_2) \models \varphi[\vec{a}]\} > r,\ i=1,2.$$

Од аксиома и правила извођења за $L_{\mathbb{A}P_1P_2}$ издвојићемо аксиому која описује апсолутну непрекидност мера μ_1 и μ_2.

$$\bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\bigvee_{\delta\in\mathbb{Q}^+}\bigwedge_{n\in\omega}\bigwedge_{\varphi\in\Phi_n}\big((P_2\vec{x}<\delta)\varphi(\vec{x})\to(P_1\vec{x}<\varepsilon)\varphi(\vec{x})\big),$$

где је $\Phi=\bigcup_n\Phi_n$, $\Phi_n=\{\varphi\in\Phi\mid\varphi$ има $n+1$ слободних променљивих$\}$ и Φ, $\Phi_n\in\mathbb{A}$.

Двовероватносна логика $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ са два типа интегралних оператора је уведена на природан начин као екстензија логике $L_{\mathbb{A}\int}$, погодна за проучавање особина случајних променљивх у апсолутно непрекидном двовероватносном простору. У овом поглављу, модификоваћемо логику $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ додавањем нових атомичних термова који узимају вредности у $\mathbb{R}$, слично као у случају логике $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$. Добијена логика $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ представља основу на којој ће бити утемељена логика $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$.

Логички симболи логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ обухватају пребројиво много променљивих v_0, v_1, ...; везнике $\neg$ и $\wedge$; симболе функција f за свако $f\in\mathbb{C}_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^n)$, где је $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^n)$ скуп свих непрекидних функција $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $n\geq 0$, таквих да је $f\restriction\mathbb{Q}^n\in\mathbb{A}$; симбол једнакости =; и интегралне квантификаторе $\int\limits_1\dots dx$ и $\int\limits_2\dots dx$. С обзиром да су структуре са случајним променљивим од интереса за наше истраживање, користићемо језик $L=\{X\}\cup\{X_i\mid i\in I\}\cup\{c_j\mid j\in J\}$ са симболима случајних променљивих $X,X_i,i\in I$ и симболима константи $c_j,j\in J$. Претпоставимо да је $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{HC}$ и A је пребројив допустив скуп.

Дефиниција 6.3.1. Двовероватносни модел (апсолутно непрекидни) са случајним променљивим за L је структура облика $\mathfrak{A}=(A,X_i^{\mathfrak{A}},X^{\mathfrak{A}},\mu_1,\mu_2)$, где су μ_1,μ_2 вероватносне мере на A такве да је $\mu_1\ll\mu_2$ и сваки синглтон је мерљив, скуп $\{\vec{b}\in A^n\mid\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a},\vec{b}]\}$ је $\mu_i^{(n)}$ мерљив за сваку формулу $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ и $\vec{a}$ из A, $X_i^{\mathfrak{A}}\colon A^n\to\mathbb{R}$ је n-та случајна променљива, $X^{\mathfrak{A}}\colon A\to\mathbb{R}^+$ је Радон-Никодимов извод од μ_1 у односу на меру μ_2 и $c_j^{\mathfrak{A}}\in A$.

Дефинишимо сада скуп термова и формула логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$.

Дефиниција 6.3.2. Скуп термова за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ је најмањи скуп, тако да је:

(i) сваки атомични терм $\mathbb{1}(x=y)$ или $[Y(\vec{x})\restriction r]$, где је Y симбол случајне променљиве и $r\in\mathbb{Q}^+$, је терм;

(ii) сваки реални број $r\in\mathbb{A}$ је терм;

(iii) ако су $\tau_1,\dots,\tau_n$ терми и $f\in\mathbb{C}_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}^n)$, онда је $\mathrm{f}(\tau_1,\dots,\tau_\mathrm{n})$ терм;

(iv) ако је τ терм и x је променљива, онда је $\int\limits_i\tau\,dx$ терм, за $i=1,2$;

(v) ако је $\tau(\vec{x},y)$ терм и y није у $\vec{x}$, онда је $\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)$ терм, $r\in\mathbb{Q}$.

Дефиниција 6.3.3. Скуп формула логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ је најмањи скуп, тако да важи:

(i) свака атомична формула $\tau\geq 0$, за сваки терм τ, је формула;

(ii) ако је φ формула, онда је и $\neg\varphi$ формула;

(iii) ако је Φ скуп формула са коначно много слободних променљивих и $\Phi\in\mathbb{A}$, онда је и $\bigwedge\Phi$ формула.

Дефиниција 6.3.4. (a) Интерпретација за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ у двовероватносном моделу са случајним променљивим је дефинисана слично као у $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, уз додатне услове за нове терме:

(1) $$\Big[\int_i \tau(\vec{x},y)\,dy\Big]^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = \int_A \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},y)\,d\mu_i(y),\ \ i=1,2;$$

(2) $$[\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)]^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b) = \begin{cases} 1, & \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b)>r,\\ 0, & \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b)\le r. \end{cases},$$

(б) Релација задовољења $\mathfrak{A}\models\varphi[\vec{a}]$, за формулу $\varphi(\vec{x})$ и $\vec{a}\in A^n$, је дефинисана рекурзивно на исти начин као у логици $L_{\mathbb{A}}$ уз услов $\mathfrak{A}\models(\tau(\vec{x})\ge 0)[\vec{a}]$ акко $\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a})\ge 0$.

Као и у логици $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ и овде су атомични терми засечени, тако да су сви терми интерпретирани помоћу ограничене и интеграбилне случајне променљиве. Униформна граница терма $\|\tau\|$ је дефинисана као у $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, и очигледно је $\|\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)\|=1$. Аксиоме логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ су све аксиоме од $L_{\mathbb{A}\int}$, где интеграли $\int_1$ и $\int_2$ играју улогу интеграла $\int$, сем аксиоме за атомичне терме, која је, слично као у логици $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$, замењена следећом листом аксиома:

Терм аксиоме

(T_1) $[Y(\vec{x})\restriction_r]=\min\big(r,\max(-r[Y(\vec{x})\restriction_s])\big),\ 0\le r\le s;$

(T_2) $\bigvee_k |[Y(\vec{x})\restriction_{(k+1)}]|\le k;$

(T_3) $\bigvee_k \int_i |[Y(\vec{x})\restriction_{(k+1)}]-[Y(\vec{x})\restriction_k]|\,d\vec{x}\le \dfrac{1}{m}$, за свако $m\in\mathbb{N}$;

(T_4) $\bigwedge_r \big(\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)=1\vee \mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)=0\big),$

(где Y може бити X_i, $i\in I$ или X); заједно са:

Аксиоме непрекидности интегралних оператора $i,j=1,2$

(C_1) $$\bigwedge_n\bigvee_m\bigvee_k \int_i \mathrm{g}_k\Big(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\Big)\,d\vec{y}<\frac{1}{n},$$

где је $$g_k(a)=\begin{cases} 1, & \text{ако је } r-\frac{1}{m}+\frac{1}{k}\le a\le r-\frac{2}{k},\\ 0, & \text{ако је } a\le r-\frac{1}{m} \text{ или } a\ge r-\frac{1}{k},\\ \text{линеарно}, & \text{иначе;}\end{cases}$$

(C_2) $$\bigwedge_n\bigvee_m\bigvee_k \int_i \mathrm{h}_k\Big(\int_j \tau(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}\Big)\,d\vec{y}<\frac{1}{n},$$

где је $$h_k(a)=\begin{cases} 1, & \text{ако је } r+\frac{2}{k}\le a\le r+\frac{1}{m}-\frac{1}{k},\\ 0, & \text{ако је } a\le r+\frac{1}{k} \text{ или } a\ge r+\frac{1}{m},\\ \text{линеарно}, & \text{иначе;}\end{cases}$$

(I) $$\int_1\Big(\int_2 \tau\,dy\Big)\,dx=\int_2\Big(\int_1 \tau\,dx\Big)\,dy$$

Радон–Никодимова аксиома

$$\text{(RN)} \ \bigvee_k \bigwedge_{\tau\in D} \int_1 \tau(\vec{x},y)\,dy = \int_2 \tau(\vec{x},y)\cdot[X(y)\restriction k]\,dy,$$

где је D скуп термова са коначно много слободних промењивих и $D\in\mathbb{A}$.

Правила извођења за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ су:

(R$_1$) $\varphi, \varphi\to\psi \vdash \psi$ (модус поненс);

(R$_2$) $\{\varphi\to\psi \mid \psi\in\Psi\} \vdash \varphi\to\bigwedge\Psi$ (конјункција);

(R$_3$) $\varphi\to(\tau(\vec{x},y)\geq 0) \vdash \varphi\to\left(\int_k \tau(\vec{x},y)\,dy\geq 0\right)$, где y није слободно у φ (генерализација).

Теорема сагласности важи, с обзиром да све аксиоме представљају добро позната својства.

Теорема 6.3.5 (Теорема сагласности)**.** *Свака реченица логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ која има двовероватносни модел са случајним променљивим је конзистентна.*

Лако се може доказати да је ова аксиоматизација комплетна за Σ_1 дефинабилне теорије у односу на класу двовероватносних модела са случајним промењљивим, комбинујући технику својства конзистентности и слаб-средњи-јак модел конструкцију М. Рашковића у [46]. Иста техника биће примењена и за доказивање главног резултата у овом поглављу.

Теорема 6.3.6 (Теорема комплетности за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$)**.** *Нека је T скуп реченица из $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ који је Σ_1 дефинабилан на $\mathbb{A}$ и конзистентан са аксиомама логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$. Тада постоји двовероватносни модел са случајним променљивим за T.*

У конструкцији модела користе се две врсте уобичајених модела који се у случају логике $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ дефинишу на следећи начин:

Дефиниција 6.3.7. Слаб модел за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ је структура $\mathfrak{A}^W = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, X^{\mathfrak{A}}, I_1, I_2)$, где је I_k $(k=1,2)$ позитивна линеарна реална функција дефинисана на скупу термова са највише једном слободном промењљивом x и параметрима из A (I_k је $\mathbb{A}$-Данијелов интеграл).

У слабом моделу, дефинисаћемо интерпретацију $\tau^{\mathfrak{A}^w}$ терма τ индуктивно као за двовероватносне моделе, изузев случаја за терм са интегралом: $\left[\int_i \tau(\vec{x},y)\,dy\right]^{\mathfrak{A}^W}(\vec{a}) = I_i\left(\tau^{\mathfrak{A}^W}(\vec{a},y)\right)$, $i=1,2$.

Дефиниција 6.3.8. Средњи модел за $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ је структура $\mathfrak{A}^m = (A, X_i^{\mathfrak{A}}, X^{\mathfrak{A}}, I_1, I_2)$ која је слаб модел такав да Радон-Никодимова аксиома важи униформно за сваки терм τ, тј. постоји k тако да за сваки $\tau(\vec{x},y)$ и $\vec{a}\in A$ важи $I_1\left(\tau^{\mathfrak{A}^W}(\vec{a},y)\right) = I_2\left(\tau^{\mathfrak{A}^W}(\vec{a},y)\cdot[X(y)\restriction_k]^{\mathfrak{A}^W}\right)$.

Ове моделе ћемо користити и у доказу теореме комплетности за логику $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$.

6.3.2. Логика $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$

Логика $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ је настала додавањем два оператора условног очекивања E_1 и E_2 логици $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$.

Дефиниција 6.3.9. Структура са условним очекивањем за језик L је пар $(\mathfrak{A},\mathcal{F})$, где је $\mathfrak{A}$ двовероватносна структура са случајним променљивим и $\mathcal{F}$ је σ-алгебра подскупова од A таквих да је $\mathcal{F}\subseteq \mathrm{dom}(\mu_1)\cap\mathrm{dom}(\mu_2)$.

Оператори условног очекивања $E_1[\cdot\mid\cdot]$ и $E_2[\cdot\mid\cdot]$ су детерминисани на следећи начин: ако је $Y\colon A\to\mathbb{R}$ случајна променљива, дефинисаћемо $E_k[Y\mid\mathcal{F}]$ као условно очекивање од Y на σ-алгебри $\mathcal{F}$ у односу на меру μ_k, $k=1,2$.

Дефиниција 6.3.10. Скуп термова логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ је дефинисан истим правилима за грађење термова као у логици $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$, уз додатак правила са оператором условног очекивања:

(vi) ако је $\tau(\vec{x},y)$ терм, где y није у $\vec{x}$ и z је променљива, онда је $E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](z)$ терм у коме је појављивање променљиве y везано и појављивање променљиве z слободно, за $i=1,2$.

У даљем раду користићемо скраћеницу $E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y]$ за $E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)$, па је према томе, y слободна променљива у $E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y]$.

Дефиниција 6.3.11. Интерпретација за логику $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ у двовероватносној структури са условним очекивањем $(\mathfrak{A},\mathcal{F})$ је дефинисана као за логику $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$, са додатим следећим условом:

$$\big(E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](z)\big)^{\mathfrak{A}}(\vec{a},b)=E_i[\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},\cdot)\mid\mathcal{F}](b),$$

за свако $\vec{a}\in A^n$ и μ_i-скоро све $b\in A$, где $E_i[\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},\cdot)\mid\mathcal{F}]\colon A\to\mathbb{R}$ представља условно очекивање од $\tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},\cdot)\colon A\to\mathbb{R}$ у односу на $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F}$-мерљиву функцију $g\colon A\to\mathbb{R}$, такву да важи:

$$\int\limits_B \tau^{\mathfrak{A}}(\vec{a},\cdot)\,d\mu_i=\int\limits_B g\,d\mu_i,\ \text{за свако } B\in\mathcal{F}.$$

Ставимо да је $\|E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](z)\|=\|\tau\|$.

Логика $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ има све схема аксиоме и правила извођења као и логика $L^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$, изузев аксиоме (RN), која је замењена следећим схема аксиомама:

(E$_1$) $E_k[\tau(\vec{x},y)\mid y](z)=E_k[\tau(\vec{x},u)\mid u](z)$, где y и u се не појављују у $\vec{x}$;

(E$_2$) $\int\limits_k E_k[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)\sigma(y)\,dy=\int\limits_k E_k[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)E_k[\sigma(y)\mid y](y)\,dy$;

(E$_3$) $E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)=E_j[E_i[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)\mid y](y)$, $i,j=1,2$;

(E$_4$) $\bigvee\limits_k\bigwedge\limits_{\tau\in D}\int\limits_1 E_1[\tau(\vec{x},y)\mid y](y)\,dy=\int\limits_2 E_2[\tau(\vec{x},y)\cdot[X(y)\restriction_k]\mid y](y)\,dy$, где је D скуп термова са коначно много слободних променљивих и $D\in\mathbb{A}$.

Напомена 6.3.12. Чињеница да су условна очекивања у односу на мере μ_1 и μ_2 дефинисана над истом σ-подалгебром $\mathcal{F}$ имплицира интересантну релацију између њих и дата је следећом лемом. У почетку истраживања очекивано је да ће лема 6.3.13 бити искоришћена у аксиоматизацији логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$. С обзиром да није добијен погодан резултат, аксиома (E$_4$) је уврштена у систем аксиома.

Лема 6.3.13. *Нека је $\mathcal{S}$ σ-алгебра мерљивих подскупова од A, и μ_1 и μ_2 су мере на $\mathcal{S}$, такве да важи $\mu_1 \ll \mu_2$. Ако је $\mathcal{F}$ σ-подалгебра од $\mathcal{S}$ и $E_k[Y \mid \mathcal{F}]$ је условно очекивање случајне променљиве $Y\colon A \to \mathbb{R}$ у односу на меру μ_k, $k = 1,2$, онда је*

$$E_1[Y \mid \mathcal{F}] \cdot E_2[X \mid \mathcal{F}] = E_2[YX \mid \mathcal{F}],$$

где је X Радон-Никодимов извод од μ_1 у односу на μ_2.

Доказ. Најпре, имамо да је $\int\limits_E Y\,d\mu_1 = \int\limits_E YX\,d\mu_2$, где $E \in \mathcal{F}$. Према томе, можемо закључити да је $\int\limits_E E_1[Y \mid \mathcal{F}]\,d\mu_1 = \int\limits_E E_2[YX \mid \mathcal{F}]\,d\mu_2$. Преласком на једну меру можемо елиминисати интеграл на следећи начин. Како је $\int\limits_E E_1[Y \mid \mathcal{F}]X\,d\mu_2 = \int\limits_E E_2[YX \mid \mathcal{F}]\,d\mu_2$ и функција $E_2[YX \mid \mathcal{F}]$ је $\mathcal{F}$-мерљива, док $E_1[Y \mid \mathcal{F}]X$ није нужно $\mathcal{F}$-мерљива, закључујемо да важи $E_2[E_1[Y \mid \mathcal{F}] \cdot X \mid \mathcal{F}] = E_2[YX \mid \mathcal{F}]$ и будући да је функција $E_1[X \mid \mathcal{F}]$ $\mathcal{F}$-мерљива, имамо да је коначно

$$E_1[Y \mid \mathcal{F}] \cdot E_2[X \mid \mathcal{F}] = E_2[YX \mid \mathcal{F}] \qquad \square$$

Сада ћемо доказати да је аксиоматизација за $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ комплетна за Σ_1 дефинабилне теорије у односу на класу двовероватносних модела са условним очекивањима, следећи исти концепт који је представљен у претходном поглављу.

Теорема 6.3.14 (Теорема сагласности). *Свака реченица из $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ која има двовероватносни модел са условним очекивањем је конзистентна.*

Теорема 6.3.15 (Теорема комплетности за $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$). *Нека је T скуп реченица логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ који је Σ_1 дефинбилан на $\mathbb{A}$ и конзистентан са аксиомама од $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$. Тада, постоји двовероватносни модел са условним очекивањем за скуп T.*

Доказ. Нека је $\bar{L}$ екстензија од L добијена додавањем нових симбола случајних променљивих $X_{E_i[\sigma(\vec{x},y)|y]}$ за сваки терм $\sigma(\vec{x},y)$, $i = 1,2$. Због једноставнијег записивања, писаћемо $X^i_\sigma(\vec{x},y)$, уместо $X_{E_i[\sigma(\vec{x},y)|y]}$. Терм τ логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ може бити транслиран у терм $\mathcal{T}(\tau)$ логике $\bar{L}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ на следећи начин:

(1) ако је τ атомични терм, онда је $\mathcal{T}(\tau) = \tau$;
(2) ако је τ терм облика $E_i[\sigma(\vec{x},y) \mid y]$, онда је $\mathcal{T}(\tau)$ терм $[X_{E_i[\sigma(\vec{x},y)|y]}(\vec{x},y) \restriction_k]$, где је $k \geq \|\sigma\|$;
(3) транслација $\mathcal{T}$ комутира са интегралним квантификаторима и са сваким функцијским симболом f;
(4) ако је τ терм $\mathbb{1}(\sigma(\vec{x},y) > r)$, онда је $\mathcal{T}(\tau)$ терм $\mathbb{1}(\mathcal{T}(\sigma(\vec{x},y)) > r)$.

Транслација формуле φ логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ у формулу $\mathcal{T}(\varphi)$ логике $\bar{L}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$ је дефинисана тако да $\mathcal{T}$ комутира са $\neg$ и $\wedge$. Нека је T^* теорија која се састоји од свих транслација реченица из T, свих транслација теорема логике $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ и реченице

$$\int_j |[X^i_\tau(\vec{x})\restriction_k] - [X^i_\tau(\vec{x})\restriction_l]|\,d\vec{x} = 0,\ k,l \geq \|\tau\|,\ i,j = 1,2.$$

Закључује се да је теорија T^* конзистентна у $\bar{L}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$. Користећи Хенкинову конструкцију, добијамо слаб модел са случајним променљивим

$$\mathfrak{A}^w = (A, X^{\mathfrak{A}^w}, X_i^{\mathfrak{A}^w}, X_i^{1^{\mathfrak{A}^w}}, X_i^{2^{\mathfrak{A}^w}}, I_1^{\mathfrak{A}^w}, I_2^{\mathfrak{A}^w})$$

за T^*.

Нека је $\bar{\bar{L}} = \bar{L} \cup C$ језик уведен у Хенкиновој конструкцији, где је C скуп нових симбола константи и $C \in \mathbb{A}$. Следићемо идеју М. Рашковића из [46]. Нека је M језик са четири врсте променљивих:

- $U, V, W, \dots$ променљиве за скупове;
- $x, y, z, \dots$ променљиве за урелементе;
- променљиве $r, s, t, u, v, \dots$ за реалне бројеве; и
- $F, G, H, \dots$ променљиве за n-арне реално вредносне функције (које представљају интерпретације термова, тј. функције $A^n \to \mathbb{R}$).

Релацијски симболи језика су:

- $\leq$ за реалне бројеве;
- $\varepsilon_n(x_1, \dots, x_n, U)$, $n \geq 1$ (са значењем да је $(x_1, \dots, x_n) \in U$);
- $\nu_{n+1}(\vec{x}, r, F)$, $n \geq 0$ (са значењем да је $F(x_1, \dots, x_n) = r$);
- $\mathrm{Int}_k(F, r)$, $k = 1, 2$ (са значењем да је $\mathrm{Int}_k(F, r)$ акко $I_k(F) = r$ за $F \colon A^\circ \to \mathbb{R}$ или $F \colon A^1 \to \mathbb{R}$); и
- $\mathrm{Exp}_k(F, G)$, $k = 1, 2$ (са значењем да је $\mathrm{Exp}_k(F, G)$ акко $E_k(F) = G$ за $F \colon A^n \to \mathbb{R}$).

Бинарни функцијски симболи су $+, \cdot, \max, \min$ са уобичајеним значењем. Симболи константи су:

- U_φ за сваку $\bar{\bar{L}}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$-формулу φ;
- F_τ за сваки $\bar{\bar{L}}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$-терм τ; и
- $\bar{r}$ за сваки реални број $r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{A}$.

Нека је S следећа теорија логике $M_{\mathbb{A}}$:

(1) Аксиоме добре дефинисаности

(а) $(\forall U) \bigwedge\limits_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y})(\varepsilon_m(\vec{x}, \vec{y}, U) \wedge \varepsilon_n(\vec{x}, U))$ где је $\{\vec{x}\} \cap \{\vec{y}\} = \varnothing$;

(б) $(\forall F) \bigwedge\limits_{n<m} \neg(\exists \vec{x}, \vec{y}, r, s)(\nu_{m+1}(\vec{x}, \vec{y}, r, F) \wedge \nu_{n+1}(\vec{x}, s, F))$;

(в) $(\forall F)(\forall \vec{x}, r, s)\big((\nu_{n+1}(\vec{x}, r, F) \wedge \nu_{n+1}(\vec{x}, s, F)) \to r = s\big)$.

(2) Аксиоме екстензионалности

(а) $(\forall \vec{x})(\varepsilon_n(\vec{x}, U) \longleftrightarrow \varepsilon_n(\vec{x}, V)) \longleftrightarrow U = V$;

(б) $(\forall \vec{x}, r)\big((\nu_{n+1}(\vec{x}, r, F) \longleftrightarrow \nu_{n+1}(\vec{x}, r, G)) \longleftrightarrow F = G\big)$.

(3) Аксиоме за терме

(а) $(\forall x, y)[\nu_3(x, y, 0, F_{\mathbb{1}(x=y)}) \vee \nu_3(x, y, 1, F_{\mathbb{1}(x=y)})]$;

(б) $(\forall \vec{x})\Big[\nu_{n+1}(\vec{x}, p, F_{[X_i \restriction r]}) \to \big(p = \min(r, \max(-r, q)) \wedge \nu^t_{n+1}(\vec{x}, q, F_{[X_i \restriction s]})\big)\Big]$, $0 \leq r \leq s$;

(в) $\bigvee\limits_k (\forall \vec{x})\big(\nu_{n+1}(\vec{x}, p, F_{[X_i \restriction (k+1)]}) \to |p| \leq k\big)$;

(г) $\bigvee\limits_k \mathrm{Int}_i\big(|F_{[X_i \restriction (k+1)]} - F_{[X_i \restriction k]}|\big) \leq \frac{1}{m}$, за свако $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$;

(д) $\nu_1(\bar{r}, F_{\bar{r}})$;

(ђ) $(\forall \vec{x})\Big[\nu_{n+1}(\vec{x}, r, F_{\int_k \sigma(\vec{x}, y)\, dy}) \longleftrightarrow (\exists V)\big((\forall y, s)(\nu_2(y, s, V) \longleftrightarrow \nu_{n+2}(\vec{x}, y, s, F_\sigma)) \wedge \mathrm{Int}_k(V, r)\big)\Big]$, $k = 1, 2$;

(е) $(\forall \vec{x})\Big[\nu_{n+1}(\vec{x}, r, F_{\mathrm{f}(\tau_1, \dots, \tau_n)}) \longleftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{k} \nu^t_{n+1}(\vec{x}, r_i, F_{\tau_i}) \wedge r = \mathrm{f}(r_1, \dots, r_k)\Big]$;

(ж) $(\forall\vec{x},y)\bigwedge_{r,s}\Big[\big(v_{n+2}(\vec{x},y,1,F_{\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)})\vee v_{n+2}(\vec{x},y,0,F_{\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)})\big)$
$\wedge\big(v_{n+2}(\vec{x},y,1,F_{\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)})\longleftrightarrow v_{n+2}(\vec{x},y,s,F_{\tau(\vec{x},y)})\wedge s>r\big)$
$\wedge\big(v_{n+2}(\vec{x},y,0,F_{\mathbb{1}(\tau(\vec{x},y)>r)})\longleftrightarrow v_{n+2}(\vec{x},y,s,F_{\tau(\vec{x},y)})\wedge\neg(s>r)\big)\Big]$;

(з) $(\forall\vec{x},y)\Big[v_{n+2}(\vec{x},y,r,F_\tau)\longleftrightarrow(\exists G,H)\big((\forall z,s)(v_2(z,s,G)\longleftrightarrow v_{n+2}(\vec{x},z,s,F_{\sigma'}))$
$\wedge\operatorname{Exp}_k(G,H)\wedge v_2(y,r,H)\big)\Big]$, где је τ транслација терма облика $E_k[\sigma(\vec{x},y)\mid y]$, $k=1,2$, и σ' је $\mathcal{T}(\sigma)$.

(4) Аксиоме задовољења
 (а) $(\forall\vec{x})\big(\varepsilon_n(\vec{x},U_{\tau\geq 0})\longleftrightarrow v_{n+1}(\vec{x},r,F_\tau)\wedge r\geq 0\big)$;
 (б) $(\forall\vec{x})\big(\varepsilon_n(\vec{x},U_{\neg\varphi})\longleftrightarrow\neg\varepsilon_n(\vec{x},U_\varphi)\big)$;
 (в) $(\forall\vec{x})\big(\varepsilon_n(\vec{x},U_{\wedge\varphi})\longleftrightarrow\bigwedge_{\varphi}\varepsilon_n(\vec{x},U_\varphi)\big)$.

(5) Аксиоме интегралних оператора
 (а) $(\forall F)\big(\bigwedge_{n\geq 2}\neg(\exists\vec{x},r)v_{n+1}(\vec{x},r,F)\longleftrightarrow(\exists_1 s)\operatorname{Int}_k(F,s)\big)$;
 (б) $(\forall r)\operatorname{Int}_k(F_r,r)$;
 (в) $(\forall F,G,r,s,t,u)\big(\operatorname{Int}_k(r\cdot F+s\cdot G,t)\wedge\operatorname{Int}_k(F,u)\wedge\operatorname{Int}_k(G,v)\rightarrow$
 $t=r\cdot u+s\cdot v\big)$, $i=1,2$;
 (г) $(\forall F)\big((\forall x)(\exists r\geq 0)v_2(x,r,F)\rightarrow(\exists s\geq 0)\operatorname{Int}_k(F,s)\big)$.

(6) Аксиоме оператора са условним очекивањем
 (а) $(\forall\vec{x})(\exists F)(\forall y,s)\big(v_2(y,s,F)\longleftrightarrow v_{n+1}(\vec{x},y,s,F_\tau)\big)\rightarrow(\exists_1 G)\operatorname{Exp}^k(F,G)$, $k=1,2$;
 (б) $(\forall F,G,H,G_1)[\operatorname{Exp}^k(F,G)\wedge\operatorname{Exp}^k(H,G_1)\rightarrow(\operatorname{Int}_k(G\cdot H,r)\longleftrightarrow\operatorname{Int}_k(G\cdot G_1,r))]$;
 (в) $\bigvee_k(\forall F)(\forall G,H)[\operatorname{Exp}^1(F,G)\wedge\operatorname{Exp}^2(F\cdot F_{[X\restriction k]},H)\rightarrow(\operatorname{Int}_1(G,r)\longleftrightarrow\operatorname{Int}_2(H,r))]$.

(7) Аксиоме за Архимедовско поље и све теореме теорије затвореног поља реалних бројева са min и max (за реалне бројеве).

(8) Аксиоме које су трансформације свих аксиома φ логике $\overline{\overline{L}}{}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$

$$(\forall\vec{x})\varepsilon_n(\vec{x},U_\varphi).$$

(9) Аксиоме оствaривости свих реченица φ из T^*

$$(\forall x)\varepsilon_1(x,U_\varphi).$$

Теорија S је Σ_1 дефинабилна на $\mathbb{A}$. Нека је S_0 допустив подскуп од S ($S_0\subseteq S, S_0\in\mathbb{A}$). На основу Барвајзове теореме компактности [4], S има модел $\overline{\mathcal{B}}$ јер S_0 има стандардни модел који се може добити трансформацијом слабог модела $\mathfrak{A}^W$:

$$\mathcal{B}=\langle B,\mathcal{U},\mathcal{F},\mathbb{F},\varepsilon_n^{\mathcal{B}},v_{m+1}^{\mathcal{B}},\operatorname{Int}_k^{\mathcal{B}},\operatorname{Exp}^{k^{\mathcal{B}}},\leq,+,\cdot,\min,\max,X_\varphi^{\mathcal{B}},U_\tau^{\mathcal{B}},r\rangle,$$

где је:
- $B=A$;
- $\mathcal{U}\subseteq\bigcup_{n\geq 1}\mathbb{P}(A^n)$;
- $\mathcal{F}\subseteq\bigcup_{n\geq 0}\mathbb{P}(A^n\times\mathbb{R})$;
- $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{R}$ је поље;
- $\varepsilon_n^{\mathcal{B}}\subseteq A^n\times\mathcal{U}$;
- $v_{m+1}^{\mathcal{B}}\subseteq A^m\times\mathbb{F}\times\mathcal{F}$;

- $\mathrm{Int}_k^{\mathcal{B}}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{F},\ k=1,2;$
- $\mathrm{Exp}^{k\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F},\ k=1,2;$
- $+, \cdot, \min, \max\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \leq \subseteq \mathbb{F} \times \mathbb{F};$
- $U_\varphi^{\mathcal{B}} = \{\vec{a} \in A^n \mid \mathfrak{A}^W \models \varphi[\vec{a}]\}$, $\mathcal{U} = \{U_\varphi^{\mathcal{B}} \mid \varphi$ је формула из $\overline{\overline{L}}{}^a_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})\}$;
- $F_\tau^{\mathcal{B}} = \tau^{\mathfrak{A}^W}$, $\mathcal{F} = \{F_\tau^{\mathcal{B}} \mid \tau$ је терм из скупа $D\}$.

Модел $\overline{\mathcal{B}}$ се може трансформисати у средњи модел $\mathfrak{A}^m$ за T^*, тако да је:
$\tau^{\mathfrak{A}^m} = r$ акко $v_{m+1}^{\overline{\mathcal{B}}}(\vec{x}, r, F_\tau)$;
$X^{\mathfrak{A}^m}_{E_k[\tau(\vec{a},y)|y]}(b) = c$ акко $F^{\overline{\mathcal{B}}}(b) = c \wedge \mathrm{Exp}^{k\overline{\mathcal{B}}}[F_{\tau(\vec{a},y)}, F]$, за неко F;
$I_k^{\mathfrak{A}^m}(\tau(\vec{a}, y)) = r$ акко $\mathrm{Int}_k^{\overline{\mathcal{B}}}(F_{\tau(\vec{a},y)}, r)$ за $\vec{a} \in \overline{B}^n$, и $k=1,2$.

На основу Лебове конструкције Данијеловог интеграла закључујемо да интернални средњи модел са случајним променљивим ${}^*\mathfrak{A}^m$ даје вероватносни модел са случајним променљивим $\overline{\mathfrak{A}} = ({}^*A, X_i^{\overline{\mathfrak{A}}}, X_\tau^{1\overline{\mathfrak{A}}}, X_\tau^{2\overline{\mathfrak{A}}}, X^{\overline{\mathfrak{A}}}, \mu_1, \mu_2)$ за теорију T^*, где је

$$X_i^{\overline{\mathfrak{A}}}(\vec{a}) = \sup\{r \mid [X_i(\vec{x}) \restriction_r]^{*\mathfrak{A}}(\vec{a}) \geq r\}$$

и $X_\tau^{k\overline{\mathfrak{A}}}$, $k=1,2$, и $X^{\overline{\mathfrak{A}}}$ су дефинисани исто као и $X_i^{\overline{\mathfrak{A}}}$. Нека је $\mathcal{F}_k$ σ-алгебра на ${}^*A$ генерисана скуповима $\{b \in {}^*A \mid X_\tau^{k\overline{\mathfrak{A}}}(\vec{a}, b) \geq r\}$, где је терм τ облика $E_k[\sigma(\vec{x}, y) \mid y]$, $k=1,2$. Аксиоме за условна очекивања имплицирају да је $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. На основу аксиоме ($\mathrm{E}_4$), прецизније, на основу њене транслације, следи да постоји $k \in \mathbb{Q}^+$ тако да је $\int\limits_E d\mu_1 = \int\limits_E [X(x)\restriction_k]^{\overline{\mathfrak{A}}}\, d\mu_2$, за сваки мерљив скуп E. Из саме конструкције закључујемо да је $[X(x)\restriction_k]^{\overline{\mathfrak{A}}}$ ненегативна ограничена функција и зато је $\mu_1 \ll \mu_2$. Нека је $\mathfrak{A}$ редукт модела $\overline{\mathfrak{A}}$ на L. Користећи аксиоме, може се показати индукцијом по сложености термова и формула да реченица φ из $L^a_{\mathbb{A}E_1E_2}$ важи у $\mathfrak{A}$ акко $\mathcal{T}(\varphi)$ важи у $\overline{\mathfrak{A}}$, па је због тога $\mathfrak{A}$ модел за T. □

7. Тополошке логике

7.1. Логика са квантификатором „постоји непребројиво много"

Нека је L предикатска логика првог реда са једнакошћу и пребројивом листом симбола релација, функција и симбола константи. Језик логике $L(Q)$ настаје додавањем квантификатора Qx са значењем „постоји непребројиво много", језику L. Скуп формула ове логике је најмањи скуп Φ који садржи све атомичне формуле из L и има следеће својство:

ако је $\varphi, \psi \in \Phi$ и y је променљива, онда су и $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$, $\exists y \varphi$, $\forall y\ \varphi$ и $Qy\varphi \in \Phi$.

Под слабим моделом логике $L(Q)$ подразумевамо пар $(\mathfrak{A}, q)$ такав да је $\mathfrak{A}$ модел језика првог реда L и q је скуп подскупова универзума A модела $\mathfrak{A}$, тј. $q \subseteq \mathbb{P}(A)$. Чињеницу да n-торка $a_1, \dots, a_n \in A$ задовољава формулу $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ у моделу $(\mathfrak{A}, q)$ дефинишемо на уобичајен начин индукцијом по сложености формуле φ. Уколико је формула облика $Qx\varphi$, онда важи

$$(\mathfrak{A}, q) \models Qv_m \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{акко} \quad \{b \in A \mid (\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_{m-1}, b, a_{m+1}, \dots, a_n]\} \in q,$$

где је $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ формула из $L(Q)$ и $m \leq n$.

Индукцијом по сложености формуле φ могу се доказати две једноставне леме.

Лема 7.1.1. *Ако су све слободне променљиве формуле $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ међу променљивим $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ и ако је $a_{i_1} = b_{i_1}, \dots, a_{i_m} = b_{i_m}$, онда*

$$(\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{акко} \quad (\mathfrak{A}, q) \models \varphi[b_1, \dots, b_n].$$

Лема 7.1.2. *Нека је $(\mathfrak{A}, q)$ слаб модел и нека је $\varphi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ формула на језику $L(Q)$ и нека је ψ формула настала помоћу замене сваке слободне променљиве из $y_1, \dots, y_n$ формуле φ, константама $c_1, \dots, c_n$. Ако су $d_1, \dots, d_n$ интерпретације за $c_1, \dots, c_n$ у моделу $\mathfrak{A}$, онда за све $a_1, \dots, a_m \in A$ важи*

$$(\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_m, d_1, \dots, d_n] \quad \text{акко} \quad (\mathfrak{A}, q) \models \psi[a_1, \dots, a_m].$$

Нека је $\mathfrak{A}$ модел језика L. Модел $\mathfrak{A}$ је стандардни модел реченице φ уколико важи да је $\mathfrak{A} \models \varphi$ акко $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi$, где је q скуп свих непребројивих подскупова од A. ($\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ акко $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, за случај када је φ формула).

Уколико је φ формула језика $L(Q)$, чије су слободне променљиве $u_1, \dots, u_n$, онда $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi$ подразумева $(\mathfrak{A}, q) \models \forall u_1, \dots, u_n \varphi$, и $\mathfrak{A} \models \varphi$ подразумева $\mathfrak{A} \models \forall u_1, \dots, u_n \varphi$.

Аксиоматски систем логике $L(Q)$ представља проширење аксиоматског система класичног предикатског рачуна следећим схема-аксиомама:

A_1. $\neg Qx(x \equiv y \vee x \equiv z)$;

A_2. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (Qx\varphi \to Qx\psi)$;

A_3. $Qx\varphi(x, \dots) \leftrightarrow Qy\varphi(y, \dots)$, уколико y није слободно у φ, и формула $\varphi(y, \dots)$ је настала заменом сваког слободног појављивања променљиве x променљивом y ;

A_4. $Qy\exists x\varphi \to \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$.

Све аксиоме су интуитивно јасне и имају следећа значења: Аксиома A_1 је „Сваки скуп кардиналности ≤ 2 је пребројив”, док аксиома A_2 говори да сваки скуп који има непребројиви подскуп је и сам непребројив. „Ако је $\bigcup_{x\in X} a_x$ непребројив скуп, онда је a_x непребројив за неко $x \in X$ или је скуп X непребројив” је значење аксиоме A_4.

Лема 7.1.3. *Сваки модел $\mathfrak{A}$ језика L је стандардни модел сваке од наведених аксиома.*

Примећује се да $\mathfrak{A} \models Qx\, x \equiv x$ акко је универзум A непребројив. Реченица $Qx\, x \equiv x$ није на листи аксиома, тако да су допуштени и пребројиви стандардни модели. Уколико би се $Qx\, x \equiv x$ уврстила у листу аксиома, дефиниција стандардног модела би морала бити појачана чињеницом да је A непребројив скуп.

Такође, није тешко наћи слабе моделе који не задовољавају аксиоме од $L(Q)$. С друге стране, постоје слаби модели који задовољавају аксиоме од $L(Q)$ и разликују се од стандардних модела. На пример, ако је q скуп свих бесконачних подскупова од A, онда је $(\mathfrak{A}, q)$ слаб модел који задовољава сваку аксиому логике $L(Q)$.

Правила извођења су иста као у класичном предикатском рачуну.

Многе теореме предикатског рачуна могу бити доказане на сличан начин и у $L(Q)$.

Лема 7.1.4. *Нека је Σ скуп реченица из $L(Q)$, као и реченица φ. Ако је $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, онда $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.*

Лема 7.1.5. *Нека је Σ максимално конзистентан скуп реченица из $L(Q)$. Тада, за све реченице φ, ψ из $L(Q)$ имамо*

$$\begin{aligned} \neg\varphi \in \Sigma \quad &\text{акко} \quad \varphi \notin \Sigma \quad \text{и} \\ \varphi \wedge \psi \in \Sigma \quad &\text{акко} \quad \varphi \in \Sigma \quad \text{и} \quad \psi \in \Sigma. \end{aligned}$$

Лема 7.1.6. *Ако је L' екстензија језика L добијена додавањем произвољног скупа симбола константи, онда за било који скуп Σ реченица из $L(Q)$, Σ је конзистентно у $L(Q)$ акко Σ је конзистентно у $L'(Q)$.*

Следећом лемом су дате неке теореме логике $L(Q)$, које су важне за доказ става потпуности.

Лема 7.1.7. *Следеће формуле су теореме логике $L(Q)$:*

(i) $Qx\varphi \to \exists x\varphi$.

(ii) $\exists x Qy\varphi \to Qy\exists x\varphi$.

(iii) $Qx(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge Qx\psi$, *где x није слободна променљива у φ* .

(iv) $Qx(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow Qx\varphi \vee Qx\psi$.

(v) $Qx\varphi \wedge \neg Qx\psi \to Qx(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Од велике важности за даљи рад са тополошким логикама је управо теорема слабе комплетности, чији ће доказ бити детаљно изложен.

Дефиниција 7.1.8. Нека је Γ скуп реченица из $L(Q)$ и C је скуп симбола константи језика L. C је скуп сведока за Γ акко за сваку реченицу облика $\exists x\varphi(x)$ постоји $c \in C$ тако да важи $\Gamma \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(c)$.

Лема 7.1.9. *Уколико је Γ максимално конзистентан скуп реченица из $L(Q)$ и C је скуп сведока за Γ, онда Γ има слаб модел $(\mathfrak{A}, q)$ такав да је сваки елемент из A интерпретација неког $c \in C$.*

Доказ. Нека је Γ_0 скуп свих реченица језика L које припадају скупу Γ. На основу леме 7.1.5, Γ_0 је максимално конзистентан скуп реченица језика L, штавише, C је скуп сведока за скуп Γ_0. Из логике првог реда имамо да Γ_0 има модел $\mathfrak{A}$, тако да је сваки елемент из A интерпретација неког $c \in C$. Нека је $\bar{c}$ интерпретација $c \in C$, тј. $A = \{\bar{c} \mid c \in C\}$.

Следећи део доказа је трансформација модела $\mathfrak{A}$ у слаб модел $(\mathfrak{A}, q)$ скупа Γ. За сваку формулу $\varphi(x)$ из $L(Q)$ са највише једном слободном променљивом, нека је

$$S_\varphi = \{\bar{c} \mid c \in C \quad \text{и} \quad \Gamma \vdash \varphi(c)\}.$$

Тада, $q = \{S_\varphi \mid \varphi$ има највише једну слободну променљиву, рецимо x, и $\Gamma \vdash Qx\varphi\}$. Очигледно, q је скуп подскупова од A. Треба доказати, индукцијом по сложености реченице φ, да за све реченице φ из $L(Q)$ важи

$$(\mathfrak{A}, q) \models \varphi \quad \text{акко} \quad \Gamma \vdash \varphi \tag{1}$$

Ако је φ атомична реченица, онда (1) важи јер је φ из L. Уколико (1) важи за φ и ψ, онда важи и за $\neg\varphi$ и за $\varphi \wedge \psi$, на основу леме 7.1.5. За φ облика $\exists x\psi(x)$ еквиваленција (1) се доказује као у логици првог реда [9].

Нека је сада φ облика $Qx\psi(x)$ и претпоставља се да (1) важи за све реченице $\psi(c)$, $c \in C$. Тада,

$$S_\psi = \{\bar{c} \mid \Gamma \vdash \psi(c)\} = \{\bar{c} \mid (\mathfrak{A}, q) \models \psi(c)\}, \tag{2}$$

на основу леме 7.1.2. Ако је $\Gamma \vdash Qx\psi$, онда $S_\psi \in q$ на основу дефиниције од q, па је и $(\mathfrak{A}, q) \models Qx\psi$ на основу (2).

Претпоставка да је $(\mathfrak{A}, q) \models Qx\psi$ повлачи, на основу (2), да $S_\psi \in q$. Из дефиниције од q, за сада се може само закључити да постоји формула $\theta(y)$ таква да је $S_\psi = S_\theta$ и $\Gamma \vdash Qy\theta(y)$. Из (2) и леме 7.1.2 добија се да $\bar{c} \in S_\psi$ имплицира $\Gamma \vdash \psi(c)$, $c \in C$, и слично важи и за θ. Одатле следи да је $\Gamma \vdash \psi(c)$ акко $\Gamma \vdash \theta(c)$ за свако $c \in C$, па важи $\Gamma \vdash \psi(c) \longleftrightarrow \theta(c)$, за свако $c \in C$. Будући да је C скуп сведока за Γ, важиће $\Gamma \vdash \forall u\big(\psi(u) \longleftrightarrow \theta(u)\big)$, где је u променљива која се није појављивала у ψ и θ. На основу аксиоме 2, $\Gamma \vdash Qu\psi(u) \longleftrightarrow Qu\theta(u)$, а аксиома 3. повлачи $\Gamma \vdash Qx\psi(x) \longleftrightarrow Qu\theta(u)$ и $\Gamma \vdash Qy\theta(y) \longleftrightarrow Qu\theta(u)$. Добија се из исказне логике да је

$$\Gamma \vdash Qx\psi(x) \longleftrightarrow Qy\theta(y)$$

и како је $\Gamma \vdash Qy\theta(y)$, следи да важи $\Gamma \vdash Qx\psi(x)$. На основу (1) следи да је $(\mathfrak{A}, q)$ модел скупа реченица Γ. □

Теорема 7.1.10 (Теорема слабе комплетности)**.** *Нека је Σ скуп реченица из $L(Q)$. Σ је конзистентно акко Σ има пребројив слаб модел у коме све аксиоме логике $L(Q)$ важе.*

Доказ. Ток доказа је суштински врло сличан Хенкиновом доказу теореме комплетности за логику првог реда. Нека је Σ конзистентно и нека је L^* проширење језика L пребројивим скупом нових симбола константи C. На основу леме 7.1.6, Σ остаје конзистентан у $L^*(Q)$. Хенкиновом методом, Σ може бити проширен до максимално конзистентног скупа Γ реченица из $L^*(Q)$ тако да је C скуп сведока за Γ. На основу претходне леме, Γ има слаб модел $(\mathfrak{A}^*, q)$ у коме је сваки елемент интерпретација неког $c \in C$. Пребројивост скупа C повлачи пребројивост од $\mathfrak{A}^*$. Како је Γ максимално конзистентан у $L^*(Q)$, све аксиоме из $L^*(Q)$ припадају скупу Γ и зато важе у моделу $(\mathfrak{A}^*, q)$. Ако је $\mathfrak{A}$ редукт од $\mathfrak{A}^*$ на L, онда је $(\mathfrak{A}, q)$ пребројиви слаб модел од Σ који задовољава све аксиоме из $L(Q)$.

Доказ другог смера се добија из чињенице да ако је $\Sigma \vdash \varphi$ и $(\mathfrak{A}, q)$ је слаб модел за Σ, онда је и $(\mathfrak{A}, q) \models \varphi$. $\square$

Напомена 7.1.11. 1) Претходни резултат такође важи и за непребројиви језик L са једином разликом што се реч „пребројив" у теореми 7.1.10 брише.

2) Горњи резултат би се могао добити уколико се аксиома A_2 замени аксиомом $\forall x \big(\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)\big) \to \big(Qx\varphi(x) \longleftrightarrow Qx\psi(x)\big)$, која ће бити уврштена у листу аксиома тополошких логика из нашег даљег проучавања.

3) У досадашњем доказу коришћене су само аксиоме A_2 и A_3.

Стандардни модел за конзистентан скуп реченица Σ је конструисан као унија елементарног ланца ω_1 слабих модела [29]. Ако је $(\mathfrak{A}, q)$ слаб модел за Σ, циљ је да се скупови из q „увећају" до непребројивих скупова коришћењем елементарних ланаца. Следећа лема је кључна у доказу комплетности.

Лема 7.1.12. *Нека је $(\mathfrak{A}, q)$ пребројиви слаб модел у коме све аксиоме логике $L(Q)$ важе и нека је L^* језик модела $\mathfrak{A}^*$, настао додавањем нових симбола константи c_a, за свако $a \in A$, језику L. Формула $\varphi(x)$ је формула из $L^*(Q)$ таква да важи $(\mathfrak{A}^*, q) \models Qx\varphi(x)$. Тада постоји пребројива елементарна екстензија $(\mathcal{B}, r)$ од $(\mathfrak{A}, q)$ тако да важи:*

(i) за неко $b \in B \setminus A$, $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.

(ii) за сваку формулу $\psi(y)$ из $L^*(Q)$ такву да је $(\mathfrak{A}^*, q) \models \neg Qy\psi(y)$ важи $\{a \in B \mid (\mathcal{B}^*, r) \models \psi[a]\} \subset A$.

Пребројивим понављањем претходне леме и коришћењем методе елементарних ланаца добија се исти резултат који важи сада за сваку формулу $\varphi(x)$ из $L^*(Q)$.

Лема 7.1.13. *Нека је $(\mathfrak{A}, q)$ пребројив слаб модел у коме све аксиоме из $L(Q)$ важе и нека је L^* језик модела $\mathfrak{A}^*$ дефинисан као у претходној леми. Тада, $(\mathfrak{A}, q)$ има пребројиву елементарну екстензију $(\mathcal{B}, r)$ такву да је за све формуле $\varphi(x)$ из $L^*(Q)$:*

$(\mathfrak{A}^*, q) \models Qx\varphi(x)$ акко постоји $b \in B \setminus A$ тако да је $(\mathcal{B}^*, r) \models \varphi[b]$.

На крају, ако је $(\mathfrak{A}_0, q_0)$ пребројиви слаб модел за Σ, применом последње леме ω_1 пута добија се елементарни ланац $(\mathfrak{A}_\alpha, q_\alpha)$, $\alpha < \omega_1$, пребројивих слабих модела, унија добијеног ланца ће бити стандардни модел за Σ.

Последица 7.1.14 (Теорема компактности)**.** Нека је Σ скуп реченица из $L(Q)$. Ако сваки коначан подскуп од Σ има стандардни модел, онда Σ има стандардни модел.

Лако се уочава да комплетност и компактност не важе за $L(Q)$ уколико L има непребројиво много симбола константи, посматрајући скуп $\Sigma = \{\neg QxP(x)\} \cup \{P(c_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\} \cup \{\neg c_\alpha \equiv c_\beta \mid \alpha < \beta < \omega_1\}$.

Квантификатор Qx се може интерпретирати на различите начине, о чему говори следећи низ последица слабе комплетности за логику $L(Q)$. Претпоставка да је језик L пребројив може бити одбачена.

Теорема 7.1.15. *Следеће чињенице су еквивалентне:*

(i) Σ је конзистентно у односу на аксиому A_3 и схема аксиому $\forall x(\varphi \longleftrightarrow \psi) \to \big(Qx\varphi \longleftrightarrow Qx\psi\big)$;

(ii) Σ има слаб модел.

Теорема 7.1.16. *Следеће чињенице су еквивалентне:*

(i) Σ је конзистентно у односу на аксиоме A_2 и A_3 и схема аксиому $Qx(\varphi \wedge \psi) \longleftrightarrow Qx\varphi \wedge Qx\psi$;

(ii) Σ *има слаб модел* $(\mathfrak{A}, q)$ *такав да је* q *филтер на скупу* A.

7.2. Тополошки простори

Концепт метричког простора, као скупа за чија је свака два елемента одређено растојање, уведен је почетком 20. века као природна генерализација разних простора који су до тада проучавани у математичкој анализи. Обједињујући резултате класичне анализе везане за непрекидност, конвергенцију и разне особине простора, теорија метричких простора је убрзала даљи развој математичке анализе ка функционалној анализи у којој тачке простора нису више само бројеви или уређене n-торке бројева. Заснивање теорије тополошких простора долази као природна последица развоја функционалне анализе, тј. јавила се потреба да се уместо метричких посматрају још апстрактнији простори; данас представља најопштији оквир у коме се изучавају непрекидност и сродни појмови.

Дефиниција 7.2.1. Колекција $\mathcal{O}$ подскупова неког непразног скупа X је колекција отворених скупова, или топологија, ако и само ако важе следећа три услова:
(O_1) $\varnothing, X \in \mathcal{O}$;
(O_2) ако $U, V \in \mathcal{O}$ онда и $U \cap V \in \mathcal{O}$;
(O_3) за сваку фамилију $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{O}$, важи $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.

Тополошки простор је пар $(X, \mathcal{O})$.

Елементе колекције $\mathcal{O}$ називамо отвореним скуповима. Затворени скупови су комплементи отворених.

Теорема 7.2.2. *Колекција* $\mathcal{C}$ *свих затворених скупова неког тополошког простора* $(X, \mathcal{O})$ *задовољава следеће услове:*
(C_1) $\varnothing, X \in \mathcal{C}$, *;*
(C_2) ако $F, H \in \mathcal{C}$ *онда и* $F \cup H \in \mathcal{C}$ *;*
(C_3) за сваку фамилију $\{F_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$, *важи* $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Тополошка структура на неком скупу X може се дефинисати тако што се прво зада колекција $\mathcal{C}$ подскупова од X која задовољава услове (C_1), (C_2), (C_3) и чије елементе зовемо затворени скупови, а онда се отворени скупови дефинишу као комплементи затворених.

Теорема 7.2.3. *Дати су тополошки простори* $\mathcal{X}_1 = (X, \mathcal{O})$, *колекција отворених скупова* $\mathcal{O}$ *на* X *и* $\mathcal{X}_2 = (X, \mathcal{C})$, *колекцијом* $\mathcal{C}$ *затворених скупова на* X. *Ако за сваки* $U \in \mathcal{O}$ *и сваки* $F \in \mathcal{C}$ *важи* $U \setminus F \in \mathcal{O}$ *и* $F \setminus U \in \mathcal{C}$, *тада је* $\mathcal{O}$ *колекција отворених скупова простора* $\mathcal{X}_2$, *а* $\mathcal{C}$ *колекција затворених скупова простора* $\mathcal{X}_1$.

Према претходној теореми, тополошки простор се може дефинисати и као тројка $(X, \mathcal{O}, \mathcal{C})$, тако да колекција $\mathcal{O}$ задовољава услове (O_1), (O_2), (O_3) за отворене скупове, а $\mathcal{C}$ услове (C_1), (C_2), (C_3) за затворене скупове, уз додатни услов

$$\text{ако } U \in \mathcal{O} \text{ и } F \in \mathcal{C}, \text{ тада } U \setminus F \in \mathcal{O} \text{ и } F \setminus U \in \mathcal{C}.$$

Дефиниција 7.2.4. Нека је $(X, \mathcal{O})$ тополошки простор. Скуп $A \subset X$ је околина тачке $x \in X$ акко постоји отворен скуп $O \in \mathcal{O}$ такав да је $x \in O \subset A$.

Чињеница да је скуп отворен може да се изрази помоћу појма околине тачке, о чему говори следећа теорема.

Теорема 7.2.5. *Нека је $(X, \mathcal{O})$ тополошки простор. Тада важи: скуп $A \subset X$ је отворен акко је околина сваке своје тачке.*

Дефиниција 7.2.6. Нека су $(X, \mathcal{O}_x)$ и $(Y, \mathcal{O}_y)$ тополошки простори и $x_0 \in X$ произвољна тачка. Функција $f\colon X \to Y$ је

- непрекидна у тачки x_0 акко за сваку околину V тачке $f(x_0)$ постоји околина U тачке x_0 тако да је $f[U] \subset V$;
- непрекидна акко је непрекидна у свакој тачки $x \in X$.

Услов непрекидности функције може да се искаже и коришћењем појмова отвореног и затвореног скупа.

Теорема 7.2.7. *Нека су $(X, \mathcal{O}_x)$ и $(Y, \mathcal{O}_y)$ тополошки простори и $f\colon X \to Y$ произвољно пресликавање . Тада су следећи услови еквивалентни:*

(i) Пресликавање f је непрекидно .
(ii) За сваки отворен скуп $O \subseteq Y$, скуп $f^{-1}[O] \subseteq X$ је отворен .
(iii) За сваки затворен скуп $F \subseteq Y$, скуп $f^{-1}[F] \subseteq X$ је затворен .

Дефиниција 7.2.8. Нека је $(X, \mathcal{O})$ тополошки простор. 1) Фамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}(X)$ је база топологије $\mathcal{O}$ акко важе следећи услови:

(B_1) Елементи колекције $\mathcal{B}$ су отворени скупови, тј. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$;
(B_2) Сваки отворен скуп $O \in \mathcal{O}$ може да се прикаже као унија неке подфамилије фамилије $\mathcal{B}$.

2) Колекција $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}(X)$ је подбаза топологије $\mathcal{O}$ акко важе следећи услови:

(PB_1) Елементи колекције $\mathcal{P}$ су отворени скупови, тј. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$;
(PB_2) Фамилија свих коначних пресека елемената $\mathcal{P}$ представља неку базу топологије $\mathcal{O}$.

Производ тополошких простора се уводи на основу следеће једноставне теореме.

Теорема 7.2.9. *Нека је I непразан скуп, а $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$ фамилија тополошких простора. Тада важи:*

a_1) Колекција $\mathcal{P}$ свих подскупова скупа $\prod X_i$ облика $\pi_i^{-1}[O_i]$, где је $i \in I$ произвољан индекс, а $O_i \in \mathcal{O}_i$ отворен скуп у простору X_i, је подбаза неке топологије на скупу $\prod X_i$. Означимо ту топологију са $\mathcal{O}$.

a_2) Фамилија свих коначних пресека елемената колекције $\mathcal{P}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[O_i] \mid K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0 \wedge (\forall i \in K)\, O_i \in \mathcal{O}_i \right\}$$

је база топологије $\mathcal{O}$.

(За $j \in I$, пресликавање $\pi_j\colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ дато са $\pi_j\big((x_i \mid i \in I)\big) = x_j$ је пројекција производа на простор X_j.)

Дефиниција 7.2.10. Топологију $\mathcal{O}$ на скупу $\prod X_i$ уведену у претходној теореми зовемо топологија Тихонова. За простор $(\prod X_i, \mathcal{O})$ кажемо да је производ фамилије простора $\{(X_i, \mathcal{O}_i) \mid i \in I\}$.

7.3. Топологије на класама

Код дефинисања многих појмова везаних за класа-просторе, није могуће пренети на једноставан начин дефиниције и конструкције одговарајућих појмова из класичне топологије. Главни разлог је одсуство операције комплементирања. Овај проблем у многим случајевима може бити отклоњен дефинисањем посебно класе отворених скупова и посебно класе затворених скупова. Слично се може извести и на стандардним тополошким просторима (теорема 7.2.3).

У овом одељку ћемо великим појачаним словима: $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \ldots$ означавати класе, а обичним (малим и великим словима): $x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ скупове. Користићемо и стандардне ознаке: $\mathbb{V}$ за класу свих скупова, $\mathbb{ORD}$ за класу свих ординала, $\mathbb{CARD}$ за класу свих кардинала итд. Метатеорија на којој ће бити засновано излагање у овом одељку је $\mathbb{NBG}$ теорија скупова у којој се разматрају класе, а која је заправо екстензија $\mathbb{ZF}$ теорије скупова. Мијајловић и Ћирић у [11], [12] уводе појам тополошке структуре на правим класама следећом дефиницијом.

Дефиниција 7.3.1. Нека су $\mathbb{X}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{C}$ класе. Тројка $(\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ је тополошки класа-простор акко важе следећи услови:

(KT_1) ако $u, v \in \mathbb{T}$, онда и $u \cap v \in \mathbb{T}$;

(KT_2) за сваки скуп i и сваку фамилију $\{u_j \mid j \in i\}$, ако за сваки $j \in i$, $u_j \in \mathbb{T}$ онда и $\bigcup_{j \in i} u_j \in \mathbb{T}$;

(KT_3) за сваки $x \in \mathbb{X}$ постоји $u \in \mathbb{T}$, такав да је $x \in u$;

(KT_4) ако $u \in \mathbb{T}$ и $a \in \mathbb{C}$, онда $u \setminus a \in \mathbb{T}$;

(KC_1) ако $a, b \in \mathbb{C}$, онда $a \cup b \in \mathbb{C}$;

(KC_2) за сваки скуп i и сваку фамилију $\{a_j \mid j \in i\}$, ако за сваки $j \in i$, $a_j \in \mathbb{C}$ онда и $\bigcap_{j \in i} a_j \in \mathbb{C}$;

(KC_3) за сваки скуп x, такав да је $x \subset \mathbb{X}$, постоји $a \in \mathbb{C}$, такав да је $x \subseteq a$;

(KC_4) ако $u \in \mathbb{T}$ и $a \in \mathbb{C}$, онда и $a \setminus u \in \mathbb{C}$.

Примери:

1) Дискретан класа-простор на $\mathbb{V}$: $(\mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V})$.

2) За сваки ординал α, нека је τ_α скуп свих отворених, а σ_α свих затворених подскупова од α у односу на топологију уређења на α. Како је за $\alpha < \beta$, $\tau_\alpha \subseteq \tau_\beta$ и $\sigma_\alpha \subseteq \sigma_\beta$, лако се види да је за $\mathbb{T} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} \tau_\alpha$ и $\mathbb{C} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{ORD}} \sigma_\alpha$, $(\mathbb{ORD}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ тополошки класа-простор. Тополошки класа-простор на класи $\mathbb{CARD}$, дефинише се потпуно аналогно.

3) Нека је на скупу x дефинисан обичан тополошки простор, у коме је τ_x колекција свих отворених, а σ_x колекција свих затворених скупова. За произвољну класу $\mathbb{X}$, нека је $\mathbb{T} = \{u \mid u \subseteq \mathbb{X}, x \cap u \in \tau_x\}$ и $\mathbb{C} = \{a \mid a \subseteq \mathbb{X}, x \cap a \in \sigma_x\}$. Тада је $(\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ тополошки класа-простор. С друге стране, може се доказати да је, за сваки тополошки класа-простор $(\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ и сваки скуп $x \in \mathbb{X}$, $(x, \mathbb{T}\restriction_x, \mathbb{C}\restriction_x)$, обичан тополошки простор, при чему је $\mathbb{T}\restriction_x = \{y \cap x \mid y \in \mathbb{T}\}$ и $\mathbb{C}\restriction_x = \{y \cap x \mid y \in \mathbb{C}\}$; важи и $\mathbb{T} = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{T}\restriction_x$, $\mathbb{C} = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{C}\restriction_x$.

Следећи резултати су од значаја за рад са тополошким логикама који ће бити изложен у наредном одељку.

Теорема 7.3.2. *Нека је $\mathbb{K}$ права класа и Σ и Φ су класе подскупова од $\mathbb{K}$ тако да је*

(1) $\forall x \in \mathbb{K}\, \exists s \in \Sigma\; x \in s$.

(2) За сваки подскуп $m \subseteq \mathbb{K}$ постоји $f \in \Phi$ тако да је $m \subseteq f$.

(3) $\forall s \in \Sigma\, \forall f \in \Phi\, (s - f \in \Sigma \wedge f - s \in \Phi)$.

Онда постоји најмања класа-топологија $(\mathbb{K}, \tau(\Sigma), \sigma(\Phi))$ тако да важи $\Sigma \subseteq \tau(\Sigma)$ и $\Phi \subseteq \sigma(\Phi)$.

Теорема 7.3.3. *Нека је $(\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ класа-простор и $f \subseteq \mathbb{X}$. Тада, f је затворен акко $(\forall y \notin f)(\exists v \in \mathbb{T})(y \in v \wedge v \cap f = \emptyset)$.*

Напоменимо да ако су $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ класе, пресликавање из $\mathbb{X}$ у $\mathbb{Y}$ је свака класа $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ тако да важи $\forall x \in \mathbb{X}\, \exists_1 y \in \mathbb{Y}\, (x, y) \in \mathbb{F}$.

Дефиниција 7.3.4. Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ класа-простори. Пресликавање $\mathbb{F} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ је непрекидно акко је рестрикција $\mathbb{F} \restriction u$ за свако $u \in \mathbb{T}_X$ непрекидна функција.

Теорема 7.3.5. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ класа простори и $\mathbb{F} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ пресликавање. Следећи услови су еквивалентни:*
(1) $\mathbb{F}$ је непрекидно .
(2) За све $u \in \mathbb{T}_X$ и све $w \in \mathbb{T}_Y$, $u \cap \mathbb{F}^{-1}(w) \in \mathbb{T}_X$.
(3) За све $v \in \mathbb{C}_X$ и све $w \in \mathbb{C}_Y$, $v \cap \mathbb{F}^{-1}(w) \in \mathbb{C}_X$.

Производ два класа-простора $\mathcal{X}_i = (\mathbb{X}_i, \mathbb{T}_i, \mathbb{C}_i)$, $1 \leq i \leq 2$, је класа-простор $\mathcal{X} = (\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$, где је $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ и основе за $\mathbb{T}$ и $\mathbb{C}$ су класе $\mathbb{T}_0 = \{\bar{u}_1^{-1}(u) \cap \bar{u}_2^{-1}(v) \mid u \in \mathbb{T}_1, v \in \mathbb{T}_2\}$, $\mathbb{C}_0 = \{\bar{u}_1^{-1}(u) \cap \bar{u}_2^{-1}(v) \mid u \in \mathbb{C}_1, v \in \mathbb{C}_2\}$. Овде су $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ су пројекције из $\mathbb{K}$ у $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_2$ респективно.

Класе $\mathbb{T}_0$ и $\mathbb{C}_0$ очигледно не задовољавају услове теореме 7.3.2, зато нека је $\mathbb{T}'$ класа свих коначних унија елемената класе $\mathbb{T}_0$, и $\mathbb{C}'$ нека је класа свих коначних унија елемената класе $\mathbb{C}_0$. (Лако се уочава да су класе $\mathbb{T}'$ и $\mathbb{C}'$ затворене и за коначне пресеке). Очигледно је $\mathbb{T}_0 \subseteq \mathbb{T}'$ и $\mathbb{C}_0 \subseteq \mathbb{C}'$ и класе $\mathbb{T}'$ и $\mathbb{C}'$ задовољавају услове теореме 7.3.2, па тада постоји најмањи класа простор $(\mathbb{X}, \overline{\mathbb{T}}, \overline{\mathbb{C}})$ такав да је $\mathbb{T}' \subseteq \overline{\mathbb{T}}$ и $\mathbb{C}' \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Није тешко видети да је класа $\overline{\mathbb{T}} = \{\cup x \mid x$ је коначан пресек елемената из $\mathbb{T}'\}$ управо класа отворених скупова $\mathbb{T}$ из горње „дефиниције” производа класа простора. Слично, класа $\overline{\mathbb{C}} = \{\cap x \mid x$ је коначна унија елемената из $\mathbb{C}'\}$ је класа затворених скупова $\mathbb{C}$. Све у свему, може се закључити да је сваки отворен скуп $O \in \mathbb{T}$ унија скупова облика $O_1 \times O_2$ где је $O_1 \in \mathbb{T}_1$ и $O_2 \in \mathbb{T}_2$ и ова чињеница је од великог значаја за конструкцију аксиоматског система наше логике која ће бити изложена у наредном одељку. (Класе $\mathbb{T}'$ и $\mathbb{C}'$ иначе образују базу класа простора $(\mathbb{X}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$, видети дефиницију базе у [12]).

7.4. Тополошка логика $L(O)$

Све тополошке логике које ће бити изложене у наредним одељцима су утемељене на Сгрооовој логици $L(O)$ [50], која је доста слична логици $L(Q)$ са уопштеним квантификатором „постоји непребројиво много”. Скуп формула логике $L(O)$ генерисан је као у логици $L(Q)$, с једином разликом што сада квантификатор Ox игра улогу квантификатора Qx; слаб модел $(\mathfrak{A}, q)$ је дефинисан на исти начин. Слаб модел $(\mathfrak{A}, q)$ језика $L(O)$ је тополошки уколико је q топологија на A. Интерпретација формуле $Ox\,\varphi$ у тополошкој структури $(\mathfrak{A}, q)$ за валуацију $v : \mathrm{Var} \to A$ дефинисана је тако да:

$$(\mathfrak{A}, q) \models Ox\,\varphi[v] \quad \text{акко} \quad \{b \in A \mid (\mathfrak{A}, q) \models \varphi[v(b \mid x)]\} \in q.$$

Аксиоматски систем у односу на који је доказана комплетност је дат као проширење аксиоматског система класичног предикатског рачуна следећим схема аксиомама:
(A_0) $Ox\varphi(x) \longleftrightarrow Oy\varphi(y)$;
(A_1) $\forall x\,(\varphi \longleftrightarrow \psi) \to (Ox\varphi \longleftrightarrow Ox\psi)$;
(A_2) $Ox\, x = x, Ox\, x \neq x$;
(A_3) $Ox\varphi \wedge Ox\psi \to Ox(\varphi \wedge \psi)$;
(A_4) $\forall y\; Ox\varphi \to Ox\exists y\; \varphi$;

Пре самог доказа потпуности треба истаћи да је доказ базиран на једноставном тврђењу, које гласи: ако је $Y \subseteq X$ и Y није отворен скуп простора (X,τ), тада постоји тачка $a \in Y$ таква да за сваки отворен скуп $U \subseteq Y$ имамо да $a \notin U$. На основу слабе комплетности логике $L(Q)$ закључује се да сваки конзистентан скуп реченица у $L(O)$ има слаб модел $(\mathfrak{A},q)$ у коме важе све аксиоме логике $L(O)$ (видети напомену 7.1.11 и теорему 7.1.15).

Теорема 7.4.1. *Нека је T теорија у $L(O)$. Тада, T је конзистентно у $L(O)$ акко T има тополошки модел.*

Доказ. Уколико T има тополошки модел $(\mathfrak{A},q)$, онда је T конзистентно у $L(O)$, будући да све аксиоме (A_0)-(A_4) важе у сваком тополошком простору. Претпоставимо да је T конзистентно у $L(O)$.

Конструкција тополошког модела је следећи задатак.

За сваку формулу $\varphi(x,y_1,\dots,y_n)$ логике $L(O)$ додаје се нови симбол функције $f^{\varphi}(y_1,\dots,y_n)$ и за било коју дату формулу $\psi(x,z_1,\dots,z_m)$ нека ψ^{φ} буде следећа формула

$$\begin{aligned}\forall y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m \Big(Ox\psi(x,z_1,\dots,z_m)\wedge\neg Ox\varphi(x,y_1,\dots,y_n)\wedge \\ \wedge\forall x\left(\psi(x,z_1,\dots,z_m)\to\varphi(x,y_1,\dots,y_n)\right)\to \\ \to\varphi\left(f^{\varphi}(y_1,\dots,y_n),y_1,\dots,y_n\right)\wedge\neg\psi\left(f^{\varphi}(y_1,\dots,y_n),z_1,\dots,z_n\right)\Big).\end{aligned}$$

Ово значи да, ако φ дефинише скуп који није отворен, онда f^{φ} одређује тачку из тог скупа која није ни у једном подскупу од φ који је дефинабилан помоћу ψ. Нека је $L' = L\cup\{f^{\varphi} \mid \varphi\in L(O)\}$. Треба показати да је $T' = T\cup\{\psi^{\varphi} \mid \varphi,\psi\in L(O)\}$ конзистентан у $L'(O)$. Довољно ће бити да се покаже да је сваки коначан подскуп конзистентан.

Нека је $\psi_i^{\varphi_i}$, $0\le i\le m$, коначан скуп формула облика који је претходно наведен. Како је T конзистентно у $L(O)$, закључује се да T има слаб модел $(\mathfrak{A},q)$, где је q скуп $L(O)$ дефинибилних скупова. За свако $0\le i\le m,\ a_1,\dots,a_{j_i}\in A$, тако да је $(\mathfrak{A},q)\models\neg Ox\varphi_i(x,a_1,\dots,a_{j_i})$, нека $f^{\varphi_i}(a_1,\dots,a_{j_i})$ буде неки елемент скупа

$$\begin{aligned}\left[\varphi_i(x,a_1,\dots,a_{j_i})\right]^{(\mathfrak{A},q)}-\bigcup_{i=0}^{m}\Big[\exists z_1,\dots,z_{m_i}\left(Ox\psi_i(x,z_1,\dots,z_{m_i})\right)\wedge \\ \wedge\psi_i(x,z_1,\dots,z_{m_i})\wedge\forall z\left(\psi_i(z,z_1,\dots,z_{m_i})\to\varphi(z,a_1,\dots,a_{j_i})\right)\Big]^{(\mathfrak{A},q)}.\end{aligned}$$

$f^{\varphi_i}(a_1,\dots,a_{j_i})$ је неки елемент из $\left[\varphi_i(x,a_1,\dots,a_{j_i})\right]^{(\mathfrak{A},q)}$, који није ни у једном отвореном скупу дефинабилним формулом $\psi_i(x,z_1,\dots,z_{m_i})$. Ово је могуће, будући да је T конзистентно са аксиомом (A_4). Иначе, нека је $f^{\varphi_i}(a_1,\dots,a_{j_i})$ било који елемент из A. Тада $(\mathfrak{A},f^{\varphi_1},\dots,f^{\varphi_m},q)\models T\cup\{\psi_i^{\varphi_i}\mid 0\le i\le m\}$. Закључује се да је T' конзистентно и нека је $(\mathcal{B},r')$ слаб модел за T' где је r' скуп $L'(O)$ дефинабилних скупова. Нека је r рестрикција од r' на $L(O)$ дефинабилним скуповима. На основу аксиоме (A_3), r чини базу за топологију, која се може означити са r^*. Може се доказати, индукцијом по сложености $L(O)$ формула, да је $(\mathcal{B},r)\equiv(\mathcal{B},r^*)$, односно да је $(\mathcal{B},r^*)$ тополошки модел за T. Једини нетривијални случај је за формулу $Ox\varphi(x,b_1,\dots,b_n)$. Уколико је $(\mathcal{B},r)\models Ox\varphi(x)$, онда је и $(\mathcal{B},r^*)\models Ox\varphi(x)$, с обзиром да важи $r\subseteq r^*$. Ако је, пак, $(\mathcal{B},r^*)\models Ox\varphi(x)$ и $(\mathcal{B},r)\models\neg Ox\varphi(x)$, онда је $[\varphi(x,b_1,\dots,b_n)]^{(\mathcal{B},r)}=\bigcup_{\alpha\in I}[\varphi_\alpha(x)]^{(\mathcal{B},r)}$, где је $(\mathcal{B},r)\models Ox\varphi_\alpha(x)$ за свако $\alpha\in I$. Међутим, $f^{\varphi}(b_1,\dots,b_n)\in[\varphi(x,b_1,\dots,b_n)]^{(\mathcal{B},r)}\setminus\bigcup_{\alpha\in I}[\varphi_\alpha(x)]^{(\mathcal{B},r)}$, што даје контрадикцију. Према томе T има тополошки модел. $\square$

За тополошку логику $L(O)$ доказане су и теорема компактности и Ловенхајм–Сколемова теорема.

Као последица наведених резултата у овој глави је и теорема потпуности за логику $L(Q,O)$, при чему је њен аксиоматски систем унија аксиома за $L(Q)$ и $L(O)$. Ова логика је погодна за описивање неких особина тополошких простора, као што су сепарабилност, аксиоме пребројивости и слично.

Теорема потпуности показана је и за логику $L_{\omega_1\omega}(O)$ чији је аксиоматски систем дат као унија аксиоматских система логика $L(O)$ и $L_{\omega_1\omega}$ плус аксиома $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} Ox\varphi \rightarrow Ox\bigvee\Phi$, где је Φ било који скуп формула са коначно много слободних промењљивих.

7.5. Тополошка класа-логика $L_{\mathbb{A}}(O,C)$

Централни појам у овом одељку је тополошки класа-простор, који је изложен у одељку 7.3. Тополошке класа-просторе су увели Ћирић и Мијајловић у [11], а своје даље истраживање наставили у [12]. Корак у истом правцу је и рад Ђорђевића, Икодиновића и Мијајловића, у [14], на логици $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, у којој су, као модели, описани тополошки класа-простори.

Без умањивања општости, претпоставимо да је $\mathbb{A}$ пребројив допустив скуп (видети [4]), који садржи све објекте потребне у наредним конструкцијама: скуп ω, формуле, скупове формула итд. Логика $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је инфинитарна логика добијена из логике $L_{\mathbb{A}}$ (видети 3) додавањем квантификатора O и C.

Скуп формула логике $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је најмањи скуп који садржи све атомичне формуле и затворен је за негацију ($\neg$), квантификаторе ($\forall$), ($\exists$), (O), (C) и пребројиве бесконачне конјункције ($\bigwedge$) формула, преко елемената допустивог скупа $\mathbb{A}$, тј. $\bigwedge_{\varphi\in\Phi}\varphi$, $\Phi\in\mathbb{A}$.

Дефиниција 7.5.1. Слаб модел за $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је структура $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$, где је $\mathcal{K}$ модел првог реда на језику L, чији је универзум $\mathbb{K}$ класа, а $\mathbb{T}$ и $\mathbb{C}$ су класе подскупова од $\mathbb{K}$.

Средњи модел за $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је слаб модел $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$, такав да важи:

(i) за сваки $x\in\mathbb{K}$ постоји $U\in\mathbb{T}$ такав да $x\in U$,
(ii) за сваки подскуп $X\subseteq\mathbb{K}$ постоји $F\in\mathbb{C}$ такав да $X\subseteq F$,
(iii) за све $U\in\mathbb{T}$ и $F\in\mathbb{C}$, $U\setminus F\in\mathbb{T}$ и $F\setminus U\in\mathbb{C}$.

Тополошки класа-модел за $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је слаб модел $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$, који је тополошки класа-простор.

Релација задовољења $\models$ дефинисана је на уобичајен начин, тј.

$$(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})\models Ox\varphi[b_1,\dots,b_n] \quad \text{акко} \quad \{a \mid (\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})\models\varphi[a,b_1,\dots,b_n]\}\in\mathbb{T},$$
$$(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})\models Cx\varphi[b_1,\dots,b_n] \quad \text{акко} \quad \{a \mid (\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})\models\varphi[a,b_1,\dots,b_n]\}\in\mathbb{C}.$$

Аксиоматски систем је дат следећим скупом схема аксиома:

1. Све аксиоме за $L_{\mathbb{A}}$;
2. $\forall x(\varphi\longleftrightarrow\psi)\rightarrow(Ox\varphi\longleftrightarrow Ox\psi)$; $\forall x(\varphi\longleftrightarrow\psi)\rightarrow(Cx\varphi\longleftrightarrow Cx\psi)$;
3. $Ox\varphi(x)\rightarrow Oy\varphi(y)$; $Cx\varphi(x)\rightarrow Cy\varphi(y)$;
4. $Ox\,x\neq x$; $Cx\,x\neq x$;
5. $Ox\varphi\wedge Ox\psi\rightarrow Ox(\varphi\wedge\psi)$; $Cx\varphi\wedge Cx\psi\rightarrow Cx(\varphi\vee\psi)$;
6. $Ox\varphi\wedge Cx\psi\rightarrow Ox(\varphi\wedge\neg\psi)$; $Ox\varphi\wedge Cx\psi\rightarrow Cx(\neg\varphi\wedge\psi)$;
7. $\forall y Ox\varphi(x,y)\rightarrow Ox\exists y\varphi(x,y)$; $\forall y Cx\varphi(x,y)\rightarrow Cx\forall y\varphi(x,y)$;

8. $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} Ox\varphi \to Ox\bigvee\Phi$; $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} Cx\varphi \to Cx\bigwedge\Phi$;
9. $\forall x \bigvee_n \bigvee_{\varphi\in\Phi_n} \exists y_1 \ldots \exists y_n \big(Oz\varphi(z,y_1,\ldots,y_n) \wedge \varphi(x,y_1,\ldots,y_n)\big)$;
10. $\bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_m \bigvee_{\psi\in\Phi_m} \exists y_1 \ldots \exists y_m \Big(Cz\psi(z,y_1,\ldots,y_m)\wedge$
$\wedge \forall x\big(\varphi(x,x_1,\ldots,x_n) \to \psi(x,y_1,\ldots,y_m)\big)\Big)$.

Правила извођења су:

1. из φ и $\varphi \to \psi$, закључујемо ψ ;
2. из $\varphi \to \psi$, за све $\psi \in \Psi$, закључујемо $\varphi \to \bigwedge_{\psi\in\Psi} \psi$;
3. из φ, закључујемо $\forall x\varphi$, при чему x није слободно у φ .

Изложени аксиоматски систем за $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ је сагласан, будући да су аксиомама описане особине топологије на правим класама. Потпуност је доказана следећим редоследом: Кислеров доказ слабе теореме потпуности [29], Сгроова конструкција [50] и конструкција јаког модела помоћу средњег модела.

Нека је T конзистентан, Σ-дефинабилан скуп над $\mathbb{A}$, скуп реченица из $L_{\mathbb{A}}(O,C)$. Следећи Сгроову конструкцију из доказа става потпуности за логику $L(O)$, скуп T је проширен скупом реченица $\{\theta^O,\theta^C \mid \theta$ је формула у $L_{\mathbb{A}}(O,C)\}$, где је:
θ^O реченица $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\big(\neg Oz\theta(z,y_1,\ldots,y_n) \longleftrightarrow \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \theta^O_\chi(x,y_1,\ldots,y_n)\big)$, при чему је $\theta^O_\chi(x,y_1,\ldots,y_n)$ формула

$$\forall z_1 \ldots \forall z_m \Bigg(\Big(Oz\chi(z,z_1,\ldots,z_m) \wedge \forall z\big(\chi(z,z_1,\ldots,z_m) \to \theta(z,y_1,\ldots,y_n)\big)\Big) \to \big(\theta(x,y_1,\ldots,y_n) \wedge \neg\chi(x,z_1,\ldots,z_m)\big)\Bigg);$$

и θ^C је реченица $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\big(\neg Cz\theta(z,y_1,\ldots,y_n) \to \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \theta^C_\chi(x,y_1,\ldots,y_n)\big)$, при чему је $\theta^C_\chi(x,y_1,\ldots,y_n)$, формула

$$\forall z_1 \ldots \forall z_m \Bigg(\Big(Cz\chi(z,z_1,\ldots,z_m) \wedge \forall z\big(\theta(z,y_1,\ldots,y_n) \to \chi(z,z_1,\ldots,z_m)\big)\Big) \to \big(\neg\theta(x,y_1,\ldots,y_n) \wedge \chi(x,z_1,\ldots,z_m)\big)\Bigg).$$

Лако се показује да је скуп $\Gamma = T \cup \{\theta^O,\theta^C \mid \theta$ је формула у $L_{\mathbb{A}}(O,C)\}$ конзистентан у $L_{\mathbb{A}}(O,C)$. Такође, треба приметити да за неки тополошки класа-модел $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$ важи, домен $\mathbb{K}$ је права класа акко $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C}) \models \neg Ox\, x=x$. Међутим, како је za $\theta(x) \equiv x=x$, θ^O контрадикторно са аксиоматским системом логике $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, [14], Кислеровом конструкцијом добијамо слаб скуповни модел $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$ теорије Γ, при чему су $\mathbb{T}$ и $\mathbb{C}$ скупови $L_{\mathbb{A}}(O,C)$-дефинабилних скупова са параметрима у скупу $\mathbb{K}$, тако да важи:

(Б$_1$) за сваки $x \in \mathbb{K}$ постоји $U \in \mathbb{T}$, такав да $x \in U$ (према аксиоми 9.),
(Б$_2$) за сваки $L_{\mathbb{A}}(O,C)$-дефинабилан подскуп $X \subseteq \mathbb{K}$ постоји $F \in \mathbb{C}$ такав да је $X \subseteq F$ (према аксиоми 10.),
(Б$_3$) за сваки $U \in \mathbb{T}$ и $F \in \mathbb{C}$, $U \setminus F \in \mathbb{T}$ и $F \setminus U \in \mathbb{C}$ (према аксиоми 6.).

Услов (Б$_2$) важи једино за $L_{\mathbb{A}}(O,C)$-дефинабилне подскупове од $\mathbb{K}$, а циљ је да сви подскупови од $\mathbb{K}$ имају својство (Б$_2$). Овај проблем је решен конструкцијом средњег модела ([46] и поглавље 4).

Нека је $(\mathcal{K},\mathbb{T}',\mathbb{C}')$ средњи модел и нека је $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$ структура, таква да је $\mathbb{T} = \{\bigcup x \mid x \in T_1\}$ и $\mathbb{C} = \{\bigcap x \mid x \in C_1\}$ при чему је $T_1 = \{x \mid x$ је коначан пресек елемената из $\mathbb{T}'\}$

и $C_1 = \{x \mid x$ је коначна унија елемената из $\mathbb{C}'\}$ (видети теорему 7.3.2). Користећи Сгроову конструкцију са θ^O, θ^C реченицама, где је θ формула у $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, доказано је да важи $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C}) \equiv_{L_{\mathbb{A}}(O,C)} (\mathcal{K},\mathbb{T}',\mathbb{C}')$, одакле се добија да је $(\mathcal{K},\mathbb{T},\mathbb{C})$ тополошки класа-модел за теорију Γ, а самим тим и за T.

7.6. Теорема комплетности за непрекидне функције и тополошки производ

Нека је $L(O^n_{n\in\omega})$ језик настао додавањем нових симбола квантификатора O^n за $n \in \omega$ језику L класичног предикатског рачуна са симболом једнакости $=$. Према томе, у логици која ће бити описана у овом одељку (видети [49]), имамо квантификаторе $\exists x$, $\forall x$ и $O^n x_1,\ldots,x_n$ за $n \in \omega$. Логика $L(O^n_{n\in\omega})$ је екстензија Сгроове логике $L(O)$ [50], погодна за проучавање појма непрекидности на класичним тополошким просторима, као и производа тополошких простора (видети одељак 7.2)

Слаб модел за $L(O^n_{n\in\omega})$ је модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2,q_3\ldots)$, где је $\mathfrak{A}$ класичан модел за L и $q_n \subseteq \mathbb{P}(A^n)$. Релација задовољења је дефинисана на уобичајен начин индукцијом по сложености формуле φ, где је услов са квантификаторима $O^n x_1,\ldots,x_n$:

$$(\mathfrak{A},q_1,q_2,q_3\ldots) \models O^n v_m,\ldots,v_{m+n}\varphi[a_1,\ldots,v_m,\ldots,v_{m+n},\ldots,a_n]$$

акко

$$\{(b_m,\ldots,b_{m+n}) \mid (\mathfrak{A},q_1,q_2,q_3\ldots) \models \varphi[a_1,\ldots,a_{m-1},b_m,\ldots,b_{m+n},\ldots,a_k]\} \in q_n.$$

Слаб $L(O^n_{n\in\omega})$ модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2,q_3\ldots)$ је тополошки акко q_n, $n \in \omega$, је топологија на A^n. Тополошки модел $(\mathfrak{A},q_1,q_2,q_3\ldots)$ је комплетан акко је q_k k-ти тополошки производ од q_1 на A.

Аксиоматски систем за логику $L(O^n_{n\in\omega})$ је проширење аксиоматског система класичног предикатског рачуна следећим схема аксиомама:

(B_0) (i) $\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi \longleftrightarrow \psi) \to (O^n x_1,\ldots,x_n\varphi \longleftrightarrow O^n x_1,\ldots,x_n\psi)$,
(ii) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow O^n y_1,\ldots,y_n\varphi(y_1,\ldots,y_n)$;

(B_1) $O^n x_1,\ldots,x_n\, x_1 = x_1$;

(B_2) $O^n x_1,\ldots,x_n\, x_1 \neq x_1$;

(B_3) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi \wedge O^n x_1,\ldots,x_n\psi \to O^n x_1,\ldots,x_n(\varphi\wedge\psi)$;

(B_4) $\forall y\, O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n,y) \to O^n x_1,\ldots,x_n\,\exists y\,\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$;

(B_5) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi \wedge O^m x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\psi \to O^{n+m} x_1,\ldots,x_{n+m}(\varphi\wedge\psi)$;

(B_6) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \to O^k x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ где је $\sigma\colon m \to m$, $|\sigma[m]| = k$ и скуп вредности је $\sigma = \{i_1 < \cdots < i_k\}$;

(B_7) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \forall x_1,\ldots,x_k O^{n-k} x_{k+1},\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$;

$(B_8)_\varphi$ $O^m y_1,\ldots,y_m\psi(y_1,\ldots,y_m) \to O^{m+n-k} z_1,\ldots,z_n,y_{k+1},\ldots,y_m\Big(\exists y_1,\ldots,y_k\big(\psi(y_1,\ldots,y_m)\wedge$
$\wedge\varphi(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_k)\big)\Big)$ где $\varphi(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_k)$ дефинише (n,k)-арну релацију.

Аксиоме (B_0)-(B_4) су аналогне аксиомама логике $L(O)$ и формализују појам топологије. Значење аксиоме (B_5) је да је производ отворених скупова отворен скуп. (B_6) и (B_7) тврде да је пермутација и пројекција отвореног скупа такође отворен скуп. $(B_8)_\varphi$ описује непрекидност релације φ, тј. инверзна слика дела отвореног скупа је отворен скуп.

Теорема сагласности важи с обзиром да све аксиоме (B_0)-$(\mathrm{B}_8)_\varphi$ важе у сваком комплетном тополошком моделу, где је φ непрекидно, и описују особине тополошког производа и непрекидних пресликавања.

Нека је T непротивуречна $L(O^n_{n\in\omega})$ теорија.

Применом Кислерове конструкције и Сгроове конструкције тополошких модела из $L(O)$, потпуно аналогно се за конзистентан скуп реченица T конструише тополошки модел $(\mathfrak{A}, q_1, q_2, q_3 \ldots)$ у коме је свака релација φ_α, $\alpha \in I$, „непрекидна". Главни проблем је како од тополошког модела конструисати комплетни тополошки модел. Идеја је да се топологији q_1 додају нови скупови. Међутим, поставља се питање шта треба додати топологијама q_n, $n \in \omega$ како бисмо сада имали модел (на проширеном језику са U_β, за свако $\mathcal{U}_\beta$, $\beta \in D$, које смо додали топологији q_1), који задовољава све аксиоме (B_0)-(B_7) и $(\mathrm{B}_8)_\varphi$. Конструкција следеће колекције релација даје одговор на постављено питање.

Нека су φ_α, $\alpha \in I$ колекција (n_α, m_α)-арних релација које задовољавају $(\mathrm{B}_8)_{\varphi_\alpha}$, $\alpha \in I$ (из тополошког модела). Нека је $\varphi^{-1}_\alpha = \{(\vec{b}, \vec{a}) \mid (\vec{a}, \vec{b}) \in \varphi_\alpha\}$ инверзна релација од φ_α, $\alpha \in I$, и нека је $WT_0 = \{\varphi^{-1}_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup \{$релација једнакости у сваком скупу $A^n, n \in \omega\}$. Конструисан је следећи низ:

$$\begin{aligned}
WT_{n+1} = WT_n &\cup \big\{\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n_\varphi)}, y_1, \ldots, y_{m_\varphi}),\, \sigma\colon n_\varphi \to n_\varphi,\, \varphi \in WT_n\big\}\\
&\cup \big\{\varphi(x_1, \ldots, x_{n_\varphi}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(m_\varphi)}),\, \sigma\colon m_\varphi \to m_\varphi,\, \varphi \in WT_n\big\}\\
&\cup \big\{\varphi(x_1, \ldots, x_{n_\varphi}, y_1, \ldots, y_{m_\varphi}) \wedge \psi(z_1, \ldots, z_{n_\psi}, t_1, \ldots, t_{m_\psi}),\, \varphi, \psi \in WT_n\big\}\\
&\cup \big\{\varphi(x_1, \ldots, c, \ldots, x_{n_\varphi}, y_1, \ldots, y_{m_\varphi}),\, \varphi \in WT_n,\, c \text{ је симбол константе}\big\}\\
&\cup \big\{\varphi(x_1, \ldots, x_{n_\varphi}, y_1, \ldots, c, \ldots, y_{m_\varphi}),\, \varphi \in WT_n,\, c \text{ је симбол константе}\big\}\\
&\cup \big\{\exists y_1, \ldots, y_k\big(\varphi(x_1, \ldots, x_{n_\varphi}, y_1, \ldots, y_{m_\varphi}) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_{n_\psi}, z_1, \ldots, z_{m_\psi})\big),\\
&\qquad k \le m_\varphi,\, k \le m_\psi, \text{ тј. композиција две релације, где } \varphi, \psi \in WT_n\big\}.
\end{aligned}$$

Нека је $WT = \bigcup_{n\in\omega} WT_n$. Закључује се, свака $\varphi \in WT$ „пресликава" отворени скуп у отворени скуп. Нека је топологија q^*_n, $n \in \omega$ дефинисана на следећи начин: q^*_n је топологија генерисана помоћу скупа $\{\varphi\big(\prod_{i=1}^k B_j\big) \mid$ где је сваки $B_j \in q_{k_j}$ или $B_j = \mathcal{U}_\beta$ за $1 \le j \le k$, $\varphi \in WT$ и φ пресликава у $A^n\}$. Лако се доказује да је $(\mathfrak{A}, q^*_1, q^*_2, q^*_3 \ldots)$ тополошки модел, који задовољава све аксиоме (B_0)-(B_7) и $(\mathrm{B}_8)_{\varphi_\alpha}$, $\alpha \in I$, на проширеном језику унарним предикатским симболима U_β, за сваки скуп $\mathcal{U}_\beta$.

Применом претходне конструкције доказује се следећа лема, која је кључна у доказу става потпуности.

Лема 7.6.1. *Нека је T $L(O^n_{n\in\omega})$ теорија конзистентна са аксиомама (B_0)-(B_7) и $(B_8)_{\varphi_\alpha}$, $\alpha \in I$. Уколико је $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ n-торка таква да важи $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ и $O^n x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ је конзистентно са T, онда $V_i(c_i)$, $Ox V_i(x)$, $1 \le i \le n$, и $\forall x_1, \ldots, x_n \big(\bigwedge_{i=1}^n V(x_i) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)\big)$ је конзистентно са T и аксиомама (B_0)-(B_7) и $(B_8)_{\varphi_\alpha}$, $\alpha \in I$. $V_i(x)$, $1 \le i \le n$ су нови симболи унарних предиката.*

Поновном применом довољног броја пута последње леме, до комплетне теорије тополошког модела $(\mathfrak{A}, q_1, q_2, q_3 \ldots)$ за непротивуречну теорију T, добија се комплетан тополошки модел теорије T.

За ову логику су доказане теорема комплетности и Ловенхајм–Сколемова теорема.

7.7. Логика $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$

Као и у претходној логици, наш циљ у овом одељку ће бити теорема комплетности за тополошке класа моделе у односу на аксиоматски систем у коме ће, поред аксиома које описују тополошке класа просторе, бити и аксиоме које ће описивати непрекидне функције[1] и производ на тополошким класа просторима. Овде се овај проблем може једноставније решити с обзиром на изражајну моћ логика на допустивим скуповима. Наиме, нека својства другог реда могу бити описана у логици $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$, улогу универзалног и егзистенцијалног квантификатора другог реда могу да преузму пребројиве конјункције облика $\bigwedge\limits_n \bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi_n}$ и пребројиве дисјункције $\bigvee\limits_n \bigvee\limits_{\varphi\in\Phi_n}$, где је Φ_n скуп формула из Φ са $n+1$ слободних промењљивих, тако да $\Phi = \bigcup\limits_n \Phi_n$ и $\Phi, \Phi_n \in \mathbb{A}$.

Као и у логици $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ (видети одељак 7.5), претпоставимо да је $\mathbb{A}$ пребројив допустив скуп који садржи све објекте потребне у наредним конструкцијама: скуп ω, формуле, скупове формула итд. Инфинитарна логика $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ је добијена додавањем квантификатора $O^n x_1,\ldots,x_n$ и $C^n x_1,\ldots,x_n$, за свако $n\in\omega$, логици $L_{\mathbb{A}}$. Скуп формула логике $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ је најмањи скуп који садржи све атомичне формуле и затворен је за негацију, квантификаторе $\forall x$, $\exists x$, $O^n x_1,\ldots,x_n$ и $C^n x_1,\ldots,x_n$, као и за пребројиве конјункције $\bigwedge$, тј. ако је Φ скуп формула са коначно много слободних промењљивих и $\Phi\in\mathbb{A}$, тада је и $\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi}\varphi$ такође формула логике $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$.

Дефиниција 7.7.1. Слаб модел за $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ је структура $(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$, где је $\mathcal{K}$ модел првог реда на језику L чији универзум $\mathbb{K}$ је класа и $\mathbb{T}_n$ и $\mathbb{C}_n$ су класе подскупова од $\mathbb{K}^n$.

Дефиниција 7.7.2. Средњи модел за $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ је слаб модел $(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$, такав да важе следећи услови:

(i) За свако $n\in\mathbb{N}$, за сваки $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ постоји $U\in\mathbb{T}_n$ такав да је $(x_1,\ldots,x_n)\in U$;
(ii) за сваки подскуп $X\subseteq\mathbb{K}^n$ постоји $F\in\mathbb{C}_n$ такав да је $X\subseteq F$;
(iii) за свако $n\in\mathbb{N}$, за сваки $U\in\mathbb{T}_n$ и $F\in\mathbb{C}_n$ важи да је $U\setminus F\in\mathbb{T}_n$ и $F\setminus U\in\mathbb{C}_n$.

Дефиниција 7.7.3. Комплетан тополошки класа модел за $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ је слаб модел $(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ такав да је за свако $n\in\omega$, $(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)$ тополошки класа простор и важи да је $\mathbb{T}_k$ k-ти тополошки производ од $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{C}_k$ је k-ти тополошки производ од $\mathbb{C}_1$.

Релација задовољења је дефинисана на уобичајен начин уз услове за квантификаторе $O^n x_1,\ldots,x_n$ и $C^n x_1,\ldots,x_n$:

$$(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models O^k x_1,\ldots,x_k \varphi[x_1,\ldots,x_k,b_1,\ldots,b_l] \quad \text{акко}$$
$$\{(a_1,\ldots,a_k) \mid (\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l]\} \in \mathbb{T}_k$$

за вредност $(b_1,\ldots,b_l)\in\mathbb{K}^l$;

$$(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models C^k x_1,\ldots,x_k \varphi[x_1,\ldots,x_k,b_1,\ldots,b_l] \quad \text{акко}$$
$$\{(a_1,\ldots,a_k) \mid (\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l]\} \in \mathbb{C}_k$$

за вредност $(b_1,\ldots,b_l)\in\mathbb{K}^l$.

Аксиоматски систем логике $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$ дат је следећим скупом формула:

[1]Реч cont у имену логике означава непрекидност.

(1) Све аксиоме за $L_{\mathbb{A}}$;

(2) $\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi\leftrightarrow\psi)\to(O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\leftrightarrow O^n x_1,\ldots,x_n\psi)$;
$\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi\leftrightarrow\psi)\to(C^n x_1,\ldots,x_n\varphi\leftrightarrow C^n x_1,\ldots,x_n\psi)$;

(3) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to O^n y_1,\ldots,y_n\varphi(y_1,\ldots,y_n)$;
$C^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to C^n y_1,\ldots,y_n\varphi(y_1,\ldots,y_n)$;

(4) $O^n x_1,\ldots,x_n(x_1\neq x_1)$;
$C^n x_1,\ldots,x_n(x_1\neq x_1)$;

(5) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge O^n x_1,\ldots,x_n\psi\to O^n x_1,\ldots,x_n(\varphi\wedge\psi)$;
$C^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge C^n x_1,\ldots,x_n\psi\to C^n x_1,\ldots,x_n(\varphi\vee\psi)$;

(6) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge C^n x_1,\ldots,x_n\psi\to O^n x_1,\ldots,x_n(\varphi\wedge\neg\psi)$;
$O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge C^n x_1,\ldots,x_n\psi\to C^n x_1,\ldots,x_n(\neg\varphi\wedge\psi)$;

(7) $\forall y\, O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)\to O^n x_1,\ldots,x_n\exists y\,\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$;
$\forall y\, C^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)\to C^n x_1,\ldots,x_n\forall y\,\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$;

(8) $\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\to O^n x_1,\ldots,x_n\bigvee\Phi$;
$\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} C^n x_1,\ldots,x_n\varphi\to C^n x_1,\ldots,x_n\bigwedge\Phi$;

(9) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge O^m x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\psi\to O^{n+m}x_1,\ldots,x_{m+n}(\varphi\wedge\psi)$;
$C^n x_1,\ldots,x_n\varphi\wedge C^m x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\psi\to C^{n+m}x_1,\ldots,x_{n+m}(\varphi\wedge\psi)$;

(10) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to O^k x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$;
$C^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to C^k x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$,
где $\sigma: n\to n$, $|\sigma[n]=k|$ и скуп вредности је $\sigma=\{i_1<\cdots<i_k\}$;

(11) $O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to\forall x_1,\ldots,x_k O^{n-k}x_{k+1},\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$;
$C^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\to\forall x_1,\ldots,x_k C^{n-k}x_{k+1},\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$;

(12) $\forall x_1,\ldots,x_n\bigvee\limits_{m}\bigvee\limits_{\varphi\in\Phi_{m+n}}\exists y_1,\ldots,y_{m-1}\big(O^n z_1,\ldots,z_n\varphi(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_{m-1})\wedge$
$\wedge\varphi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1})\big)$;

(13) $\bigwedge\limits_{n}\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi_{n+k-1}}\forall x_1,\ldots,x_n\bigvee\limits_{m}\bigvee\limits_{\psi\in\Phi_{m+k-1}}\exists y_1,\ldots,y_m\Big(C^k z_1,\ldots,z_k\psi(z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_m)\wedge$
$\wedge\forall u_1,\ldots,u_k\big(\varphi(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_n)\to\psi(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_m)\big)\Big)$;

(14) $O^m y_1,\ldots,y_m\psi(y_1,\ldots,y_m)\to\bigwedge\limits_{l}\bigwedge\limits_{\theta\in\Phi_{n+l-1}}\forall v_1,\ldots,v_l\Big(O^n x_1,\ldots,x_n\theta(x_1,\ldots,x_n,v_1,\ldots,v_l)\to$
$\to O^{m+n-k}z_1,\ldots,z_n,y_{k+1},\ldots,y_m\Big(\exists y_1,\ldots,y_k\big(\psi(y_1,\ldots,y_m)\wedge\varphi(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_k)\big)\wedge$
$\wedge\theta(z_1,\ldots,z_n,v_1,\ldots,v_l)\Big)\Big)$;
где $\varphi(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_k)$ дефинише једну (n,k)-арну релацију;

(15) $\bigwedge\limits_{n}\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi_{n-1}}\forall u_1,\ldots,u_n\bigvee\limits_{k\in\omega^n}\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\bigvee\limits_{\varphi_i\in\Phi_{k_i}}\exists x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_i}}\Big(O^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)\wedge\varphi(u_1,\ldots,u_n)\to$
$\to\Big(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\big(Ox\varphi_i(x,x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_i}})\wedge\varphi_i(u_i,x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_i}})\big)\wedge$
$\wedge\forall y_1,\ldots,y_n\big(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(y_i,x_{i_1},\ldots,x_{i_{k_i}})\to\varphi(y_1,\ldots,y_n)\big)\Big)\Big)$;
(Формула φ је написана без параметара ради поједностављења).

(16) $\forall y_1,\ldots,y_n\bigwedge\limits_{k}\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi_{k+n-1}}\forall z_1,\ldots,z_k\bigvee\limits_{l\in\omega^n}\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\bigvee\limits_{\varphi_i\in\Phi_{l_i}}\exists x_{i_1},\ldots,x_{i_{l_i}}\Big(C^n x_1,\ldots,x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k)\wedge$

$$\wedge \neg\varphi(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_k) \to \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} Ox\varphi_i(x,x_{i_1},\dots,x_{i_{l_i}}) \wedge \varphi_i(y_i,x_{i_1},\dots,x_{i_{l_i}})\Big) \wedge$$
$$\wedge \forall x_1,\dots,x_n\big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i,x_{i_1},\dots,x_{i_{l_i}}) \to \neg\varphi(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)\big)\Big).$$

Аксиоме (2)–(8) и (12), (13) формализују појам топологије на класама и аналогне су аксиомама $L_{\mathbb{A}}(O,C)$ логике. Аксиоме (9), (10) и (11) описују својства тополошког производа. Аксиома (14) је еквивалент „непрекидности” релације φ (видети теорему 7.3.5.), док аксиома (15) обезбеђује да је $\mathbb{T}_k$ k-ти тополошки производ од $\mathbb{T}_1$ на $\mathbb{K}$. На основу тeореме 7.3.3, аксиома (16) повлачи да је $\mathbb{C}_k$ k-ти тополошки производ од $\mathbb{C}_1$

Правила извођења су иста као у логици $L_{\mathbb{A}}(O,C)$.

Аксиоматски систем за логику $L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ је сагласан, с обзиром да све аксиоме описују особине топологије на правим класама као и особине тополошког производа и непрекидних функција тополошких класа простора. Да је овај систем и потпун у односу на класу комплетних тополошких класа модела доказаћемо слично као у случају са логиком $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, тј. комбинацијом Кислеровог доказа слабе теореме потпуности, конструкције Сгроа и конструкције јаког модела помоћу средњег. (С обзиром на аксиому (13), конструкција средњег модела је неопходна [14]).

Два једноставна тврђења која ће бити коришћена за конструкцију јаког модела из средњег су:

(1) ако је $Y\subseteq X$ и Y није отворен скуп простора (X,τ), тада постоји тачка $c\in Y$ таква да за сваки отворен скуп $U\subseteq Y$ имамо да $c\notin U$.

(2) ако је $Y\subseteq X$ и Y није затворен скуп простора (X,τ), тада постоји тачка $c\notin Y$ таква да за сваки затворен скуп F такав да $Y\subseteq F$ имамо да $c\in F$.

Претпоставимо да је T непротивречан, Σ-дефинабилан над $\mathbb{A}$ скуп реченица из $L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$. За сваку формулу $\theta(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ означимо са θ^{O^k} и θ^{C^k}, $k\in\mathbb{N}$, следеће реченице:

(O) θ^{O^k} је $\forall y_1,\dots,y_n\exists x_1,\dots,x_k(\neg O^k z_1,\dots,z_k\theta(z_1,\dots,z_k,y_1,\dots,y_n)\to$
$\to \bigwedge_{m}\bigwedge_{\chi\in\Phi_{m+k-1}} \theta_{\chi}^{O^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n))$,

при чему је $\theta_{\chi}^{O^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n))$ формула облика

$$\forall z_1,\dots,z_m\Bigg(\Big(O^k u_1,\dots,u_k\chi(u_1,\dots,u_k,z_1,\dots,z_m)\wedge\forall v_1,\dots,v_k\big(\chi(v_1,\dots,v_k,z_1,\dots,z_m)\to$$
$$\theta(v_1,\dots,v_k,y_1,\dots,y_n)\big)\Big)\to\big(\theta(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\wedge\neg\chi(x_1,\dots,x_k,z_1,\dots,z_m)\big)\Bigg).$$

(C) θ^{C^k} је $\forall y_1,\dots,y_n\exists x_1,\dots,x_k(\neg C^k z_1,\dots,z_k\theta(z_1,\dots,z_k,y_1,\dots,y_n)\to$
$\to \bigwedge_{m}\bigwedge_{\chi\in\Phi_{m+k-1}} \theta_{\chi}^{C^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n))$,

при чему је $\theta_{\chi}^{C^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n))$ формула облика

$$\forall z_1,\dots,z_m\Bigg(\Big(C^k u_1,\dots,u_k\chi(u_1,\dots,u_k,z_1,\dots,z_m)\wedge\forall v_1,\dots,v_k\big(\theta(v_1,\dots,v_k,y_1,\dots,y_n)\to$$
$$\chi(v_1,\dots,v_k,z_1,\dots,z_m)\big)\Big)\to\big(\neg\theta(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\wedge\chi(x_1,\dots,x_k,z_1,\dots,z_m)\big)\Bigg).$$

Према томе, $\theta_{\chi}^{O^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ је скуп свих k-торки $(x_1,\dots,x_k)$ које су у θ, а нису ни у једном отвореном подскупу од θ дефинисаном помоћу формуле χ преко параметара. Формула θ^{O^k} значи да за произвољне параметре, ако скуп θ није отворен, тада он није једнак никаквој унији отворених скупова дефинабилних у $L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$.

Слично, $\theta_\chi^{C^k}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ је скуп свих k-торки $(x_1,\dots,x_k)$ који припадају затвореном скупу дефинисаном помоћу χ преко параметара и не припадају скупу θ, док θ^{C^k} значи да за произвољне параметре, ако θ није затворен, тада он није пресек затворених скупова дефинабилних у $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$.

Потпуно слично као што је у [14], може се доказати да је скуп реченица

$$\Gamma = T\cup\{\theta^{O^k},\theta^{C^k}\mid \theta \text{ је формула у } L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega},\ k\in\mathbb{N}\}$$

конзистентан у $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$.

Користећи Кислеров доказ теореме слабе потпуности [29] (видети одељак 7.1) добијамо слаб модел $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ у коме су задовољене све аксиоме. Међутим, уколико би у слабом моделу важило $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}\models\neg O^k x_1,\dots,x_k(x_1=x_1\wedge\cdots\wedge x_k=x_k)$, тада бисмо имали да је θ^{O^k} контрадикторно аксиоми (12), где је $\theta\equiv(x_1=x_1\wedge\cdots\wedge x_k=x_k)$ за било које $k\in\mathbb{N}$. На основу овога се може закључити да је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ слаб скуповни модел[2] теорије Γ, при чему су $\mathbb{T}_n$ и $\mathbb{C}_n$ скупови $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ дефинабилних скупова са параметрима у скупу $\mathbb{K}$.

Посматрајмо следеће својство тополошких (класа) простора: сваки скуп има затворени надскуп. Аксиома (13) ово својство ограничава, у слабом моделу $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$, само на $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ дефинабилне скупове, тј. важи: за сваки $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$-дефинабилан подскуп $X\subseteq\mathbb{K}^k$ постоји $F\in\mathbb{C}_k$ тако да важи $X\subseteq F$. Циљ је да се ово својство прошири на све подскупове од $\mathbb{K}^n$. Овај проблем се може решити конструкцијом средњег модела, која је слична као у логици $L_{\mathbb{A}}(O,C)$.

Теорема 7.7.4 (Теорема потпуности за средње моделе логике $L_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$). *Сваки непротивуречан скуп реченица T који је Σ-дефинабилан над $\mathbb{A}$, има средњи модел.*

Доказ. Нека је $K=L\cup C$ језик који се уводи у Кислеровој конструкцији слабог модела $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ за скуп реченица Γ и нека је M језик који садржи две врсте променљивих: $X,Y,Z,\dots$ променљиве за скупове и $x,y,z,\dots$ променљиве за урелементе. Затим, M садржи и предикате: $E_n(x_1,\dots,x_n,X)$, $O^n(X)$ и $C^n(X)$, $n\in\omega$, са значењем $(x_1,\dots,x_n)\in X$, X је отворен скуп n-торки, X је затворен скуп n-торки. Ту су и симболи константи C_φ, за сваку формулу φ у $K_{\mathbb{A}}^{\text{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$.

Нека је S следећи скуп реченица из $M_{\mathbb{A}}$:

(1) (Аксиома добре дефинисаности)
$\forall X\bigwedge\limits_{n<m}\neg\exists x_1,\dots,x_n,y_{n+1},\dots,y_m\big(E_m(x_1,\dots,x_n,y_{n+1},\dots,y_m,X)\wedge E_n(x_1,\dots,x_n,X)\big)$,
при чему је $\{x_1,\dots,x_n\}\cap\{y_{n+1},\dots,y_m\}=\varnothing$;

(2) (Аксиома екстензионалности)
$\forall x_1,\dots,x_n\,(E_n(x_1,\dots,x_n,X)\longleftrightarrow E_n(x_1,\dots,x_n,Y))\longleftrightarrow X=Y$;

(3) (Аксиоме задовољивости)
1. $\forall x_1,\dots,x_n\,(\forall y_1,\dots,y_m E_{n+m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,C_R)\longleftrightarrow E_{n+m}(x_1,\dots,x_n,c_1,\dots,c_m,C_R))$ за сваку атомичну формулу $R(x_1,\dots,x_n,c_1,\dots,c_m)$ језика $K_{\mathbb{A}}$;
2. $\forall x_1,\dots,x_n\,(E_n(x_1,\dots,x_n,C_{\neg\varphi})\longleftrightarrow\neg E_n(x_1,\dots,x_n,C_\varphi))$;
3. $\forall x_1,\dots,x_n\,(E_n(x_1,\dots,x_n,C_{\wedge\Phi})\longleftrightarrow\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi}E_n(x_1,\dots,x_n,C_\varphi))$;
4. $\forall x_1,\dots,x_n\,(E_n(x_1,\dots,x_n,C_{\forall x\varphi})\longleftrightarrow\forall x E_{1+n}(x,x_1,\dots,x_n,C_\varphi))$;
5. $\forall x_1,\dots,x_n\,(E_n(x_1,\dots,x_n,C_{\exists x\varphi})\longleftrightarrow\exists x E_{1+n}(x,x_1,\dots,x_n,C_\varphi))$;

[2] Уколико би у моделу $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ домен $\mathbb{K}$ био права класа, онда би важило $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}\models\neg Ox(x=x)$.

6. $\forall x_1,\ldots,x_m \left(E_m(x_1,\ldots,x_m,C_{O^n y_1,\ldots,y_n \varphi}) \longleftrightarrow (\exists X)\Big(O^n(X) \wedge \right.$
$\left. \wedge \forall y_1,\ldots,y_n \big(E_n(y_1,\ldots,y_n,X) \longleftrightarrow E_{n+m}(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m,C_\varphi)\big)\Big)\right)$;
7. $\forall x_1,\ldots,x_m \left(E_m(x_1,\ldots,x_m,C_{C^n y_1,\ldots,y_n \varphi}) \longleftrightarrow (\exists X)\Big(C^n(X) \wedge \right.$
$\left. \wedge \forall y_1,\ldots,y_n \big(E_n(y_1,\ldots,y_n,X) \longleftrightarrow E_{n+m}(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m,C_\varphi)\big)\Big)\right)$;

(4) (Аксиоме подбаза)
1. $\forall x_1,\ldots,x_n \,\exists X\,(O^n(X) \wedge E_n(x_1,\ldots,x_n,X))$;
2. $\forall X\,\exists Y \Big(\exists x_1,\ldots,x_n E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \rightarrow$
$\rightarrow C^n(Y) \wedge \forall x_1,\ldots,x_n \big(E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \rightarrow E_n(x_1,\ldots,x_n,Y)\big)\Big)$;
3. $\forall X\,\forall Y\,\forall Z \left(O^n(X) \wedge C^n(Y) \rightarrow \Big(\Big(\forall x_1,\ldots,x_n \,\big(E_n(x_1,\ldots,x_n,Z) \longleftrightarrow \right.$
$\left. \longleftrightarrow \neg E_n(x_1,\ldots,x_n,Y) \wedge E_n(x_1,\ldots,x_n,X)\big) \rightarrow O^n(Z)\Big)\Big)\right)$;
4. $\forall X\,\forall Y\,\forall Z \left(O^n(X) \wedge C^n(Y) \rightarrow \Big(\Big(\forall x_1,\ldots,x_n \,\big(E_n(x_1,\ldots,x_n,Z) \longleftrightarrow \right.$
$\left. \longleftrightarrow \neg E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \wedge E_n(x_1,\ldots,x_n,Y)\big) \rightarrow C^n(Z)\Big)\Big)\right)$;

(5) (Аксиоме тополошког производа и непрекидности)
1. $\forall X\,\forall Y\,\forall Z \Big(O^n(X) \wedge O^m(Y) \wedge \forall x_1,\ldots,x_{n+m} \,\big(E_{n+m}(x_1,\ldots,x_{n+m},Z) \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \wedge E_m(x_{n+1},\ldots,x_{n+m},Y)\big) \rightarrow O^{n+m}(Z)\Big)$;
2. $\forall X\,\forall Y \Big(O^n(X) \wedge \forall x_{i_1},\ldots,x_{i_k} \,\big(E_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},Y) \longleftrightarrow E_n(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},X)\big) \rightarrow O^k(Y)\Big)$,
где је $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \rightarrow \{1,\ldots,n\}$ и скуп вредности $\sigma = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$
(слично и за предикате C^n);
3. $\forall X\,\forall Y \left(O^n(X) \wedge \forall x_1,\ldots,x_k \,\Big(\exists y_{k+1},\ldots,y_n \, E_n(x_1,\ldots,x_k,y_{k+1},\ldots,y_n,X) \rightarrow \right.$
$\left. \rightarrow \forall x_{k+1},\ldots,x_n \,\big(E_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n,Y) \longleftrightarrow E_n(x_1,\ldots,x_n,X)\big)\Big) \rightarrow O^{n-k}(Y)\right)$;
4. $\forall X \forall x_1,\ldots,x_n \left(O^n(X) \wedge E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \rightarrow \exists Y_1 \ldots \exists Y_n \,\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \big(O(Y_i) \wedge E_1(x_i,Y_i)\big) \wedge \right.$
$\left. \wedge \forall y_1,\ldots,y_n \,\big(\bigwedge_{i=1}^{n} E_1(y_i,Y_i) \rightarrow E_n(y_1,\ldots,y_n,X)\big)\Big)\right)$;
5. $\forall X \forall x_1,\ldots,x_n \left(C^n(X) \wedge \neg E_n(x_1,\ldots,x_n,X) \rightarrow \exists Y_1 \ldots \exists Y_n \,\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \big(O(Y_i) \wedge E_1(x_i,Y_i)\big) \wedge \right.$
$\left. \wedge \forall y_1,\ldots,y_n \,\big(\bigwedge_{i=1}^{n} E_1(y_i,Y_i) \rightarrow \neg E_n(y_1,\ldots,y_n,X)\big)\Big)\right)$;
6. $\forall X\,\forall Y\,\forall Z \Big(O^m(X) \wedge O^n(Z) \rightarrow \Big(\forall z_1,\ldots,z_n,y_{k+1},\ldots,y_m \,\Big(\big(\exists y_1,\ldots,y_k(E_m(y_1,\ldots,y_m,X) \wedge$
$\wedge E_{n+k}(z_1,\ldots,z_n,y_1,\ldots,y_k,C_{\varphi_a}))\wedge E_n(z_1,\ldots,z_n,Z) \longleftrightarrow E_{m+n-k}(z_1,\ldots,z_n,y_{k+1},\ldots,y_m,Y)\big) \rightarrow$

$O^{m+n-k}(Y)\Big)\Big)\Big)$;

за сваку (n,k)-арну релацију φ_α, $\alpha \in I$;

(6) (Аксиоме аналогне свим аксиомама φ логике $K_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$)
$\forall x_1,\ldots,x_n\, E_n(x_1,\ldots,x_n,C_\varphi)$;

(7) (Аксиома реализације реченица φ из Γ)
$\forall x\, E_1(x, C_\varphi)$;

Теорија S је Σ-дефинабилна над $\mathbb{A}$ и сваки $S_0 \subseteq S$, $S_0 \in \mathbb{A}$ има стандардни модел, јер аксиома

$$\bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in(S_0')_{n+k-1}} \forall x_1,\ldots,x_n \bigvee_m \bigvee_{\psi\in(S_0')_{m+k-1}} \exists y_1,\ldots,y_m\Big(C^k z_1,\ldots,z_k\psi(z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_m)\wedge$$
$$\wedge\,\forall u_1,\ldots,u_k\big(\varphi(u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_n)\to\psi(u_1,\ldots,u_k,y_1,\ldots,y_m)\big)\Big)$$

важи у слабом моделу, који може лако бити трансформисан у стандардни модел теорије S_0 (видети [14]), при чему је $S_0 \subseteq S_0'$, $S_0' \in \mathbb{A}$, затворен за супституцију константних симбола из K и дисјункцију, и $(S_0')_n = \{\varphi \in S_0' \mid \varphi$ има $n+1$ слободну промењљиву$\}$. Према Барвајзовој теореми компактности (видети [4]) следи да S има стандардни модел, рецимо $\mathcal{B}$, који се трансформише у средњи модел $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ теорије Γ, слично као код логике $L_{\mathbb{A}}(O,C)$. □

Теорема 7.7.5 (Теорема потпуности за $L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$)**.** *Ако је T непротивуречан, Σ-дефинабилан над $\mathbb{A}$, скуп реченица, онда T има тополошки класа модел.*

Доказ. Нека је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}$ средњи модел теорије T и нека је $\overline{\mathbb{T}}_n = \{x \mid x$ је коначан пресек елемената из и $\mathbb{T}_n'\}$ и $\overline{\mathbb{C}}_n = \{x \mid x$ је коначна унија елемената из и $\mathbb{C}_n'\}$. Индукцијом по сложености формуле из $L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ са параметрима у K, доказаћемо да је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}$ $\equiv_{L_{\mathbb{A}}^{\mathrm{cont}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}} (\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$, где је $\mathbb{T}_n = \{\bigcup x \mid x\in\overline{\mathbb{T}}_n\}$ и $\mathbb{C}_n = \{\bigcap x \mid x \in \overline{\mathbb{C}}_n\}$. Показаћемо само случајеве са квантификаторима $O^n x_1,\ldots,x_n\theta(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ и $C^n x_1,\ldots,x_n\theta$ $(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$. Уколико је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega} \models \theta^n x_1,\ldots,x_n\theta$, тада је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models O^n x_1,\ldots,x_n\theta$, с обзиром да је $\mathbb{T}_n' \subseteq \mathbb{T}_n$, слично је и за формулу $C^n x_1,\ldots,x_n\theta$.

Претпоставимо да је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega} \models O^n x_1,\ldots,x_n\theta$, али да важи $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega} \models \neg O^n x_1,\ldots,x_n\theta$. Тада је

$$\big[\theta(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\big]^{(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}} = \big[\theta(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\big]^{(\mathcal{K},\mathbb{T}_n,\mathbb{C}_n)_{n\in\omega}} =$$

(према индукцијској претпоставци)

$$=\bigcup_\alpha\Big(\bigcap_j\big[\theta_{\alpha j}(x_1,\ldots,x_n)\big]^{(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}}\Big),$$

где је $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega} \models O^n x_1,\ldots,x_n\theta_{\alpha j}$ и индексни скуп за α је произвољан, а за j коначан. С обзиром да је реченица θ^{O^n} задовољена у средњем моделу $(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}$, закључујемо да постоји елемент $(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}_n$ такав да важи

$$(b_1,\ldots,b_n)\in\big[\theta(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\big]^{(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}}\setminus\bigcup_\alpha\Big(\bigcap_j\big[\theta_{\alpha j}(x_1,\ldots,x_n)\big]^{(\mathcal{K},\mathbb{T}_n',\mathbb{C}_n')_{n\in\omega}}\Big),$$

контрадикција. Потпуно аналогно се показује и за случај $C^n x_1, \ldots, x_n \theta(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$. На основу теореме 7.3.2 (видети [11], [12]) може се закључити да је $(\mathcal{K}, \mathbb{T}_n, \mathbb{C}_n)_{n\in\omega}$ комплетан тополошки класа модел за теорију T. $\square$

Литература

[1] M. Adams and Guillemin, *Measure Theory and Probability*, Birkhäuser Verlag, 1996.

[2] S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

[3] K. Athreya and S. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer, 2006.

[4] J. Barwise, *Admissible sets and structures: An approach to definability theory*, Springer-Verlag, 1975.

[5] J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, reprinted, 2006.

[6] J. Barwise and S. Ferman (eds.), *Model–Theoretic Logics*, Springer – Verlag, 1985.

[7] K.P.S. Bhaskara Rao and M. Bhaskara Rao, *Theory of Charges*, Academic Press, INC, London, 1983.

[8] M. Božić, *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2002.

[9] C.C. Chang and H.J. Keisler, *Model theory*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[10] N. Cutland, *Computability, an introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, 1980.

[11] D. Ćirić and Ž. Mijajlović, *Topologies on clases*, Math. Balcanica (1990).

[12] D. Ćirić and Ž. Mijajlović, *Class spaces*, Math. Balcanica (1993).

[13] R. Đorđević, *Barwise completeness theorems for logic with integrals*, Publication de l'institut mathématique **63** (1991), 1–5, Nouvelle série, tome 49.

[14] R. Đorđević, N. Ikodinović, and Ž. Mijajlović, *Completeness theorem for topological class models*, Archive for Mathematical Logic **46** (2007), 1–8.

[15] R. Đorđević, M. Rašković, and Z. Ognjanović, *Completeness theorem for propositional probabilistic models whose measures have only finite ranges*, Archive for Mathematical Logic **43** (2004), no. 4, 557–563.

[16] R.S. Đorđević, *Analytic completeness theorem for absolutely conitinuous biprobability models*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **38** (1992), no. 1, 241–246.

[17] R.S. Đorđević, *Analytic completeness theorem for singular biprobability models*, Mathematical Logic Quarterly **39** (1993), no. 1, 228–230.

[18] H.D. Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas, *Mathematical logic*, Springer, 1994.

[19] S. Fajardo, *Probability logic with conditional expectation*, Annals of Pure and Applied Logic **28** (1985), 137–161.

[20] S. Fajardo and H.J. Keisler, *Model theory of stochastic processes*, Lecture notes in logic, Vol. 14, A.K. Peters, 2002.

[21] J. Flum and M. Zeigler, *Topological Model Theory*, Springer – Verlag, 1980.

[22] P.R. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand Reinhold Princeton New York, 1950.

[23] D.N. Hoover, *Probability logic*, Annals of Math. Logic **14** (1978), no. 3, 287–313.

[24] N. Ikodinović, *Neke verovatnosne i topološke logike*, doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 2005.

[25] Z. Ivković, *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[26] H.J. Keisler, *Model theory for infinitary logic: logic with countable conjunctions and finite quantifiers*, Elsevier Science, 1971.

[27] H.J. Keisler, *Probability quantifiers*, in: Model-theoretic logics **3**. etds. J. Barwise, S. Feferman, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag. Berlin, (1985), 539–556.

[28] H.J. Keisler, *Hyperfinite model theory*, Logic Colloquium '76, North Holland, Amsterdam, 1997, pp. 5–110.

[29] H.J. Keisler, *Logic with the Quantifier "There exist uncountably many"*, Annals of Mathematical Logic **1** (1970), 1–93.

[30] J. Kelley, *General topology*, D. Van Nostrand Company, 1967.

[31] K. Kuratowski and A Mostowski, *Set Theory*, North Holland, Amsterdam, 1968.

[32] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[33] E.Dž Lemon, *Upoznavanje sa logikom*, Jasen, Nikšić, 2002.

[34] P.A. Loeb and S. Rashid, *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 113–122.

[35] Ž. Mijajlović, *An introduction to model theory*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Institute of Mathematics, 1987.

[36] B. Mirković, *Teorija mera i integrala*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[37] J.D. Monk, *Mathematical logic*, Springer-Verlag, 1976.

[38] Z. Ognjanović, *Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu*, doktorska disertacija, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno-matematički fakultet, Kragujevac, 1999.

[39] Z. Ognjanović i M. Rašković, *Some probability logics with new types of probability operators*, Journal of logic and computation **9** (1999), no. 2, 181–195.

[40] Z. Ognjanović i M. Rašković, *Some first order probability logics*, Theoretical Computer Science **247** (2000), no. 1–2, 191–212.

[41] Z. Ognjanović i N. Krdžavac, *Uvod u teorijsko racunarstvo*, Beograd – Kragujevac, 2004.

[42] E. Pap (ed.), *Handbook of Measure Theory*, North Holland, 2002.

[43] A. Perović, A. Jovanović, and B. Veličković, *Teorija skupova*, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[44] M. Rašković and R. Đorđević, *Probability quantifiers and operators*, Vesta, Belgrade, 1996.

[45] M.D. Rašković, *Model theory for $L_{\mathbb{A}M}$ logic*, Publ. Inst. Math. Beograd **(N.S.) 37 (51)** (1985), 17–22.

[46] M.D. Rašković, *Completeness theorem for biprobability models*, The Journal of Symbolic Logic **51** (1986), no. 3, 586–590.

[47] V. Ristić, *Completeness theorem for probability models with finitely many valued measure in logic with integrals*, Kragujevac Journal of Mathematics **34** (2010), 131–137.

[48] V. Ristić, N. Ikodinović, and R. Đorđević, *Biprobability logic with conditional expectation*, Mathematical Logic Quarterly **57** (2011), no. 4, 400–408.

[49] J. Sgro, *Completeness theorems for continuous functions and product topologics*, Israel Journal of Mathematics **25** (1976), 249–271.

[50] J. Sgro, *Completeness theorem for topological models*, Annals of Math. Logic **11** (1977), 173–193.

[51] J. R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison–Wesley, Reading, 1967.

[52] A. Torgašev, *Funkcionalna analiza*, Laser, Beograd, 1995.

[53] M. Väth, *Nonstandard Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2007.

[54] S. Vujošević, *Matematička logika: o mogućnostima formalnog metoda*, CID Podgorica, 1996.

Додатак

Summary

It could say that the research of logical systems in the dissertation goes in two directions: the first one is related to probability theory i.e. measure theory, while the other direction is related to topology. The main subject of this dissertation is extending the classical logic to formal systems which will be adequate for describing and concluding in the mentioned mathematical environments. The first part represents follow-up of works by M. Rašković and R. Đorđević in the area of probability logics and especially in the area of biprobability logics. The focus is on the logics with integral operators and logics with conditional expectation operators. The topological class logic [11, 12], which is adequate for studying the notions of topological product and continuous functions on topological class-spaces, is presented in the second part of this dissertation.

The introduction part of the dissertation describes history and significance of probability and topological logics and also gives a shorter review of infinitary logic $L_{\omega_1\omega}$ and logics with generalized quantifiers $L(Q)$. Then, the dissertation is divided into these seven chapters: (1) Nonstandard analysis, (2) Admissible sets, (3) Countable fragments of infinitary logic $L_{\infty\omega}$, (4) Middle model, (5) Logics with integrals, (6) Logics with conditional expectation operators and (7) Topological logics. The first chapter, *Nonstandard analysis*, describes the basic notions of nonstandard analysis and two techniques that have the main role in constructing the expected models of represented logic systems: construction of Loeb measure and Loeb construction of Daniell integral. The second chapter, *Admissible sets*, describes elementary notions related to Kripke–Platek set theory and for its transitive models-admissible sets. Some special types of admissible sets which will be crucial for building the syntax of probability and topological logics are also described in this chapter, as well as relationship with classical computability theory. The third chapter, *Countable fragments of infinitary logic $L_{\infty\omega}$*, is the representation of the countable fragment $L_{\mathbb{A}}$. It describes the way of formalizing the syntax an semantics in KPU theory, and consistent property, and it is proving completeness and compactness (Barwise compactness) for countable admissible fragments. All new logics, that will be described in this dissertation, will be infinitary logics an appropriate admissible sets. The fourth chapter, *Middle model*, represents original review by N. Ikodinović of known construction of the middle model by M. Rašković. The middle model technique is given in a separate chapter because it is used in all results in this dissertation. The fifth chapter, *Logics with integrals*, first describes the probability logic $L_{\mathbb{A}P}$, and then it describes the logic with integral operators $L_{\mathbb{A}\int}$, with a review of relationship between these logical systems. Additionally, two new probability logics $L^{\mathrm{fin}}_{\mathbb{A}\int}$ and $L^{a}_{\mathbb{A}\int_1\int_2}$ are described. In the first one models with measures that have finite ranges are described. The other one represents the equivalent of Rašković's biprobability logic $L^{a}_{\mathbb{A}P_1P_2}$ among logics with integral operators. In both of these cases, completeness of axiomatization in related to class of defined models is proven. At the beginning of the sixth chapter, *Logics with conditional expectation operators*, Keisler's logic $L_{\mathbb{A}\int}(\mathbb{R})$ with integral operators and random variables is represented. After that, it describes the logic $L_{\mathbb{A}E}$ with conditional expectation operator, then

the new biprobability logic with random variables $L^{a}_{\mathbb{A}\int_1\int_2}(\mathbb{R})$, as well as biprobability logic with conditional expectation. Two different operators of a conditional expectation in related to two measure μ_1 and μ_2 which are in absolute continuous relation, are defined. The seventh chapter, *Topological logics*, describes Keisler's logic with quantifier "there exist uncountably many" which, in some way, represents the base for topological logics described in this chapter. After that, some elementary notions are described that are related to classical topological spaces, and also for topological class-spaces that were studied by Z. Mijajlović and D. Ćirić in [11, 12]. Two Sgro's topological logics $L(O)$ and $L(O^n_{n\in\omega})$, are also represented in this chapter. The latter one is the extension of the logic $L(O)$ and it is appropriate for studying the topological produced and continuous functions on classical topological spaces. The next section describes topological class logic $L_{\mathbb{A}}(O,C)$, that represents infinitary admissible equivalent of Sgro's logic $L(O)$ in relation to topological class-spaces. Finally, new topological class logic $L^{\text{cont}}_{\mathbb{A}}(O^n,C^n)_{n\in\omega}$ is described, in which the central place is occupied with the notions of topological product and continuous functions on topological class spaces.

Биографија

Владимир Ристић рођен је 1974. године у Јагодини. Основну школу и гимназију, природно-математички смер, завршио је у Јагодини. Природно-математички факултет у Крагујевцу, одсек Математика, смер Теоријска математика и примене, уписао је 1994. године, где је дипломирао 2000. године са просечном оценом 8,65. На истом факултету је 2000. године уписао последипломске (магистарске) студије, научна област Математичка логика. Све планом и програмом предвиђене предмете положио је са просечном оценом 10,00, а магистарску тезу под називом „Вероватносне логике са вектор-вредносним мерама” одбранио је 2006. године, под менторством проф. др Радосава Ђорђевића.

На Факултету педагошких наука у Јагодини запослен је од 2000. године као асистент-приправник за научну област Математика са методиком математике. Од 2007. године ради као асистент на истом факултету. На смеровима за учитење и васпитаче држи вежбе из следећих предмета: Основе математике 1, Основе математике 2, Елементарни математички појмови, Еуклидска геометрија, Елементарна теорија бројева, Математичка анализа.

Владимир Ристић има пет радова публикованих у научним часописима, од којих је један са SCI листе.

1. V. Ristć, $L^{\mathrm{k}}_{\mathbb{A}CP}$ *logic and completeness theorem*, Kragujevac Journal of Mathematics **29**(2006), 99–111.
2. V. Ristić, *Probability logics with vector-valued measures*, Kragujevac Journal of Mathematics **32**(2009), 47–60.
3. V. Ristić, $L^{\mathrm{rat}}_{\mathbb{A}P}$ *logic and completeness theorem*, Kragujevac Journal of Mathematics **32**(2009), 149–156.
4. V. Ristić, N. Ikodinović, and R. Đorđević, *Biprobability logics with conditional expectation*, Mathematical Logic Quarterly **57** (2011), no. 4, 400–408.
5. V. Ristić, *Completeness theorem for probability models with finitely many valued measure in logic with integrals*, Kragujevac Journal of Mathematics **34** (2010), 131–137.

Добијени резултати у претходно поменутим радовима су презентовани на семинарима из вероватносних логика Математичког института САНУ. Учествовао је на следећим међународним конференцијама:

1. R. Đorđević, and V. Ristić, *Probability logics with vector-valued measures*, International Conference on Numerical and Applied mathematics, 2006, Kragujevac.
2. V. Ristić, N. Ikodinović, R. Đorđević, *Biprobability logics with conditional expectation*, Probabilistic logics and applications, 2011, Beograd.
3. Б. Мијајловић, В. Ристић, *Један методички приступ конструкцији реалних бројева помоћу низова уметнутих интервала*, Методички аспекти наставе математике II, 2011, Јагодина.
4. R. Đorđević, N. Ikodinović, V. Ristić, *Topological class logic* $L^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{A}}(O^n, C^n)_{n\in\omega}$, Probabilistic logics and applications, 2012, Beograd.